К. Каратеодори

Конформное отображение

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
К11

К. Каратеодори

К11 Конформное отображение / К. Каратеодори – М.: Книга по Требованию, 2023. – 129 с.

ISBN 978-5-458-26172-2

ISBN 978-5-458-26172-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является результатом лекций, читанных мной в течение ряда лет в различных местах (Геттинген, Берлин, Афины, Мюнхен и Гарвардский университет). Она содержит теорию конформных отображений в том виде, в котором эта теория была развита в течение двух последних десятилетий. Первая часть книги посвящена элементарным вопросам, необходимым для понимания общей теории. В трех последних главах дается изложение общей теории, построенное на простейших современных методах.

Оригинальная рукопись, написанная на немецком языке, была переведена B. M. Wilson'ом (университет в Ливерпуле) и Miss Margaret Kennedy (Ньюгемский колледж). Я выражаю им глубокую благодарность за внимание, с которым они старались сделать понятными читателю самые сложные рассуждения. Я обязан также проф. Erhard Schmidt (Берлин) и проф. Tibor Radò (Колумбус, Огайо) за различные усовершенствования в математических доказательствах и Miss Margaret Kennedy за отдельные замечания, улучшающие текст. Я должен еще поблагодарить издательство Кембриджского университета (Cambridge University Press) за прекрасное внешнее оформление книги.

Афины. *C. Carathéodory*
Декабрь 1931 г.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Цифры, стоящие в тексте в круглых скобках, дают сноски на литературу, приведенную автором.

В конце книги помещены примечания, сделанные переводчиком. Указания на них в тексте дают цифры, стоящие в квадратных скобках.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

1. Изогональным (сохраняющим углы) преобразованием одной области в другую называется взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно диференцируемое преобразование областей, переводящее две кривые первой области, пересекающиеся под углом α, в кривые второй области, пересекающиеся под тем же углом α. Если при этом сохраняется направление вращения углов, изогональное преобразование называется *конформным*.

Не считая обычного растяжения евклидовой плоскости (преобразования подобия), старейшим преобразованием такого ряда является *стереографическая проекция*, которая использовалась Птоломеем (вторая четверть второго столетия; умер в 161 г. нашей эры) для изображения небесной сферы на плоскости; это преобразование отображает сферу на плоскость конформно. Совершенно другое конформное отображение сферы на плоскость дается *меркаторской проекцией*; в этом случае поверхность сферы, разрезанная вдоль меридиана, отображается конформно на плоский прямоугольник. Первая карта, построенная при помощи такого преобразования, была опубликована Mercator'ом (1512—1594) в 1568 г., и с тех пор его метод сделался общепринятым для черчения морских карт.

2. Сравнение карт одной и той же области, полученных стереографической проекцией и проекцией Mercator'а, показывает, что конформное отображение не сводится к простому подобию соответствующих фигур. Другие не тривиальные конформные отображения одной плоской области на другую можно получить, сравнивая различные стереографические проекции сферы, соответствующие разным положениям центра проекций на ее поверхности. Подобными рассмотрениями Lagrange (1736—1813) в 1779 г. получил все конформные отображения участка сферы на плоскую область, при которых меридианы и параллели изображаются круговыми дугами (1).

3. В 1822 г. Gauss (1777—1855) поставил и до конца разрешил задачу о нахождении всех конформных отображений достаточно малой окрестности точки произвольной аналитической поверхности на плоскую область (2). Это сочинение Gauss'а, казалось бы, окончательно разрешает весь этот вопрос в целом; в действительности оно оставляет открытым несравненно более сложный вопрос о конформном отображении конечного участка

поверхности на участок плоскости. Этот вопрос впервые был выдвинут Riemann'ом (1826—1866) в его диссертации (1851), являющейся поворотным пунктом в истории вопроса, определяющим все его дальнейшее развитие. Riemann не только дал идеи, явившиеся основой для всех дальнейших исследований, но также показал, что проблема имеет фундаментальное значение для теории функций (3).

4. Наряду с другими результатами Riemann высказал теорему о том, что всякую односвязную плоскую область, не совпадающую со всей плоскостью, можно отобразить конформно на внутренность круга. При доказательстве этой теоремы, лежащей в основе всей теории, он принял очевидным существование решения некоторой проблемы вариационного исчисления. Weierstrass (1815—1897) впервые указал на незаконность этого допущения. Совсем простые, аналитические и со всех точек зрения регулярные проблемы вариационного исчисления, как известно теперь, не всегда имеют решение (4). Тем не менее через пятьдесят лет после Riemann'a Hilbert доказал совершенно строго, что специальная проблема, входящая в сочинение Riemann'a, имеет решение; эта теорема носит название *принципа Dirichlet* (5).

В продолжение этого времени справедливость выводов Riemann'a была подтверждена строгими доказательствами K. Neumann'a и особенно H. A. Schwarz'a. Теория, созданная Schwarz'ем по этому поводу, чрезвычайно изящна, интересна и поучительна; однако эта теория несколько сложна и основывается на ряде теорем из теории логарифмического потенциала, доказательства которых нарушают целостность метода. В течение последних одного или двух десятилетий в работах различных математиков были созданы новые методы, дающие весьма простое изложение задачи. Цель следующих страниц — дать изложение этих методов, по возможности сжатое, но достаточно полное.

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ MÖBIUS'А

5. Общее понятие о конформном отображении. Известно из теории функций, что аналитическая функция $w = f(z)$, регулярная в точке $z = z_0$ и имеющая в этой точке производную, отличную от нуля, отображает некоторую окрестность точки z_0 плоскости z взаимно однозначно и непрерывно на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$ в плоскости w.

Разложение функции $f(z)$ около $z = z_0$ дается рядом

$$\left.\begin{aligned} &w - w_0 = A(z - z_0) + B(z - z_0)^2 + \ldots, \\ &A \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5,1}$$

Положим

$$z - z_0 = re^{it}, \quad A = ae^{i\lambda}, \quad w - w_0 = \rho e^{iu}, \tag{5,2}$$

где t, u, λ — действительные числа, а r, a, ρ — положительные; тогда из формулы (5,1) вытекает

$$\left.\begin{aligned} &\rho e^{iu} = are^{i(\lambda + t)}\{1 + \varphi(r, t)\}, \\ &\lim_{r \to 0} \varphi(r, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5,3}$$

Написанное соотношение эквивалентно двум:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = ar\{1 + \alpha(r, t)\}, \qquad && u = \lambda + t + \beta(r, t), \\ &\lim_{r \to 0} \alpha(r, t) = 0, && \lim_{r \to 0} \beta(r, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5,4}$$

При $r = 0$ второе из этих соотношений дает:

$$u = \lambda + t. \tag{5,5}$$

Эта формула дает связь между направлением кривой, выходящей из точки z_0, и направлением в точке w_0 соответствующей кривой на плоскости w.

Уравнение (5,5) показывает, что отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, изогонально в точке z_0 (обладает консерватизмом углов). Производная $f'(z)$ не может обратиться в нуль в некоторой окрестности точки z_0, и потому отображение окрестности точки z_0 на участок плоскости w не только непрерывно, но и конформно.

Первое из соотношений (5,4) может быть истолковано следующим образом: „бесконечно малые" круги z-плоскости переходят в „бесконечно малые" круги w-плоскости. Существуют нетривиальные конформные преобразования, при которых это свойство сохраняется и для *конечных* кругов; мы изучим прежде всего такие преобразования.

6. Преобразование Möbius'а. Пусть A, B, C — три комплексные константы, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ — величины сопряженные, а x, $\overline{x}$ — комплексное переменное и сопряженная с ним величина.

Уравнение

$$(A+\overline{A})x\overline{x}+Bx+\overline{B}\overline{x}+C+\overline{C}=0, \tag{6,1}$$

коэфициенты которого удовлетворяют условию

$$B\overline{B}>(A+\overline{A})(C+\overline{C}), \tag{6,2}$$

всегда изображает действительный круг или действительную прямую. Обратно, всякий действительный круг и всякая действительная прямая при надлежащем выборе коэфициентов могут быть изображены уравнением вида (6,1) с соблюдением условия (6,2).

Если в уравнении (6,1) произвести одно из преобразований

$$y=x+\lambda, \tag{6,3}$$

$$y=\mu x, \tag{6,4}$$

$$y=\frac{1}{x}, \tag{6,5}$$

то мы опять получим уравнение вида (6,1) с другими константами A, B, C, но снова удовлетворяющими условию (6,2). Преобразование (6,5) переводит в прямые линии те круги и прямые (6,1), для которых $C+\overline{C}=0$, т. е. круги, проходящие через начало координат. Мы поэтому будем часто рассматривать прямые линии как круги, проходящие через точку $x=\infty$.

7. Если мы произведем последовательно, любое число раз, преобразования вида (6,3), (6,4), (6,5) с произвольными константами λ и μ, результирующее преобразование будет вида:

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{7,1}$$

где α, β, γ, δ — постоянные, удовлетворяющие условию

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0, \tag{7,2}$$

так как, если это условие не выполнено, правая часть (7,1) представляет собой константу или выражение, не имеющее смысла и, следовательно, (7,1) не дает преобразования x-плоскости.

Обратно, всякое дробно-линейное преобразование вида (7,1) может быть легко получено при помощи преобразований вида (6,3), (6,4), (6,5). Отсюда следует, что (7,1) переводит круги в круги. Преобразование (7,1) впервые изучалось Möbius'ом (1790—1868), и поэтому его часто называют *преобразованием Möbius'а.*

8. Обращение преобразования (7,1)

$$x = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha}, \quad (-\delta)(-\alpha) - \beta\gamma \neq 0 \tag{8,1}$$

есть снова преобразование Möbius'а.

Если мы применим сначала преобразование (7,1), а потом другое преобразование Möbius'а

$$z = \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{\gamma_1 y + \delta_1}, \quad \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0,$$

результирующее преобразование будет также преобразованием Möbius'а

$$z = \frac{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}{\Gamma x + \Delta}$$

с детерминантом, отличным от нуля

$$\mathrm{A}\Delta - \mathrm{B}\Gamma = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) \neq 0.$$

Указанные свойства приводят к теореме:

Теорема 1: *Совокупность всех преобразований Möbius'а образует группу* [1].

9. Назовем замкнутой x-плоскостью x-плоскость, дополненную точкой $x = \infty$. Уравнения (7,1) и (8,1) показывают, что *всякое преобразование Möbius'а есть взаимно однозначное преобразование замкнутой x-плоскости в самое себя.*

Если $\gamma \neq 0$, то при преобразовании (7,1) точка $y = \frac{\alpha}{\gamma}$ соответствует точке $x = \infty$, а точка $y = \infty$ соответствует точке $x = -\frac{\delta}{\gamma}$.

Если $\gamma = 0$, точки $x = \infty$ и $y = \infty$ соответствуют друг другу. Из (7,1) следует:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

Полученное выражение показывает (§ 5), что отображение (7,1) конформно всюду, за исключением точек $x=\infty$ и $x=-\frac{\delta}{\gamma}$. Эти две точки перестанут быть исключительными, если определение конформного отображения дополнить следующим: функция $y=f(x)$ отображает конформно окрестность точки x_0 на окрестность точки $y=\infty$, если $\eta=\frac{1}{f(x)}$ отображает конформно окрестность точки x_0 на окрестность точки $\eta=0$; аналогично, $y=f(x)$ отображает окрестность точки $x=\infty$ конформно на окрестность точки y_0, если

$$y=\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

отображает конформно окрестность точки $\xi=0$ на окрестность точки y_0. В этом определении не исключается случай $y_0=\infty$. Последние определения позволяют сформулировать теорему.

Теорема 2: *Всякое преобразование Möbius'a дает взаимно однозначное и конформное отображение всей замкнутой x-плоскости на замкнутую y-плоскость.*

10. Инвариантность ангармонического отношения. Пусть x_1 x_2, x_3, x_4 четыре точки x-плоскости, переходящие при преобразовании (7,1) в точки y_1, y_2, y_3, y_4. Предположим сначала, что все величины x_i, y_i конечны; тогда для любой пары точек имеем:

$$y_k-y_i=\frac{\alpha x_k+\beta}{\gamma x_k+\delta}-\frac{\alpha x_i+\beta}{\gamma x_i+\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x_k+\delta)(\gamma x_i+\delta)}(x_k-x_i).$$

Отсюда следует, что для четырех точек имеет место равенство:

$$\frac{(y_1-y_4)(y_3-y_2)}{(y_1-y_2)(y_3-y_4)}=\frac{(x_1-x_4)(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}. \qquad (10,1)$$

Выражение

$$\frac{(x_1-x_4)(x_3-x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}$$

называется ангармоническим отношением четырех точек x_1, x_2, x_3, x_4. Равенство (10,1) показывает, что ангармоническое отношение остается инвариантным при всяком преобразовании Möbius'a. Подобные же вычисления показывают, что уравнение (10,1), надлежащим образом измененное, остается верным, если одно из чисел x_i, или одно из чисел y_i бесконечно; если, например, $x_2 = \infty$ и $y_1 = \infty$,

$$\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_4} = \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4}. \qquad (10,2)$$

11. Пусть x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 две группы, содержащие по три неравных комплексных числа. Предположим сначала, что все шесть комплексных чисел конечны. Уравнение

$$\frac{(y_1 - y)(y_3 - y_2)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y)} = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x)}, \qquad (11,1)$$

разрешенное относительно y, дает преобразование Möbius'a.

Это преобразование, как легко проверить, переводит каждую точку x_i в соответствующую точку y_i [1]. Из § 10 следует, что (11,1) есть единственное преобразование Möbius'a, обладающее таким свойством. Результат остается верным и в том случае, когда одна из точек x_i, y_i становится бесконечной, только в этом случае уравнение (11,1) должно быть надлежащим образом изменено.

12. Так как круг однозначно определяется тремя точками, лежащими на его окружности, результат § 11 может быть приложен к нахождению преобразования Möbius'a, переводящего заданный круг в другой круг или в прямую линию. Например, если положим $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 = -1$ и $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = \infty$, получим преобразование

$$y = i\,\frac{1 - x}{1 + x}, \qquad (12,1)$$

отображающее окружность круга $|x| = 1$ на действительную ось и *внутреннюю область* единичного круга $|x| < 1$ на *верхнюю* половину y-плоскости. При другом выборе шести точек x_i, y_i можно отобразить *внешнюю область* единичного круга $|x| > 1$ на ту же полуплоскость. При выборе трех точек x_i на том же круге, на котором расположены точки y_i, получим отображение внутренности круга на себя или на внешность того же круга, в зависимости от того, будут ли точки x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 определять одно и то же или различные направления обхода окружности.

---

[1] Определитель преобразования

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Так, например, если в (11,1) мы положим $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=\infty$ и сначала $x_1=1$, $x_2=\infty$, $x_3=0$, а потом $x_1=\infty$, $x_2=1$, $x_3=0$, мы получим два преобразования:

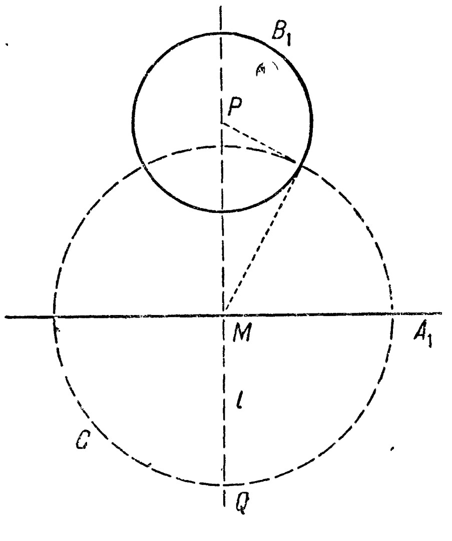
$$y=\frac{x-1}{x} \text{ и } y=\frac{1}{x}, \tag{12,2}$$

первое из которых преобразует верхнюю полуплоскость в самое себя, а второе ее же — в нижнюю полуплоскость.

13. Пучки окружностей. Так как преобразование Möbius'а конформно, оно преобразует ортогональные круги в ортогональные.

Теорема 3: *Для двух произвольных кругов A и B можно подобрать преобразование Möbius'а, переводящее их в две прямые или в два концентрических круга.*

Если A и B имеют общую точку P, всякое преобразование Möbius'а, переводящее точку P в точку ∞, преобразует A и B в прямые линии; эти прямые будут пересекаться или будут параллельны, в зависимости от того, имеют ли A и B общую точку, отличную от P, или нет.



Фиг. 1.

Если A и B не имеют общей точки, совершим прежде всего преобразование Möbius'а, отображающее круг A на прямую линию A_1; пусть B_1 — круг, соответствующий при этом преобразовании кругу B; A_1 и B_1 не пересекаются. Из центра B_1 проведем прямую l перпендикулярно к A_1; пусть M — основание этого перпендикуляра. Из точки M, как из центра, опишем круг C, ортогональный к B_1. Отобразим вторым преобразованием Möbius'а круг C и прямую l на две пересекающиеся (ортогонально) прямые линии; тогда A_1, B_1 перейдут в два круга A_2, B_2, пересекающие эти прямые ортогонально. Отсюда следует, что круги A_2, B_2 концентричны.

14. Если даны две произвольные пересекающиеся прямые линии, то существует семейство концентрических окружностей,