

И.К. Кикоин

Журнал Квант 1971 №3

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
К38

К38 **Кикоин И.К.**
Журнал Квант 1971 №3 / И.К. Кикоин – М.: Книга по Требованию, 2023. –
68 с.

ISBN 978-5-458-29862-9

ISBN 978-5-458-29862-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

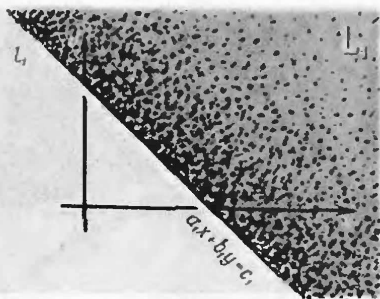


Рис. 1.

которая выделена на рисунке 1. Кроме того, из условия нашей задачи ясно, что x и y — неотрицательные числа (нельзя же давать цыпленку отрицательное количество корма). Условию $x \geq 0$ удовлетворяют точки правой полуплоскости (ограниченной осью ординат), условию $y \geq 0$ удовлетворяют точки верхней полуплоскости (ограниченной осью абсцисс), а рационам, содержащим не менее c_1 калорий, отвечают точки (x, y) , для которых одновременно выполнены три неравенства:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ a_1x + b_1y \geq c_1, \end{cases} \quad (1)$$

то есть точки, лежащие в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскости L_1 . На рисунке 2 выделяю множество точек, соответствующих решениям системы неравенств (1). Перейдем к другим ограничениям. Если один грамм пшеницы содержит a_2 граммов белков, один грамм гороха — b_2 граммов белков, а дневной рацион цыпленка должен содержать не менее c_2 граммов белков, то, очевидно, достаточное количество белка содержат те рационы из x граммов пшеницы и y граммов гороха, для которых

$$a_2x + b_2y \geq c_2.$$

Соответствующие этим рационам точки лежат в полуплоскости L_2 , ограниченной прямой L_2 , которая задается уравнением $a_2x + b_2y = c_2$. Точно так

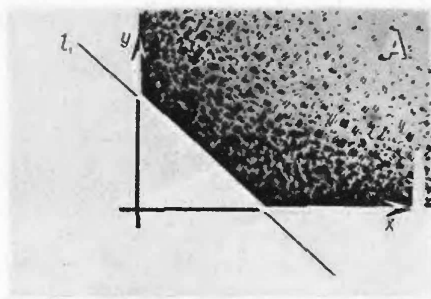


Рис. 2.

же рацион должен удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} a_3x + b_3y \geq c_3, \\ a_4x + b_4y \geq c_4, \end{cases}$$

где a_3 и a_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме пшеницы, b_3 и b_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме гороха, c_3 и c_4 — минимальные количества жиров и углеводов в дневном рационе цыпленка. (Все величины измеряются в граммах.) Точки (x, y) , удовлетворяющие первому из этих двух неравенств, лежат в полуплоскости L_3 , а точки, удовлетворяющие второму неравенству, — в полуплоскости L_4 . Рацион, содержащий достаточное количество всех компонентов (калорий, белков, жиров и углеводов), мы назовем допустимым. Таким образом, допустимыми будут те рационы, состоящие из x граммов пшеницы и y граммов гороха, которые удовлетворяют системе из шести линейных неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ a_1x + b_1y \geq c_1, \\ a_2x + b_2y \geq c_2, \\ a_3x + b_3y \geq c_3, \\ a_4x + b_4y \geq c_4. \end{cases} \quad (2)$$

Соответствующие допустимым рационам точки плоскости лежат в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскостей L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , то есть внутри или на границе фигуры (бесконечного мно-

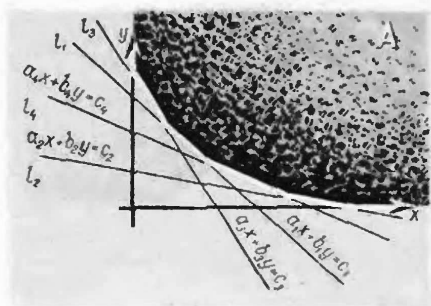


Рис. 3.

гоугольника) A , выделенной на рисунке 3.

На этом рисунке изображен тот случай, когда каждое неравенство в системе (2) существенно, то есть для каждого из шести неравенств найдется решение системы остальных пяти неравенств, не удовлетворяющее этому неравенству. Другой возможный случай изображен на рисунке 4.

Геометрически это означает, что одна из прямых (на рис. 4 — прямая l_3) лежит вне множества A , а алгебраически, что система (2) эквивалентна системе, из которой исключено одно из неравенств (в нашем случае — последнее неравенство). Ввиду в дальнейшем, чтобы не делать специальных оговорок, мы будем предполагать, что имеет место случай, изображенный на рисунке 3.

Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти точки. На рисунке 5, а изображены некоторые выпуклые, а на рисунке 5, б — невыпуклые множества.

Полуплоскость — выпуклое множество, а так как пересечение любого числа выпуклых множеств — также выпуклое множество, то и множество A выпуклое.

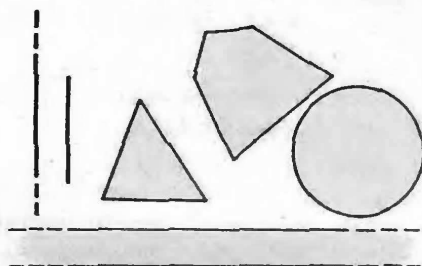


Рис. 5, а.

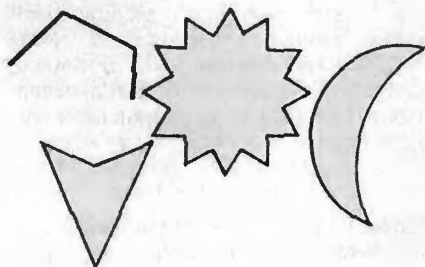


Рис. 5, б.

Теперь постараемся выбрать из всех допустимых рационов самый дешевый. Пусть 1 грамм пшеницы стоит p копеек, а 1 грамм гороха — q копеек. Тогда рацион из x граммов пшеницы и y граммов гороха стоит $px + qy$ копеек. Таким образом, цена является *линейной функцией* от x и y , а задача нахождения самого дешевого рациона состоит в нахождении среди всех пар чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств (2), таких пар, для которых значение этой линейной функции достигает минимума. Другими словами, нужно найти те из точек множества A , в которых функция $px + qy$ достигает наименьшего значения из всех значений, принимаемых этой функцией в точках множества A .

Множество точек (x, y) плоскости, для которых выражение $px + qy$ равно некоторому числу k , является при

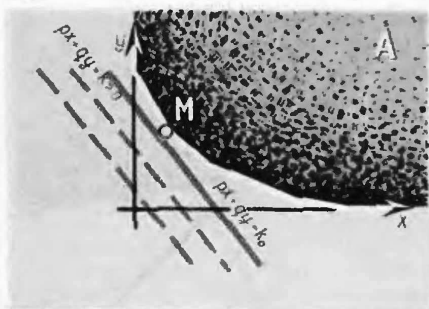


Рис. 6.

мой. При разных k такие прямые параллельны. При отрицательных и достаточно малых положительных значениях k эта прямая не пересекает множества A и, следовательно, не существует допустимого рациона ценной в k копеек. Если увеличивать значения k , начиная, например, с $k=0$, то прямая, задаваемая уравнением

$$px + qy = k,$$

будет смещаться вправо (см. рис. 6). Наконец, при некотором значении $k=k_0$ прямая $px + qy = k_0$ впервые пересечет множество A , «наткнувшись» на одну из его вершин (точка M на рис. 6) или сразу на целую сторону (это может произойти, если прямые $px + qy = k$ параллельны одной из прямых l_1, l_2, l_3, l_4 или, что то же самое, если отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4};$$

см. дальше, рис. 8).

Прямая называется *опорной* к выпуклому множеству на плоскости, если это множество целиком лежит в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость, и в то же время по крайней мере одна точка множества лежит на прямой. Таким образом, уравнение $px + qy = k_0$ задает опорную прямую к множеству A .

Разберем теперь по отдельности два случая, о которых говорилось выше. Предположим сначала, что от-

ношение $\frac{p}{q}$ не равно ни одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}.$$

Тогда точка $M=(x_0, y_0)$ является *единственным решением задачи о самом дешевом допустимом рационе*. В самом деле, любая другая точка множества A лежит в полуплоскости K , задаваемой неравенством $px + qy \geq k_0$, и, следовательно, соответствует более дорогому рациону. Сторонами бесконечного многоугольника A служат лучи осей координат и отрезки прямых l_1, l_2, l_3, l_4 . Поэтому на каждой из этих сторон одно из шести неравенств системы (2) превращается в равенство, а в каждой вершине многоугольника A превращаются в равенства два неравенства системы (2). В случае, изображенном на рисунке 6, точка M лежит на пересечении прямых l_1 и l_3 (см. рис. 3); следовательно,

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_3x_0 + b_3y_0 = c_3. \end{cases}$$

откуда

$$x_0 = \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_3b_1 - a_1b_3}; \quad y_0 = \frac{c_1a_3 - a_1c_3}{a_3b_1 - a_1b_3}.$$

Зато остальные четыре неравенства в этой точке выполняются в строгом смысле, то есть со знаком «больше», а не «равно». Это означает, что рацион, состоящий из x_0 граммов пшеницы и y_0 граммов гороха, содержит минимально необходимое количество калорий и жиров, но избыточное количество белков и углеводов (если бы точка M лежала на пересечении других прямых, то вывод бы соответственно изменился).

Если бы специалисты по птицеводству решили, что цыплятам требуется немного больше чем c_2 граммов белков или немного больше чем c_4 граммов углеводов в день, то найденный нами самый дешевый рацион отвечал бы и этим новым требованиям (в самом деле, это означало бы, что прямые l_2 или l_4 немного сдвинулись бы вправо, но если такой сдвиг достаточно мал, то точка M все равно останется вершиной уменьшившегося многоугольника A). Однако если потребуются давать цыплятам чуть-чуть более калорийную пищу или чуть-чуть больше чем c_2

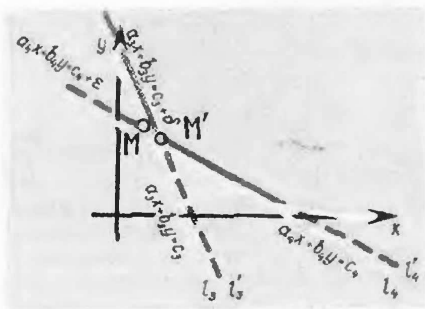


Рис. 7.

граммов жиров в день, то задачу о самом дешевом рационе придется решать заново, так как рацион, соответствующий точке M , перестанет быть допустимым, а самый дешевый рацион станет дороже (см. рисунок 7, где при усиленном требовании $a_3x + b_3y \geq c_3 + \delta$ самому дешевому рациону отвечает точка M' , лежащая внутри полуплоскости K).

Рассмотрим теперь случай, когда отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из четырех отношений, например $\frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 8). В этом случае прямая $px + qy = k_0$ совпадает с прямой l_1 . Все точки множества A , за исключением точек отрезка M_1M_2 , лежат внутри полуплоскости K , и, следовательно, рацион, соответствующий любой точке отрезка M_1M_2 , является самым дешевым допустимым рационом. Таким образом, среди точек, соответствующих решениям задачи о самом дешевом рационе, всегда имеются вершины многоугольника A .

Немного теории

Для нахождения решения достаточно сравнить значения функции $px + qy$ во всех вершинах. Если среди этих значений имеется одно, которое меньше всех остальных, то соответствующая вершина является единственным решением задачи; если значения в двух вершинах равны и меньше значений в остальных вершинах, то эти вершины обязательно соседние, и все точки стороны, соединяющей эти вершины, служат решениями задачи.

Будем для краткости называть

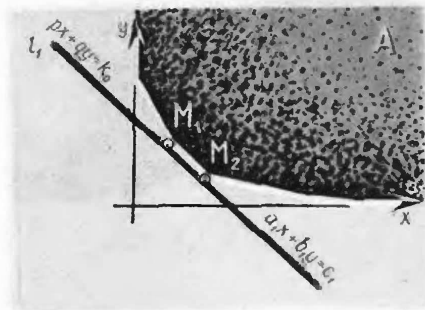


Рис. 8.

острый угол, образуемый прямой с осью абсцисс, углом наклона прямой. Если двигаться по границе множества допустимых точек, начиная с луча оси абсцисс в сторону луча оси ординат, то каждая следующая сторона лежит на прямой с большим углом наклона, чем предыдущая. Тангенсы этих углов тоже будут возрастать. Тангенс угла наклона α прямой $ax + by = c$ ($a > 0, b > 0$) равен $\frac{a}{b}$. (Если $b = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и принято считать, что $\operatorname{tg} \alpha$ равен бесконечности.)

Пусть опорная прямая проходит через вершину M множества допустимых точек и угол наклона этой прямой равен β , а углы наклона прямых, на которых лежат стороны, прилегающие к вершине M , равны α_1 и α_2 . Тогда угол β больше одного из этих углов и меньше другого (см. рис. 9).

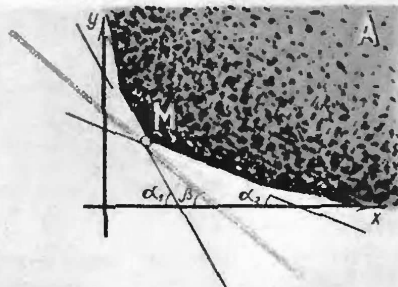


Рис. 9.

Таким образом, для того чтобы найти вершину, через которую проходит опорная прямая данного направления, нужно сравнить угол наклона прямых данного направления с углами наклона прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек, и выбрать такие две соседние стороны, между углами наклона которых лежит угол β . Точка пересечения этих сторон и будет искомой вершиной. Если угол β совпадает с углом наклона одной из сторон, то искомая опорная прямая совпадает с прямой, на которой лежит эта сторона. Вместо сравнения углов наклона можно сравнить их тангенсы, что значительно удобнее, так как тангенс угла наклона просто выражается через коэффициенты уравнения прямой.

Численные примеры

1. Среди решений системы линейных неравенств $2x+y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 8$, $3x+7y \geq 42$, $x+5y \geq 20$ найти такие, для которых линейная функция $4x+3y$ достигает минимума*).

Таблица 1

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y = 0$		0
$x + 5y = 20$	(0, 4), (20, 0)	$-\frac{1}{5}$
$3x + 7y = 42$	(0, 6), (14, 0)	$-\frac{3}{7}$
$x + y = 8$	(0, 8), (8, 0)	1
$2x + y = 10$	(0, 10), (5, 0)	2
$x = 0$		∞
$4x + 3y = c$	$(0, \frac{c}{3})$, $(\frac{c}{4}, 0)$	$-\frac{4}{3}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 10, из которого

*) Численные данные этого примера никак не связаны с величинами, которые задаются в задаче о корме для цыплят.

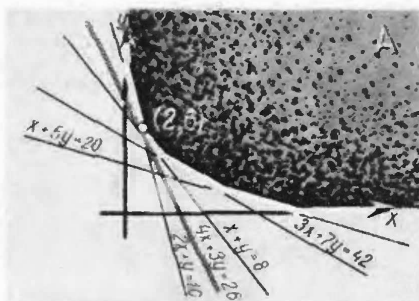


Рис. 10.

видно, что сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки всех четырех прямых: $x+5y=20$, $3x+7y=42$, $x+y=8$, $2x+y=10$.

Опорная прямая с тангенсом угла наклона $\frac{4}{3}$ должна проходить через вершину, лежащую на пересечении пары соседних сторон, одна из которых имеет тангенс угла наклона меньше $\frac{4}{3}$, а другая — больше $\frac{4}{3}$. Такую пару образуют стороны, лежащие на прямых

$$x+y=8 \text{ и } 2x+y=10,$$

с тангенсами углов наклона 1 и 2 соответственно. Таким образом, координаты искомой вершины определяются из системы

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 2x+y=10, \end{cases}$$

откуда $x=2$, $y=6$. Значение функции $4x+3y$ в этой точке равно $4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 26$, а опорная прямая определяется уравнением $4x+3y=26$.

Для сравнения вычислим значения функции $4x+3y$ во всех остальных вершинах множества допустимых точек (см. таблицу 2 на стр. 8).

2. Среди решений системы линейных неравенств $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x+y \geq 15$, $3x+4y \geq 36$, $x+2y \geq 12$, $2x+8y \geq 32$ найти такие, для которых функция $3x+12y$ достигает минимума.

Таблица 2

Уравнения прямых, на пересечении которых лежит вершина	Координаты вершины		Значения функции $4x+3y$ в вершине
	x	y	
$x=0, 2x+y=10$	0	10	$4 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$
$2x+y=10, x+y=8$	2	6	$4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 26$
$x+y=8, 3x+7y=42$	3,5	4,5	$4 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4,5 = 27,5$
$3x+7y=42, x+5y=20$	8,75	2,25	$4 \cdot 8,75 + 3 \cdot 2,25 = 41,75$
$x+5y=20, y=0$	20	0	$4 \cdot 20 + 3 \cdot 0 = 80$

Таблица 3

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y=0$		0
$2x+8y=32$	(0,4), (16,0)	$\frac{1}{4}$
$x+2y=12$	(0,6), (12,0)	$\frac{1}{2}$
$3x+4y=36$	(0,9), (12,0)	$\frac{3}{4}$
$3x+y=15$	(0,15), (5,0)	3
$x=0$		∞
$3x+12y=c$	$(0, \frac{c}{12}), (\frac{c}{3}, 0)$	$\frac{1}{4}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 11, из которого видно, что прямая $x+2y=12$ лежит целиком вне этого множества. Таким образом, сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки

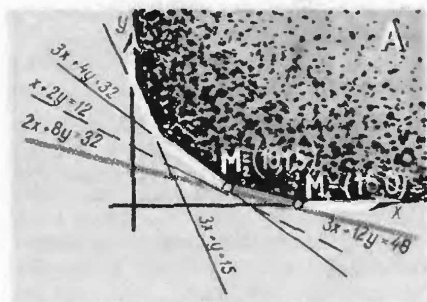


Рис. 11.

трех оставшихся прямых. Так как тангенс угла наклона прямых $3x+12y=c$ совпадает с тангенсом угла наклона одной из прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек (прямой $2x+8y=32$), то опорная прямая совпадает с этой прямой. Решениями задачи служат все точки стороны, лежащей на этой прямой. Концами этой стороны служат вершины, лежащие в точках пересечения прямой $2x+8y=32$ с соседними прямыми — $y=0$ и $3x+4y=36$ (напомним, что прямую $x+2y=12$ мы исключили из рассмотрения).

Итак, координаты (x_1, y_1) первой вершины M_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+8y_1=32, \\ y_1=0, \end{cases}$$

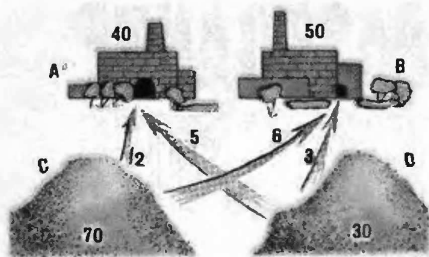


Рис. 12.

откуда $x_1=16$, $y_1=0$, а координаты (x_2, y_2) второй вершины M_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 + 8y_2 = 32, \\ 3x_2 + 4y_2 = 36, \end{cases}$$

откуда $x_2=10$, $y_2=1.5$.

Решениями задачи служат все точки отрезка M_1M_2 , другими словами, точки вида $(16\lambda + 10(1-\lambda), 1.5 \cdot (1-\lambda)) = (10 + 6\lambda, 1.5 - 1.5\lambda)$, где λ — любое число между 0 и 1. Значение функции $3x + 12y$ во всех точках отрезка M_1M_2 равно 48.

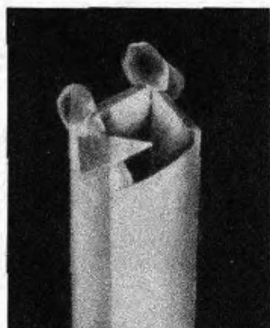
Упражнения*)

1. Решите «задачу о велосипедах».
2. Решите «задачу о карьерах» с данными, приведенными на рисунке 12.
3. Как изменится множество допустимых точек в задаче о самом дешевом рационе, если потребовать дополнительно, чтобы вес рациона не превосходил 5 грамм? Может ли такое ограничение повлиять на решение?
4. Доказать, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно представить как множество решений системы линейных неравенств.

5. Пусть $\frac{p}{q} = \frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 3 и 8). Как в этой ситуации изменятся решения задачи о самом дешевом рационе, если заменить в системе (2)

- $$\left. \begin{array}{l} \text{а) } c_1 \text{ на } c_1 + \delta, \\ \text{б) } c_2 \text{ на } c_2 + \delta, \\ \text{в) } c_n \text{ на } c_n + \delta; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta - \text{положительное, но} \\ \text{очень маленькое число?} \end{array}$$

*) Ответы к этим упражнениям будут помещены в следующем номере.



КВАРЦ ВОЛОСАТЫЙ

В природе издавна известен камень, называвшийся в России «кварц волосатый». Это прозрачный кристалл кварца, пронизанный блестящими золотыми нитями (см. рисунок на обложке).

Планий назвал эти нити «Волосами Венеры», а на востоке их называли «Волосами Магомета» и камень считали священным. В настоящее время эти «волосы», или, как их теперь называют, нитевидные кристаллы, выращиваются в лабораторных условиях. Исследования с помощью электронного микроскопа показали, что «Волосы Венеры» не что иное, как очень тонкие и длинные кристаллы окисла титана (TiO_2 — рубин), представляющие собой трубки прямоугольного сечения с толщиной стенок 1—2 мк (см. фотографию).

Нитевидные кристаллы обладают целым рядом очень интересных свойств, одно из которых — высокая прочность — дает возможность создавать на их основе новые, так называемые композиционные материалы.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Р. Зильберман

В этой статье рассказывается о методе, позволяющем упрощать слож-

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из сопротивлений, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене, и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Следовательно, если мы хотим под- считать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой экви-

валентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

С подобными заменами мы уже встречались.

Пусть, например, в схеме два сопротивления r_1 и r_2 включены последовательно, их мы можем заменить одним, равным по величине сумме $r_1 + r_2$. Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

Это простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода — «звезда» (рис. 1, а) и «треугольник» (рис. 1, б).

Много непривычные обозначения (рис. 1, б) очень удобны, индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление R_{13} включено между точками 1 и 3 и т. д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между r и R , чтобы сопротивления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезды» (рис. 1, а) сопро-

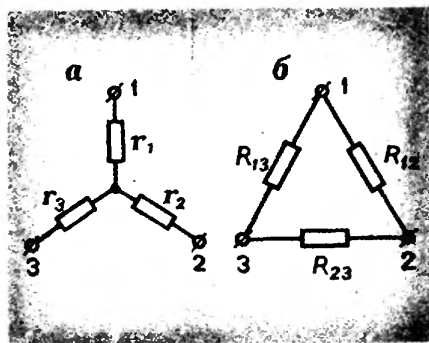


Рис. 1.

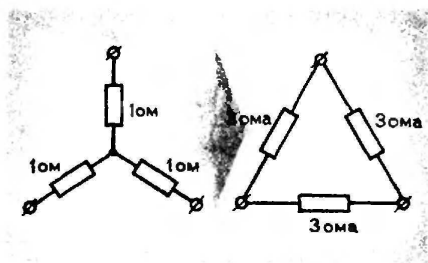


Рис. 2.

тивление между точками 1 и 2 равно $r_1 + r_2$, а в схеме «треугольника» (рис. 1, б) оно равно

$$\frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Следовательно, для того чтобы сопротивление между точками 1 и 2 были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1)$$

Аналогично для точек 2 и 3:

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (2)$$

и для точек 1 и 3:

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (3)$$

Эта система уравнений легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= \\ &= \frac{R_{12}R_{13} + R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вычтя теперь из уравнения (4) уравнение (2), получим

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Аналогично найдем, что

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \quad \text{и}$$

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

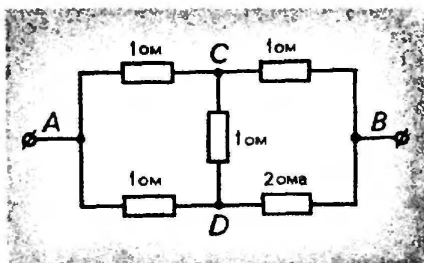


Рис. 3.

Эти результаты легко запомнить: знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева: $r_1 \rightarrow R_{12}R_{13}$, $r_2 \rightarrow R_{12}R_{23}$, $r_3 \rightarrow R_{13}R_{23}$.

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3},$$

$$R_{13} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2},$$

$$R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить — числитель всюду один и тот же, а в знаменателе как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Так, например, звезду с сопротивлениями в 1 ом (рис. 2) можно заменить треугольником с сопротивлениями в 3 ома.

Решим теперь задачу. Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рисунке 3.

Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» не уравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи уравнений Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих уравнений очень громоздкие — в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим

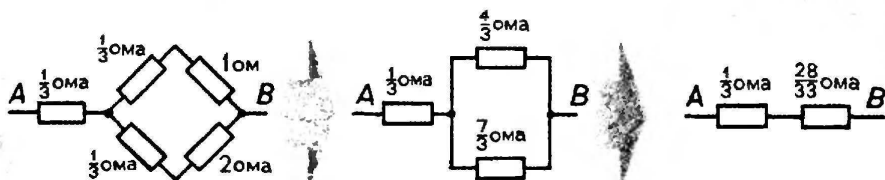


Рис. 4.

«треугольник» ACD «звездой», как показано на рисунке 4.

Теперь ясно, что сопротивление между точками A и B будет равно

$$\frac{1}{3} + \frac{28}{33} = \frac{13}{11} \text{ ома.}$$

Мы заменяли «треугольник» ACD «звездой», но можно было решать задачу иначе — заменяя «звезду» ADB «треугольником».

Пусть теперь к точкам A и B подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и с э. д. с. $E=1$ в. Нужно найти ток через участок CB .

Преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление CB . Подойдет то преобразование, которое мы делали раньше (рис. 4).

Используя то, что $R_{AB} = \frac{13}{11}$ ома, получим $I = \frac{E}{R_{AB}} = \frac{11}{13}$ а. После разветвления токи поделятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{7}{4}.$$

При этом $I_1 + I_2 = I$. (I — ток до разветвления, I_1 — ток в верхней ветви, I_2 — ток в нижней ветви).

Отсюда

$$I_1 = \frac{7}{13} \text{ а}$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок CD . Для этого пришлось бы еще найти ток,

идущий через участок AC , а затем вычесть из него найденный уже ток, идущий через участок CB .

Можно еще немного усложнить задачу — учесть внутреннее сопротивление батареи. Тогда полный ток

$I = \frac{E}{r + R_{AB}}$, а остальные токи найдутся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: при каком соотношении между величинами сопротивлений r и R сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рисунке 5, максимально в крайнем положении движка потенциометра?

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник» ACD «звездой» (рис. 6).

Очевидно, что сопротивление r не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления: $5r + R_1$ и $7r + R_2$, где R_1 и R_2 — сопротивления соответственно верхней и нижней частей по-

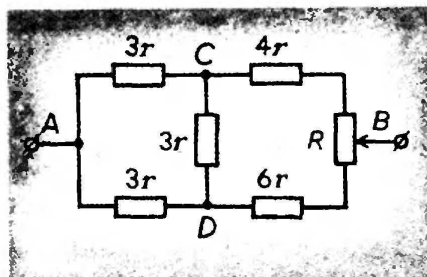


Рис. 5.