И.Т. Бородуля

Тригонометрические уравнения и неравенства

Книга для учителей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И.Т. Бородуля

И11 Тригонометрические уравнения и неравенства: Книга для учителей / И.Т. Бородуля – М.: Книга по Требованию, 2021. – 240 с.

ISBN 978-5-458-30089-6

Книга представляет собой сборник задач, составленный на основ многолетнего опыта работы автора в школе. В начале каждой главы или параграфа даётся небольшой теоретический материал, рассматриваются различные способы решения основных видов задач. Далее предлагается система упражнений, расположенных в порядке нарастания трудности. Вторую часть книги составляют ответы, указания или решения задач.Обширный набор упражнений и задач даёт возможность учителю составлять индивидуальные задания для учащихся с учётом их возможностей. Предполагается, что упражнения могут быть использованы для обобщения и повторения материала на завершающей стадии изучения той или иной части раздела, на факультативных занятиях и при подготовке к экзаменам.

ISBN 978-5-458-30089-6

4. $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}}=-1$. **5.** $\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}}=0$. **6.** $\sin(3-2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\sin 2x=\frac{\pi}{4}$. **8.** $\sin x=\frac{\pi}{3}$. **9.** $\sin x=\sqrt{1{,}01}$.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ВИДА $\cos x=a$

Уравнение $\cos x=a$ может иметь решение только при $|a|\leqslant 1$. Известно, что решение данного уравнения находят по обобщенной формуле: $x=\pm\arccos a+2n\pi$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $0\leqslant\arccos a\leqslant\pi$. Полезно знать, что $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$

Примеры. Решите уравнения.

а) $\cos\frac{5}{6}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\frac{5}{6}x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2n\pi$, $\frac{5}{6}x=\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12}{5}n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12}{5}n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

б) $\cos(2-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. $\cos(3x-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $3x-2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2n\pi$, $3x-2=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $x=\frac{2}{3}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{2}{3}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

в) $\cos\pi\sqrt{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\pi\sqrt{x}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2n\pi$, $\pi\sqrt{x}=\pm\frac{5}{6}\pi+2n\pi$, $\sqrt{x}=\pm\frac{5}{6}+2n$. 1) $\sqrt{x}=\frac{5}{6}+2n$, $n\in\mathbf{N}_0$, где $N_0=0, 1, 2, \ldots$, $x=\left(\frac{5}{6}+2n\right)^2$; 2) $\sqrt{x}=-\frac{5}{6}+2k$, $k\in\mathbf{N}$, $x=\left(-\frac{5}{6}+2k\right)^2$. Ответ: $x=\left(\frac{5}{6}+2n\right)^2$, $\left(-\frac{5}{6}+2k\right)^2$, $n\in\mathbf{N}_0$, $k\in\mathbf{N}$.

г) $\cos(1-2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. $\cos(2x-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x-1=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2n\pi$, $2x-1=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2n\pi$, $2x=1\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2n\pi$, $2x=1\pm\frac{3}{4}\pi+2n\pi$, $x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{8}\pi+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{8}\pi+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Частные случаи.

1. Если $\cos x=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ или $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$.

2. Если $\cos x=-1$, то $x=\pi+2n\pi$ или $x=(2n+1)\pi$, $n\in \mathbf{Z}$.

Решите уравнения.

1. $\cos 2x=-\frac{1}{2}$. **2.** $\cos \frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$. **3.** $\cos \frac{2\pi}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\cos \frac{2\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\cos\sqrt{\frac{\pi}{x}}=0$.

7. $\cos(2-3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\cos x=\frac{\pi}{4}$. **9.** $\cos\frac{2\pi x}{3}=0$.

10. $\cos 3x=\sqrt{1,1}$.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ВИДА $\operatorname{tg} x=a$, ГДЕ $a\in \mathbf{R}$

Известно, что решение данного уравнения находят по обобщенной формуле: $x=\operatorname{arctg} a+n\pi$, где $n\in \mathbf{Z}$. Полезно помнить, что $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$.

Примеры.

Решите уравнения.

а) $\operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}$.

Решение. $2x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+n\pi$, $2x=\frac{\pi}{3}+n\pi$, $2x=(3n+1)\frac{\pi}{3}$, $x=(3n+1)\frac{\pi}{6}$, $n\in \mathbf{Z}$. Ответ: $x=(3n+1)\frac{\pi}{6}$, $n\in \mathbf{Z}$.

б) $\operatorname{tg}\frac{2}{3x}=-1$.

Решение. $\frac{2}{3x}=\operatorname{arctg}(-1)+n\pi$, $\frac{2}{3x}=-\operatorname{arctg} 1+n\pi$, $\frac{2}{3x}=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $\frac{2}{3x}=(4n-1)\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{x}=(4n-1)\frac{3\pi}{8}$, $x=\frac{8}{(4n-1)3\pi}$, $n\in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{8}{(4n-1)3\pi}$, $n\in \mathbf{Z}$.

Решите уравнения.

1. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$. **2.** $\operatorname{tg} 3x=-\sqrt{3}$. **3.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{x}}=1$. **6.** $\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\pi}{x}}=-1$.

7. $\operatorname{tg}(1-x)=-2$. **8.** $\operatorname{tg}(2-3x)=0$. **9.** $\operatorname{tg} x=0,(6)$.

10. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ВИДА $\operatorname{ctg} x=a,\ a\in R$

Известно, что решение данного уравнения находят по формуле $x=\operatorname{arcctg} a+n\pi$, (5), где $n\in Z$ и $0<\operatorname{arcctg} a<\pi$.

Полезно помнить, что $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$

Примеры.

Решите уравнения.

а) $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x=5$.

Решение. $\frac{3}{2}x=\operatorname{arcctg} 5+n\pi$, $x=\frac{2}{3}\operatorname{arcctg} 5+\frac{2}{3}n\pi$, $n\in Z$.

Ответ: $\frac{2}{3}\operatorname{arcctg} 5+\frac{2}{3}n\pi$, $n\in Z$.

б) $\operatorname{ctg} 3x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. $3x=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+n\pi$, $3x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+n\pi$, $3x=\pi-\frac{\pi}{3}+n\pi$, $3x=\frac{2}{3}\pi+n\pi$, $3x=(3n+2)\frac{\pi}{3}$, $x=(3n+2)\frac{\pi}{9}$, $n\in Z$. Ответ: $(3n+2)\frac{\pi}{9}$, $n\in Z$.

Решите уравнения.

1. $\operatorname{ctg} 3x=\sqrt{3}$.
2. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.
3. $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. $\operatorname{ctg}(x-\pi)=-1$.
6. $\operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=-1$.
7. $\operatorname{ctg} 2x=-0,(3)$.
8. $\operatorname{ctg}(3-4x)=0$.
9. $\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.
10. $\operatorname{ctg} x=\pi$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ, СВОДИМЫЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Тригонометрические уравнения $a\sin^2 x+b\sin x+c=0$, $a\cos^3 x+b\cos x+c=0$; $a\operatorname{tg}^4 3x+b\operatorname{tg}^2 3x+c=0$, $a\operatorname{ctg}^2 2x+b\operatorname{ctg} 2x+c=0$ уже сведены к алгебраическим. Действительно, положив в них соответственно $\sin x=y$, $\cos x=z$, $\operatorname{tg} 3x=t$, $\operatorname{ctg} 2x=u$, получим алгебраические уравнения: $ay^2+by+c=0$, $az^3+bz+c=0$, $at^4+bt^2+c=0$ и $au^2+bu+c=0$. Решив каждое из них, найдем $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{ctg} 2x$.

Уравнения $a\sin^2 x+b\cos x+c=0$, $a\cos^2 x+b\sin x+c=0$, $a\operatorname{tg} x+b\operatorname{ctg} x=0$ не являются по виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим: $a\cos^2 x-b\cos x-(a+c)=0$, $a\sin^2 x-b\sin x-(a+c)=0$ и $a\operatorname{tg} x+\frac{b}{\operatorname{tg} x}=0$.

Примеры.

Решите уравнения.

а) $2\sin^2 x-7\cos x-5=0$.

Решение $2(1-\cos^2 x)-7\cos x-5=0$, $2\cos^2 x+7\cos x+3=0$, $\cos x=y$, $2y^2+7y+3=0$, $y_1=-3$, $y_2=-\frac{1}{2}$. 1) $\cos x=-3<-1$, $x=\varnothing$; 2) $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\frac{2}{3}\pi+$ $+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) $\cos 2x+3\sin x=2$.

Решение. $1-2\sin^2 x+3\sin x=2$, $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, $\sin x=y$, $2y^2-3y+1=0$, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=1$. 1) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\times$ $\times\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, n, $k\in\mathbf{Z}$.

в) $2\cos^2 3x+\sin 3x-1=0$.

Решение. $2(1-\sin^2 3x)+\sin 3x-1=0$, $2\sin^2 3x-\sin 3x-1=0$, $\sin 3x=y$, $2y^2-y-1=0$, $y_{1,2}=\frac{1\pm3}{4}$. 1) $\sin 3x=1$, $3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $3x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x=(4k+1)\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$; 2) $\sin 3x=-\frac{1}{2}$, $x=$ $=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+n\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=(4k+1)\frac{\pi}{6}$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+$ $+n\frac{\pi}{3}$, k, $n\in\mathbf{Z}$.

При решении уравнений этого параграфа необходимо знать формулы:

1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; 5) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

7) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$; 8) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$;

9) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 10) $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

11) $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 12) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

13) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, или $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, или $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$; 14) Формулы приведения;
15) Формулы из § 1—4.

Решите уравнения.

1. $4\sin^2 x+\cos x-3\frac{1}{2}=0$.
2. $2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x-3=0$.
3. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.
4. $\cos 2x-5\sin x-3=0$.
5. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.
6. $2\operatorname{tg}^4 3x-3\operatorname{tg}^2 3x+1=0$.
7. $25\sin^2 x+100\cos x=89$.
8. $\cos 2x+3\sin x=2$.

9. $\cos^4 2x+6\cos^2 2x=1\frac{9}{16}$.

10. $2\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x=3$.

11. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25$.

12. $\cos^2 x+\sin^4 x=1$.

13. $5\sin\frac{x}{6}-\cos\frac{x}{3}+1=-2$.

14. $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x=3$.

15. $2\sin^2 x-7\cos x-5=0$.

16. $2\cos^2 3x+\sin 3x+1=0$.

17. $1+2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x+$ $+\cos 2x=0$.

18. $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$.

19. $2\cos 2x-4\cos x=1$.

20. $4-5\cos x-2\sin^2 x=0$.

21. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$.

22. $8\sin x+5=2\cos 2x$.

23. $\cos 2x=2\sin x-\frac{1}{2}$.

24. $3\cos^2 2x+7\sin 2x-3=0$.

25. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

26. $\sin 3x-3\cos 6x=2$.

27. $\frac{12}{\cos^2 x}-25\operatorname{tg} x=0$.

28. $\cos^2 x+3\sin^2 x=2$.

29. $2(\sin^2 x-\cos^2 x)=-1$.

30. $\operatorname{tg}^2 x-\frac{5}{\cos x}+7=0$.

31. $\cos 2x=2\sin^2 x$.

32. $\sin^2 x-\cos^2 x+2\sin x+$ $+1=0$.

33. $2\cos^2 x-\sin x-1=0$, $8\leqslant x\leqslant 40$.

34. $\cos 2x=1-3\cos x$, $1\leqslant x\leqslant 50$.

35. $\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{16}{11}$.

36. $6\sin^2 x+5\cos x-7=0$.

37. $29-36\sin^2(x-2)-$ $-36\cos(x-2)=0$.

38. $\cos 2x+767\sin x+383=0$.

39. $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

40. $(\cos 2x-\sin 2x)^2=\sin 4x$.

41. $\frac{2}{3}\cos^2 x+\sin x=1$.

42. $\sin^2 x-\cos 2x+2\sin x=0$.

43. $1+\sin 2x=24\sin^2 x-$ $-24\sin^4 x$.

44. $3\sin^2 2x+\sin 2x=(\sin x-$ $-\cos x)^2$.

45. $3\cos x+5\sin\frac{x}{2}+1=0$.

46. $2\sin^2 x+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=$ $=2$.

47. $\operatorname{tg}^2 x-2\sin^2 x=0$ на $\left(-\frac{3}{4}\pi;\ 2\pi\right)$.

48. $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

49. $2\cos x-\cos 2x-\cos^2 2x=0$.

50. $\sin 5x=\frac{2}{3}\cos^2 5x$.

51. $8\sin^2 2x-2\cos 2x=5$.

52. $\cos\frac{3\pi+x}{3}\cdot\cos\frac{9\pi+2x}{6}=-\frac{5}{48}\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 1{,}5)$.

53. $\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 1-3\cos x+\cos 2x=\frac{\cos(\pi-x)}{\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

54. $\sin x-\cos x-2(1+\cos 2x)\sin x=4\sin^3(7\pi-x)$.

55. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

56. $\operatorname{tg}^2 x-374\operatorname{tg}x-374=2\sin 70°\cos 20°-\sin 50°$.

57. $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{ctg}x}{2(1+\operatorname{ctg}x)}$.

58. $\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x$.

59. $\operatorname{tg}x-\sin^2 5x=\cos^2 5x$. $0\leqslant x\leqslant\pi$;

60. $\sin^4 x-\cos^4 x=\cos x$.

61. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

62. $1+\cos x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

63. $2(x-6)\cos x=x-6$.

64. $\cos 4x+\frac{10\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x+1}=3$, $-\frac{3}{4}\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}$.

65. $(\operatorname{tg}^2 x-1)^{-1}=1+\cos 2x$.

66. $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$, $\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$.

67. $4\sin\frac{x}{2}+6\sin^2\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)^2+3$, $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

68. $(\sin 3x+\cos 3x)^2=1+\cos 2x$.

69. $2\sin^2 x+2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x-2\cos x+\sqrt{2}=0$.

70. $\sqrt{4\sin^2 210°}+\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}=10$.

71. $\operatorname{tg}^4\left(2x-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^3\frac{21\pi}{4}=16\sin^2\frac{\pi}{4}$.

72. $\sqrt{\sin^2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{1}{2}$.

73. $2\cos^2(x+270°)-7\cos(x+90°)=4$.

74. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}=\arccos 1$.

75. $\sqrt[4]{8}\cos x-1=(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}$.

76. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$.

77. $2\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi-6\sin x\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}$.

78. $\sin x+\cos x=\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi+\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

79. $2\cos x+\operatorname{tg}\frac{9}{4}\pi=\frac{1}{\cos x}$.

80. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=\frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right)$.

81. $\frac{1}{\cos x}-3\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$.

82. $\frac{1}{\sin 2x}-\operatorname{ctg} 2x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{ctg} x-1)$.

83. $\sqrt{1-\cos x}=\sin x,\ 2\pi\leqslant x\leqslant 2\frac{5}{6}\pi$.

84. $(1-\sin x)\operatorname{ctg} x=\cos x$.

85. $4^{3+2\cos 2x}-7\cdot 4^{1+\cos 2x}-4^{\frac{1}{2}}=0$.

86. $\sqrt{\sin x}=\sin x$.

87. $\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2$.

88. $\sqrt{1-\cos 2x}=-\sqrt{2}\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi$.

89. $\sqrt{1-\cos x}=-\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$.

90. $\sqrt{1-\cos x}=-\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

91. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi$.

92. $\sqrt{1-\sin x}=-\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

93. $4\operatorname{arctg}(x^2-3x-3)-\pi=0$.

94. $\sin(\arcsin(x^2-6x+8{,}5))=\sin\frac{\pi}{6}$.

95. $(\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x):\sin^4 x=0$.

96. $\sqrt{3+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+3\operatorname{tg} x}{2}$.

97. $3+2\sin x-3\cos 2x=0$.

98. $2\sin x+3\cos 2x-3=0$.

99. $2\cos 2x-3\cos x+2=0$.

100. $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

101. $\sqrt{3}-\cos(\pi-2x)-\sin\frac{2\pi+8x}{4}=\sin 7x\cdot\operatorname{ctg}\frac{5}{6}\pi$.

102. $1+\cos(\pi+2x)-\cos\frac{3\pi-2x}{2}=\cos\frac{9}{2}\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$.

103. $\cos 2x+4\sin^3 x=1$.

104. $1-2\sin^5 3x=\cos 6x$.

105. $1-2\sqrt{2}\cos^3 3x+\cos 6x=0$.

106. $(1-\cos x):\sin\frac{x}{2}=2$.

107. $\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\operatorname{ctg} x$.

108. $\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}=0$.

109. $\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x}=0$.

110. $(\sqrt{3}\sin^2 x-\cos x):\sin x=0$.

111. $\sqrt{3-\sqrt{3}\cos x}+\sqrt{3}\sin x=0$.

112. $\sqrt{1-\sqrt{2}\sin x}+2\cos x=0$.

113. $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$.

114. $\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)=1+2\sin x$.

115. $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$.

116. $2\cos^2 3x+\sin 3x+1=0$.

117. $\cos 4x+6=7\cos 2x$.

118. $7\sin x=3\cos 2x-3$.

119. $7\sin x=3\cos 2x$.

120. $5(1+\cos x)=3+\cos^4 x-\sin^4 x$.

121. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{106}{9}$.

122. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$.

123. $\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1=\sqrt{3}$.

124. $4\cos 4x+6\sin^2 2x+5\cos 2x=0$.

125. $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$, $\frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}\pi$.

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения $a\sin x+b\cos x=0$; $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$; $a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0$ и т. д. называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень. Делением на $\cos^k x$, где k — степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$.

Рассмотрим уравнение $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (1). Разделим уравнение (1) на $\cos^2 x$, получим: $a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0$ (2). При $a\neq 0$ (1) и (2) равносильны, так как $\cos x\neq 0$. Если же $\cos x=0$, то из уравнения (1) видно, что и $\sin x=0$, что невозможно, так как теряет смысл тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ($\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются). Из уравнения (2) определяем значения $\operatorname{tg} x$, а затем находим соответствующие значения x. Очевидно, что при $b^2-4ac<0$ значения $\operatorname{tg} x$ не существуют на множестве R, а потому уравнение (2), а значит, и уравнение (1) решений не имеют.

Уравнение $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$ (3) в таком виде не является однородным, но его можно привести к однородному, умножив его правую часть на $\sin^2 x+\cos^2 x=1$: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d(\sin^2 x+\cos^2 x)$; т. е. $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d\sin^2 x+d\cos^2 x$ или $(a-d)\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+(c-d)=0$ (4). При $a\neq d$ уравнения (3) и (4) равносильны. Из уравнения (4) находим $\operatorname{tg} x$, а затем соответствующие значения x.

П р и м е р ы. Решите уравнения.

а) $2\sin x-3\cos x=0$, $\cos x\neq 0$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на $\cos x$: $2\operatorname{tg} x-3=0$ и $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$, $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. О т в е т: $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) $\sin 2x+\cos 2x=0$, $\cos 2x\neq 0$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на $\cos 2x$: $\operatorname{tg} 2x+1=0$, $\operatorname{tg} 2x=-1$, $2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $2x=(4k-1)\frac{\pi}{4}$, $x=(4k-1)\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$. О т в е т: $x=(4k-1)\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$.

в) $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$.

Решение. В условии не указано, что $\cos x\neq 0$, а потому делить уравнение на $\cos^2 x$ нельзя. Но можно утверждать, что $\sin x\neq 0$, так как в противном случае $\cos x=0$, что невозможно одновременно. Разделим обе части уравнения на $\sin^2 x$, получим: $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x=0$; $\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x+1)=0$. 1) $\operatorname{ctg} x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ или 2) $\operatorname{ctg} x=-1$, $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$, k, $n\in \mathbf{Z}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$, n, $k\in\mathbf{Z}$.

г) $4\sin^2 x+2\sin x\cos x=3$.

Решение. Умножим правую часть уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$. Получим: $4\sin^2 x+2\sin x\cos x=3\sin^2 x+3\cos^2 x$, $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$. Очевидно, что $\cos x\neq 0$. Разделим на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0$, $\operatorname{tg} x=-3$ и $\operatorname{tg} x=1$, $x=-\operatorname{arctg} 3+k\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, k, $n\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=-\operatorname{arctg}3+k\pi$, $\frac{\pi}{4}+n\pi$, k, $n\in\mathbf{Z}$.

Решите уравнения.

1. $3\cos^2 x-5\sin^2 x-\sin 2x=0$.
2. $6\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin 2x-5\cos^2 x=2$.
3. $\sin x-\cos x=0$.
4. $\sin x+\cos x=0$.
5. $5\sin x+6\cos x=0$.
6. $4\sin^2 x+\sin 2x=3$.
7. $\sin^2 x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cos x=\frac{1}{2}$.
8. $6\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos^2 x=2$.
9. $\sin^2 x-\sin 2x=3\cos^2 x$.
10. $2\sin 4x-3\sin^2 2x=1$.
11. $\cos^2 x+3\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=1$.
12. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos 2x}$.
13. $\sin 4x-3\cos 4x=8\sin^2 2x$.
14. $3\sin^2 x-2\sin 2x+5\cos^2 x=2$.
15. $2\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin x\cos x=3$.
16. $\cos^2 x-3\sin x\cos x+2\sin^2 x=2$.
17. $2\sin^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=4\arccos 1$.'
18. $\sin^2 x+\sin x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\cos 2x=1$.
19. $13\sin^2 x+84\sin 2x-13\cos^2 x+1=\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$.
20. $\sin^2 x-79\sin 2x+153\cos^2 x+2\sin 5x\cos 3x=2\sin 3x\cos 5x$.
21. $\sin x+\cos x-1=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\cos x-1)$.
22. $\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x+3$.
23. $(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\sin 2x)=1$.
24. $2\cos x=\sqrt{2+\sin 2x}$.
25. $3\cos^2 x=4\sin x\cos x-\sin^2 x$.

26. $\sin^2(x+180^\circ)+3\cos^2(x+270^\circ)=1,\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi.$

27. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x.$

28. $2\sin^2 x-4\sin x\cos x+1=0.$

29. $4\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x+3\sin^2 x=3.$

30. $\cos 2x-3\sin 2x+3=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi.$

31. $\sin 2x=\cos^4 x-\sin^4 x.$

32. $\sin^2 x-\cos 2x=2-2\sin 2x.$

33. $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=1.$

34. $1+\frac{3}{2}\sin 2x+\cos^2 x=0.$

35. $(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+1=0.$

36. $4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+3\sin x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+5\sin^2 x-\frac{18}{\pi}\times$
$\times\arcsin\frac{1}{2}=0.$

37. $4\sin 2x+10\cos^2 x+\cos 2x=\frac{2}{\pi}\arcsin 1.$

38. $\sin 2(x-\pi)-\cos 3\left(\pi+\frac{2}{3}x\right)+\operatorname{tg} 2x=\frac{2\cos 2x}{1+\cos 4x}.$

39. $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x).$

40. $11\sin^2 7x-\frac{3}{2}\sin 14x+5\cos^2 7x=a-6.$ Указать, при каких целых значениях a уравнение может иметь решения.

41. $\sin^2 x+\cos 2x=2\cos^2 x+\sin 2x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$

42. $\sin 2x+\cos 2x=\frac{1}{\sin 2x}.$ 43. $\frac{1}{\cos 3x}-6\cos 3x=4\sin 3x.$

44. $4\cos x+2\sin x=-4.$ 45. $4\sin 2x-3\cos 2x=3.$

46. $6\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x-\cos^2 x=3.$

47. $2\sin^2 x+14\cos^2 x-7\sin x\cos x=2.$

48. $2\cos(x-270^\circ)-5\cos(x+180^\circ)=0.$

49. $4\sin^2 x-4\sin 2x+10\cos^2 x=3.$

50. $5\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=4.$

51. $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+5\cos^2 x=2.$

52. $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$

53. $5\sin^2 x+3\cos^2 x=4\sin 2x.$

54. $\cos^2 x+\cos 2x=6(\cos^2 x-\sin^2 x).$

55. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x.$

56. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}.$

57. $\sin(x-90^\circ)+\sin(x-180^\circ)=0{,}5.$