З.А. Скопец, В.А. Жаров

Задачи и теоремы по геометрии

Планиметрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
З-11

З.А. Скопец
З-11 Задачи и теоремы по геометрии: Планиметрия / З.А. Скопец, В.А. Жаров – М.: Книга по Требованию, 2013. – 164 с.

ISBN 978-5-458-29982-4

Решение задач составляет существенную сторону процесса обучения математике: уровень математической подготовки во многом определяется глубиной навыков в решении задач.Это обстоятельство побуждает с особым вниманием отнестись к организации в стенах педагогического института тщательно продуманных занятий, имеющих своей целью подготовить будущего педагога не только теоретической области геометрии, но и научить его свободно применять приобретённые знания к решению нестандартных задач средней и повышенной трудности.Предлагаемый сборник геометрических задач по планиметрии предназначен главным образом для студентов математической специальности педагогических институтов и преподавателей, ведущих занятия по специальному курсу элементарной геометрии, а также для учителей средней школы. Задачник может быть использован на занятиях и по другим дисциплинам геометрического цикла (аналитическая геометрия, проективная геометрия, основания геометрии).

ISBN 978-5-458-29982-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

I. УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ В СБОРНИКЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

(см. чертежи I, II и III)

$a, b, c, d \ldots$ — стороны многоугольника;

$A, B, C, D \ldots$ — вершины или углы при этих вершинах многоугольника;

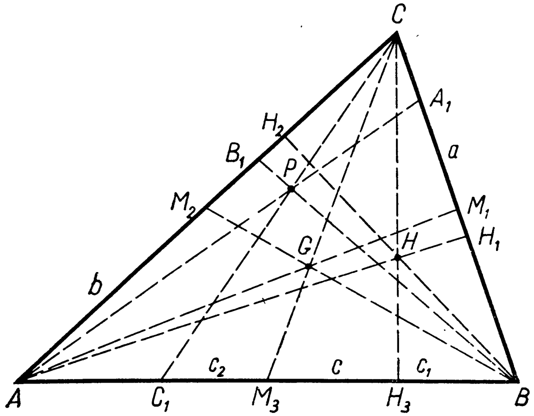
h_i $(i=1, 2, 3)$ — высоты, опущенные соответственно на стороны BC, CA, AB треугольника ABC;

h — высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу c;

H_i — основания высот треугольника;

m_i — медианы, проведенные соответственно к сторонам a, b и c треугольника ABC;

M_i — середины сторон треугольника;



Черт. I

AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC; точка A_1 принадлежит стороне BC, точка B_1 — стороне AC, точка C_1 — стороне AB;

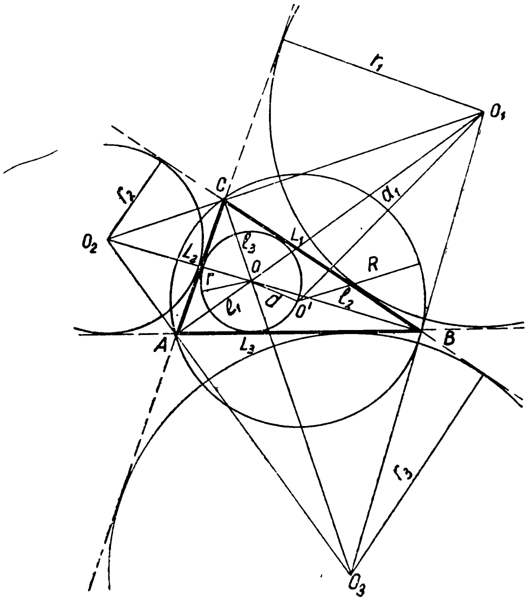
l_i — биссектрисы внутренних углов треугольника;

L_i — основания биссектрис треугольника;

c_1 и c_2 — проекции сторон b и a треугольника ABC на сторону AB;

H — точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника;

G — точка пересечения медиан (центроид, центр тяжести) треугольника;



Черт. II

O и R — центр и радиус описанной около треугольника (четырехугольника) окружности;

O' — центр вписанной в треугольник окружности (инцентр треугольника);

r — радиус вписанной в треугольник окружности;

O_i — центры вневписанных окружностей (эксцентры треугольника);

r_i — радиусы вневписанных окружностей;

d — расстояние между инцентром и центром описанной окружности;

d_i — расстояние между инцентром O' и эксцентром O_i;

$2p$ — периметр треугольника;

e и f — диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$;

μ_1 и μ_2 — средние линии четырехугольника $ABCD$ ($\mu_1 = M_1M_3$, $\mu_2 = M_2M_4$);

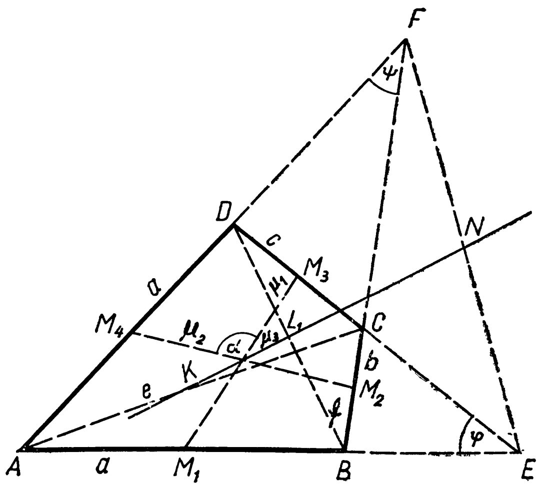
μ_3 — расстояние между серединами K и L диагоналей четырехугольника $ABCD$;

M — центр параллелограмма;

E, F — точки пересечения противоположных сторон AB и CD, BC и AD четырехугольника $ABCD$;

φ и ψ — углы между противоположными сторонами четырехугольника ($\angle AED = \varphi$, $\angle AFB = \psi$);

α — угол между диагоналями четырехугольника;



Черт. III.

(A, B, C) — окружность, проведенная через точки A, B и C;

(O, r) — окружность с центром в точке O и радиусом, равным r;

S — площадь геометрической фигуры;

(ABC), $(ABCD)$ — площадь треугольника ABC и площадь четырехугольника $ABCD$.

Малые буквы греческого алфавита

α — альфа	ι — иота	ρ — ро
β — бета	$\varkappa$ — каппа	σ — сигма
γ — гамма	λ — ламбда	τ — тау
δ — дельта	μ — мю (ми)	υ — ипсилон
ε — эпсилон	ν — ню (ни)	φ — фи
ζ — дзета	ξ — кси	χ — хи
η — эта	o — омикрон	ψ — пси
ϑ — тэта	π — пи	ω — омега

II. Теоремы, геометрические места.

Аффинные теоремы

1. Отрезки, соединяющие соответственно середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

2. Отрезки, соединяющие вершины четырехугольника с соответствующими центроидами треугольников, образованных тремя другими вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины четырехугольника.

3. Если какая-либо прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны BC, CA, AB или их продолжения соответственно в точках L, M, N, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1. \tag{1}$$

Если точки L, M, N, не совпадающие с вершинами треугольника ABC, но лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях, таковы, что выполняется условие (1), то эти три точки лежат на одной прямой (прямая и обратная теоремы Менелая).

4. Если точки A_1, B_1, C_1, взятые соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на продолжениях сторон), таковы, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1. \tag{2}$$

Если точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или на продолжениях этих сторон, причем выполняется условие (2), то три прямые AA_1, BB_1, CC_1 (чевианы) пересекаются в одной точке или параллельны между собой (прямая и обратная теоремы Чевы).

5. Если чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке P, то имеет место равенство (теорема Ван-Обеля):

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} + \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}}.$$

6. Если чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке P, то имеют место равенства:

1) $$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{AA_1}} + \frac{\overline{PB_1}}{\overline{BB_1}} + \frac{\overline{PC_1}}{\overline{CC_1}} = 1;$$

2) $$\frac{\overline{AP}}{\overline{AA_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BB_1}} + \frac{\overline{PC}}{\overline{CC_1}} = 2.$$

7. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника, проходит через середину отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон (прямая Гаусса).

8. Если на одной прямой даны точки A, B, C, а на другой прямой — точки A_1, B_1, C_1, причем прямая AB_1 параллельна прямой A_1B, а прямая BC_1 параллельна прямой B_1C, то прямая CA_1 параллельна прямой C_1A.

9. Если вершины двух треугольников соответствуют друг другу таким образом, что прямые, проходящие через соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны, то точки пересечения соответствующих сторон (если они существуют) лежат на одной прямой.

Если вершины двух треугольников соответствуют друг другу таким образом, что соответствующие стороны треугольников пересекаются в точках, расположенных на одной прямой, то прямые, проходящие через соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны (прямая и обратная теоремы Дезарга).

10. Если прямая пересекает пары противоположных сторон и пару диагоналей четырехугольника соответственно в парах точек A и A_1, B и B_1, C и C_1, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1.$$

11. Для того чтобы точка P, не принадлежащая сторонам треугольника ABC, и прямая p, не проходящая через его вершины, были инцидентными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} : \frac{\overline{CA_0}}{\overline{A_0B}}\right) + \left(\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} : \frac{\overline{CB_0}}{\overline{B_0A}}\right) = 1,$$

где A_0 и B_0 — точки пересечения прямой со сторонами CB и CA, а A_1 и B_1 — основания чевиан, проходящих через данную точку.

Метрические теоремы

12. Ортоцентр H, центроид G и центр O описанной около треугольника окружности расположены на одной прямой, причем $GH=2OG$ (прямая Эйлера).

13. Для всякого треугольника ABC справедливо следующее векторное равенство:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH},$$

где O — центр описанной окружности, а H — ортоцентр треугольника.

14. Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков высот, ограниченных вершинами треугольника и его ортоцентром, расположены на одной окружности (окружности девяти точек, или окружности Эйлера).

15. Окружность Эйлера касается вписанной и вневписанных окружностей треугольника, и ее центр расположен на прямой Эйлера и делит отрезок OH пополам.

16. Основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, расположены на одной прямой (прямой Симсона).

17. Для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений противоположных сторон четырехугольника была равна произведению его диагоналей (теорема Птолемея и обратная ей теорема).

18. Для того чтобы перпендикуляры к сторонам треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:

$$AC_1^2 - C_1B^2 + BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 = 0$$

(теорема Карно и обратная ей теорема).

19. Окружности, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, не проходящими через одну точку, пересекаются в одной точке.

20. Шесть центров подобия трех неравных попарно окружностей, не принадлежащих одному пучку, являются вершинами полного четырехсторонника.

21. Середины диагоналей описанного около окружности четырехугольника и центр этой окружности расположены на одной прямой.

22. Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника (если эти точки существуют) расположены на одной прямой (теорема Паскаля).

23. Прямые, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Брианшона).

24. Для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1, расположенные соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = -1$$

(теорема Менелая и ей обратная теорема в тригонометрической форме).

25. Для того чтобы три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC принадлежали одному пучку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1$$

(теорема Чевы и ей обратная теорема в тригонометрической форме).

26. Длина чевианы CC_1 треугольника ABC вычисляется по формуле:

$$CC_1^2 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} \cdot BC^2 + \frac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}} \cdot AC^2 - \frac{\overline{AC_1} \cdot \overline{C_1B}}{\overline{AB}^2} \cdot AB^2$$

(теорема Стюарта).

27. Четыре ортоцентра четырех треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, не проходящими через одну точку, расположены на одной прямой (прямая Обера).

28. Три отрезка, соединяющие произвольную точку плоскости с вершинами правильного треугольника, могут служить сторонами треугольника. Этот треугольник вырождается только для тех точек, которые расположены на окружности, описанной около равностороннего треугольника (теорема Помпею).

29. Из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, ортоцентрический треугольник (вершины которого совпадают с основаниями высот данного треугольника) имеет наименьший периметр.

30. Если больший угол треугольника меньше 120°, то наименьшую сумму расстояний до вершин треугольника имеет та точка плоскости, из которой стороны треугольника видны под равными углами (точка Торричелли). Если один из углов треугольника равен 120° или больше его, то точка плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна, совпадает с этой вершиной.

31. Если расстояния от точки, расположенной внутри треугольника, до его сторон пропорциональны сторонам, то сумма квадратов расстояний этой точки до сторон треугольника минимальна и равна

$$\frac{4\,(ABC)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

(точка Лемуана). Основания перпендикуляров, опущенных из точки Лемуана на стороны треугольника, являются вершинами треугольника, для которого точка Лемуана служит центроидом.

32. Среди всех отрезков секущих, расположенных внутри угла и проходящих через данную точку, та имеет наименьшую длину, для которой данная точка и основание перпендикуляра, опущенного из вершины угла на этот отрезок, симметричны относительно его середины (прямая, содержащая этот минимальный отрезок, называется прямой Филона).

33. Если даны такие две окружности, что одна из них служит описанной окружностью для какого-нибудь треугольника, а другая — вписанной или вневписанной окружностью для того же треугольника, то таких треугольников бесчисленное множество и каждая точка описанной окружности может служить вершиной такого треугольника.

34. Если около треугольника ABC описана окружность радиуса R и вписана окружность радиуса ρ, то расстояние d между центрами окружностей определяется по формуле:

$$d^2=R^2-2Rr$$

(формула Эйлера).

35. Если около треугольника ABC описана окружность радиуса R и вневписана окружность радиуса ρ, то расстояние между центрами этих окружностей определяется по формуле:

$$d^2=R^2+2R\rho.$$

36. Если известны три стороны четырехугольника и два угла, заключенные между их сторонами, то четвертая сторона может быть вычислена по формуле:

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos(\widehat{a,\ b})-2bc\cos(\widehat{b,c})-2ac\cos(\widehat{a,b}+\widehat{b,c})$$

(первая теорема косинусов для четырехугольника).

37. Стороны, диагонали и сумма двух противоположных углов четырехугольника связаны соотношением:

$$e^2f^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)$$

(вторая теорема косинусов для четырехугольника — теорема Бретшнейдера).

38. Расстояния от любой точки плоскости до вершин треугольника и до его центроида связаны соотношением:

$$3PG^2=PA^2+PB^2+PC^2-GA^2-GB^2-GC^2$$

(теорема Лейбница).

39. Расстояние между серединами диагоналей четырехугольника выражается через его стороны и диагонали по формуле:

$$KL^2=\mu_3^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)$$

(теорема Эйлера).

40. Если внутри треугольника ABC дана точка N такая, что

$\angle NBA=\angle NAC=\angle NCB$ или $\angle NAB=\angle NBC=\angle NCA$, то

$$\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$$

(угол $NAB\equiv\omega$ — угол Брокара).

41. Алгебраическая сумма расстояний от центра окружности, описанной около треугольника, до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей (теорема Карно).

42. Если расстояние от точки плоскости до центра окружности, описанной около треугольника, равно d, то площадь σ треугольника, вершины которого совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой точки на его стороны, выражается через радиус R окружности и через площадь S данного треугольника формулой:

$$d^2 = R^2\left(1 \pm \frac{4\sigma}{S}\right).$$

43. Если в окружность вписан правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ с нечетным числом сторон, то сумма расстояний от любой точки дуги A_1A_n до вершин с четными номерами равна сумме расстояний от этой же точки до вершин с нечетными номерами.

44. Прямая Гаусса (теорема 7) и прямая Обера (теорема 27) полного четырехсторонника взаимно перпендикулярны.

45. Если каждый из углов треугольника разделен двумя лучами на три равные части, то точки пересечения каждой пары лучей, образующих с одной стороной углы, равные по одной трети углов, прилегающих к соответствующей стороне треугольника, являются вершинами равностороннего треугольника (теорема Морлея).

Геометрические места точек

46. Геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных упорядоченных точек равно отношению двух неравных отрезков, есть окружность (окружность Аполлония).

47. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до конца отрезка постоянна, есть окружность с центром в середине отрезка (существование окружности зависит от постоянной).

48. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до трех точек есть величина постоянная, есть окружность с центром в центроиде треугольника, вершины которого совпадают с данными тремя точками (треугольник может быть вырожденным).

49. Геометрическое место точек M, для которых $MA^2 - MB^2 = k$ (A и B — данные точки, k — постоянная), есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.

50. Геометрическое место точек, расположенных внутри угла, для которых отношение расстояний до сторон этого угла постоянно, есть луч с началом в вершине угла (стороны угла упорядочены).

51. Геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно двух неконцентрических окружностей, есть прямая (радикальная ось данных окружностей), перпендикулярная к линии центров окружностей (степень точки M относительно окружности $(O; R)$ равна $OM^2 - R^2$).

III. ФОРМУЛЫ

Метрические соотношения в треугольнике

1. $|a^2 - b^2| = 2c \cdot M_3H_3;$

2. $a^2 - b^2 = (r_1 - r_2)(r + r_3);$

3. $l_1^2 = 4bc(b+c)^{-2} p(p-a);$

4. $l_1^2 = bc - AL_3 \cdot L_3B;$

5. $L_1L_2 = \frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2} [c(a+c)(b+c) - 2p(a-b)^2];$

6. $m_1^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4};$

7. $h_1^2 = 4a^{-2}p(p-a)(p-b)(p-c);$

8. $H_1H_2 = AB|\cos C|;$

9. $ab = 2Rh_3;\ a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr);$

10. $4R^2 = \frac{l_1^4(m_1^2 - h_1^2)}{h_1^2(l_1^2 - h_1^2)};$

11. $AH^2 = 4R^2 - a^2;$

12. $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2);\ O'H^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2;$

13. $AH = 2R|\cos A|;$

14. $r^2 = p^{-1}(p-a)(p-b)(p-c);$

15. $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3};$

16. $r_1^2 = p(p-a)^{-1}(p-b)(p-c);$

17. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3};$

18. $r_1 + r_2 + r_3 = r + 4R;$

19. $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2;$

20. $r_1r_2r_3 = pS;$

21. $rr_1r_2r_3 = S^2;$

22. $16S^2 = a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2);$

23. $S = pr;\quad S \geqslant \sqrt{27}\,r^2;$