Р. Курант, Д. Гильберт

Методы математической физики

Том 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р. Курант

Р11 Методы математической физики: Том 1 / Р. Курант, Д. Гильберт – М.: Книга по Требованию, 2013. – 540 с.

ISBN 978-5-458-25750-3

В первом томе (1933 г.) содержатся прекрасные образы применения алгебраических, геометрических и вариационных методов к разрешению фундаментальных проблем анализа. Второй том (1945 г.) содержит систематическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемую с точки зрения математической физики. Перевод с немецкого З. Либина, Б. Лившица, Ю. Рабиновича.

ISBN 978-5-458-25750-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

рые частью удовлетворяются в обычной геометрии. Базой для построения этих общих систем была теория множеств, рассматривающая как единое целое произвольную совокупность любых элементов. Работы Фреше (Fréchet) и Гаусдорфа (Hausdorff) положили начало теории так называемых абстрактных пространств, т. е. множеств произвольных элементов, между которыми установлены отношения, являющиеся обобщением наиболее основных соотношений между точками обычного пространства (предельный элемент, окрестность и т. п.). Чрезвычайно большую роль стали играть со времени Фреше так называемые функциональные пространства, т. е. абстрактные пространства, точками которых являются функции. Рассмотрим (гл. II, § 2), например, функциональное пространство R, элементом которого является произвольная непрерывная функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ или функция с интегрируемым квадратом; расстояние $\rho(f, \varphi)$ между двумя точками R: функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ устанавливается по аналогии с расстоянием в эвклидовом n-мерном пространстве:

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f-\varphi)^2 \, dx};$$

$f(x)$ является предельным элементом для последовательности $f_n(x)$, если $\rho(f, f_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f - f_n)^2 \, dx = 0$$

(сходимость в среднем). Мы можем определить в пространстве R также углы. Каждую функцию $f(x)$ можно рассматривать как конец вектора с началом в нулевой функции и концом в „точке" $f(x)$ длины:

$$[f] = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}.$$

Функции $f(x)$ можно относить, следовательно, вектор в пространстве R. Угол α между функциями-векторами $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяется по аналогии с n-мерной эвклидовой геометрией:

$$\cos \alpha = \frac{\int_a^b f \, \varphi \, dx}{[f] \; [\varphi]}.$$

Условия ортогональности „векторов" $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обычное условие ортогональности функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Таким образом становится понятной роль в анализе последовательностей взаимно ортогональных функций (тригонометрических, бесселевых, полиномов Лежандра и т. д.): они образуют системы взаимно ортогональных векторов в пространстве R. Их можно принять за оси координат, коэфициенты Фурье суть проекции функции-вектора на оси координат, и разложение в ряд Фурье — представление вектора через его проекции на ортогональную систему координат; теорема Парсеваля есть просто теорема Пифагора в пространстве R: квадрат длины вектора есть сумма квадратов его проекций на оси координат.

В настоящей книге широко применяются также вариационные методы. В классический период своего развития вариационное исчисление занимало несколько обособленное положение в анализе. Оно находило те диференциальные уравнения, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы реализовать экстремум некоторого функционала, и исследовало дополнительные условия, при которых решение этого уравнения в самом деле реализует максимум или минимум (гл. IV, § 3—7). Новую постановку задачи вариационного исчисления мы видим у Гильберта. Пусть задан функционал $I(f)$, и C есть нижняя граница значений этого функционала. Мы образуем „минимизирующую" последовательность функций $f_n(x)$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = C$. Построив минимизирующую последовательность, мы во многих задачах находим, путем предельного перехода, искомую функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, для которой $I(f) = C$. При этом, не решая диференциальных уравнений, которым должна удовлетворять $f(x)$, мы даем доказательство существования этой функции и, если последовательность $f_n(x)$ выбрана эффективно, — метод ее приближенного определения. В этих „прямых" методах вариационное исчисление обрело возможность решать свои задачи в тех случаях, когда диференциальные уравнения, к которым они сводились, оказывались не разрешимыми обычными методами. Вместе с тем при исследовании решения диференциального уравнения стараются часто представить его как условие экстремума некоторого функционала и применить таким образом к решению нашего уравнения аппарат прямых методов.

Курант и его школа далеко продвинули прямые методы вариационного исчисления, связав их с алгебраическими методами. Бегло касаясь этих вопросов в настоящей книге, автор обещал посвятить им значительное место во II томе.

Наиболее интересной частью книги является вариационная теория собственных значений диференциальных и отчасти интегральных уравнений, принадлежащая Куранту, развиваемая в VI главе книги. Как по обилию приложений, так и по простоте и изяществу эта теория является одним из лучших достижений современного анализа.

Кроме основного материала в конце каждой главы имеются дополнения, в которых вкратце затрагиваются отдельные интересные вопросы.

Столь оригинальная, богатая идеями и содержательная книга имеет все основания на внимание советского читателя-математика.

Л. Люстерник.

От переводчиков.

Перевод сделан со второго немецкого издания. Исправлены замеченные опечатки и неправильности в формулах. Кое-где для устранения недосмотров нам пришлось несколько отступить от оригинала (см., например, стр. 89, 309, 456, 491). В конце книги приложено несколько примечаний (к стр. 71, 89, 95, 105, 455, 456, 457, 470, 471, 491, 508), кроме того там же приведены доказательства интеграла Дирихле и теоремы Фейера, взятые из первого немецкого издания.

Оглавление.

(Цифры курсивом указывают страницы.)

Глава I.

Алгебра линейных преобразований и квадратичных форм.

Глава II.

Задача о разложении в ряд произвольных функций.

Глава V.

Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике.