

**Р. Курант, Д. Гильберт**

**Методы математической  
физики**

**Том 1**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Р11

P11      **Р. Курант**  
Методы математической физики: Том 1 / Р. Курант, Д. Гильберт – М.: Книга по Требованию, 2013. – 540 с.

**ISBN 978-5-458-25750-3**

В первом томе (1933 г.) содержатся прекрасные образы применения алгебраических, геометрических и вариационных методов к разрешению фундаментальных проблем анализа. Второй том (1945 г.) содержит систематическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемую с точки зрения математической физики. Перевод с немецкого З. Либина, Б. Лившица, Ю. Рабиновича.

**ISBN 978-5-458-25750-3**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



ные частью удовлетворяются в обычной геометрии. Базой для построения этих общих систем была теория множеств, рассматривающая как единое целое произвольную совокупность любых элементов. Работы Фреше (Fréchet) и Гаусдорфа (Hausdorff) положили начало теории так называемых абстрактных пространств, т. е. множеств произвольных элементов, между которыми установлены отношения, являющиеся обобщением наиболее основных соотношений между точками обычного пространства (пределный элемент, окрестность и т. п.). Чрезвычайно большую роль стали играть со времени Фреше так называемые функциональные пространства, т. е. абстрактные пространства, точками которых являются функции. Рассмотрим (гл. II, § 2), например, функциональное пространство  $R$ , элементом которого является произвольная непрерывная функция на отрезке  $a \leq x \leq b$  или функция с интегрируемым квадратом; расстояние  $\rho(f, \varphi)$  между двумя точками  $R$ : функциями  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  устанавливается по аналогии с расстоянием в евклидовом  $n$ -мерном пространстве:

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f - \varphi)^2 dx};$$

$f(x)$  является предельным элементом для последовательности  $f_n(x)$ , если  $\rho(f, f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f - f_n)^2 dx = 0$$

(сходимость в среднем). Мы можем определить в пространстве  $R$  также углы. Каждую функцию  $f(x)$  можно рассматривать как конец вектора с началом в нулевой функции и концом в „точке“  $f(x)$  длины:

$$[f] = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}.$$

Функции  $f(x)$  можно относить, следовательно, вектор в пространстве  $R$ . Угол  $\alpha$  между функциями-векторами  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  определяется по аналогии с  $n$ -мерной евклидовой геометрией:

$$\cos \alpha = \frac{\int_a^b f \varphi dx}{[f] [\varphi]}.$$

Условия ортогональности „векторов“  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — обычное условие ортогональности функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ . Таким образом становится понятной роль в анализе последовательностей взаимно ортогональных функций (тригонометрических, бесселевых, полиномов Лежандра и т. д.): они образуют системы взаимно ортогональных векторов в пространстве  $R$ . Их можно принять за оси координат, коэффициенты Фурье суть проекции функций-вектора на оси координат, и разложение в ряд Фурье — представление вектора через его проекции на ортогональную систему координат; теорема Парсеваля есть просто теорема Пифагора в пространстве  $R$ : квадрат длины вектора есть сумма квадратов его проекций на оси координат.

В настоящей книге широко применяются также вариационные методы. В классический период своего развития вариационное исчисление занимало несколько обособленное положение в анализе. Оно находило те дифференциальные уравнения, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы реализовать экстремум некоторого функционала, и исследовало дополнительные условия, при которых решение этого уравнения в самом деле реализует максимум или минимум (гл. IV, § 3—7). Новую постановку задачи вариационного исчисления мы видим у Гильберта. Пусть задан функционал  $I(f)$ , и  $C$  есть нижняя граница значений этого функционала. Мы образуем „минимизирующую“ последовательность функций  $f_n(x)$ , такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = C$ . Построив минимизирующую по-

следовательность, мы во многих задачах находим, путем предельного перехода, искомую функцию  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , для которой  $I(f) = C$ .

При этом, не решая дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять  $f(x)$ , мы даем доказательство существования этой функции и, если последовательность  $f_n(x)$  выбрана эффективно, — метод ее приближенного определения. В этих „прямых“ методах вариационное исчисление обрело возможность решать свои задачи в тех случаях, когда дифференциальные уравнения, к которым они сводились, оказывались не разрешимыми обычными методами. Вместе с тем при исследовании решения дифференциального уравнения стараются часто представить его как условие экстремума некоторого функционала и применить таким образом к решению нашего уравнения аппарат прямых методов.

Курант и его школа далеко продвинули прямые методы вариационного исчисления, связав их с алгебраическими методами. Бегло касаясь этих вопросов в настоящей книге, автор обещал посвятить им значительное место во II томе.

Наиболее интересной частью книги является вариационная теория собственных значений дифференциальных и отчасти интегральных уравнений, принадлежащая Куранту, развивающаяся в VI главе книги. Как по обилию приложений, так и по простоте и изяществу эта теория является одним из лучших достижений современного анализа.

Кроме основного материала в конце каждой главы имеются дополнения, в которых вкратце затрагиваются отдельные интересные вопросы.

Столь оригинальная, богатая идеями и содержательная книга имеет все основания на внимание советского читателя-математика.

Л. Люстерник.

### От ПЕРЕВОДЧИКОВ.

Перевод сделан со второго немецкого издания. Исправлены замеченные опечатки и неправильности в формулах. Кое-где для устранения недосмотров нам пришлось несколько отступить от оригинала (см., например, стр. 89, 309, 456, 491). В конце книги приложено несколько примечаний (к стр. 71, 89, 95, 105, 455, 456, 457, 470, 471, 491, 508), кроме того там же приведены доказательства интеграла Дирихле и теоремы Фейера, взятые из первого немецкого издания.

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

(Цифры курсивом указывают страницы.)

## ГЛАВА I.

### АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

§ 1. Линейные уравнения и линейные преобразования . . . . .	1
1. Векторы 1. 2. Ортогональные системы векторов. Полнота системы 3.	
3. Линейные преобразования, матрицы 5. 4. Билинейные формы, квадратичные и эрмитовы формы 10. 5. Ортогональные и унитарные преобразования 12.	
§ 2. Линейные преобразования с линейным параметром . . . . .	14
§ 3. Преобразования к главным осям квадратичных и эрмитовых форм . . . . .	20
1. Проведение преобразования к главным осям на основании принципа максимума 20. 2. Характеристические числа и собственные значения 23.	
3. Обобщение на эрмитовы формы 24. 4. Закон инерции квадратичных форм 25. 5. Выражение для резольвенты формы 26. 6. Решение системы линейных уравнений, соответствующей данной форме 27.	
§ 4. Минимально - максимальное свойство собственных значений . . . . .	28

1. Определение характеристических чисел с помощью задачи о наименьшем значении максимума 28. 2. Применения 29.	
--	--

### § 5. Дополнения и задачи к первой главе . . . . .

1. Линейная независимость и определитель Грама 31. 2. Теорема Адамара об оценке определителя 32. 3. Одновременное преобразование двух квадратичных форм к каноническому виду 33. 4. Билинейные и квадратичные формы от бесконечно большого числа переменных 35. 5. Бесконечно малые линейные преобразования 35. 6. Варьированные системы 36. 7. Наложение связи 38. 8. Элементарные делители матрицы или билинейной формы 39. 9. Спектр унитарной матрицы 39. Литература к гл. I 40.	
--	--

## ГЛАВА II.

### ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

### § 1. Ортогональные системы функций . . . . .

1. Определения 42. 2. Ортогонализация функций 43. 3. Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем 44. 4. Ортогональные и унитарные преобразования бесконечно большого числа переменных 48. 5. Справедливость результатов в случае нескольких независимых переменных. Расширение предысылок 49. 6. Построение полных систем функций от многих переменных 49.	42
--	----

§ 2. Принцип предельных точек в функциональном пространстве . . . . .	50
1. Сходимость в функциональном пространстве 50.	
§ 3. Мера независимости и число измерений . . . . .	55
1. Мера независимости 55. 2. Асимптотическое число измерений последовательности функций 56.	
§ 4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании. Полнота системы степеней и системы тригонометрических функций . . . . .	58
1. Теорема Вейерштрасса об аппроксимировании 58. 2. Распространение на функции от многих переменных 61. 3. Аппроксимирование производных 61. 4. Полнота системы тригонометрических функций 61.	
§ 5. Ряды Фурье . . . . .	62
1. Доказательство основной теоремы 62. 2. Кратные ряды Фурье 66. 3. Порядок коэффициентов Фурье 67. 4. Растижение основной области 67. Примеры 68.	
§ 6. Интеграл Фурье . . . . .	70
1. Доказательство основной теоремы 70. 2. Распространение формулы на случай многих переменных 73. 3. Взаимно обратные формулы 74.	
§ 7. Примеры на интеграл Фурье . . . . .	75
1. Интегральная формула Фурье 75. 2. Разрывный множитель Дирихле 75.	
§ 8. Полиномы Лежандра . . . . .	77
1. Построение путем ортогонализации степеней 1, $x$ , $x^2$ , ... 2. 77. 2. Производящая функция 79. 3. Дальнейшие свойства 79.	
§ 9. Примеры других ортогональных систем . . . . .	80
1. Обобщение постановки вопроса, приводящей к полиномам Лежандра 80. 2. Полиномы Чебышева 81. 3. Полиномы Якоби 83. 4. Полиномы Эрмита 84. 5. Полиномы Лагерра 86. 6. Полнота системы полиномов Лагерра и Эрмита 88.	
§ 10. Дополнения и задачи к второй главе . . . . .	90
1. Решение Гурвица для изопериметрической задачи 90. 2. Взаимно обратные формулы 91. 3. Интеграл Фурье и сходимость в среднем 91. 4. Спектральное разложение с помощью ряда Фурье и интеграла Фурье 92. 5. Плотные системы функций 93. 6. Теорема Г. Мионца о полноте системы степеней 94. 7. Теорема Фейера 94. 8. Формулы обращения Мелина 95. 9. Явление Гиббса 98. 10. Теорема об определителе Грама 100. 11. Применение понятия интеграла Лебега 100. Литература к гл. II 103.	
 ГЛАВА III.	
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.	
§ 1. Предварительные соображения . . . . .	104
1. Обозначения и основные понятия 104. 2. Истокообразно представленные функции 105. 3. Выродившиеся ядра 106.	
§ 2. Теоремы Фредгольма для выродившегося ядра 107	
§ 3. Теоремы Фредгольма для произвольного ядра 109	

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения . . . . .	113
1. Существование собственного значения у симметрического ядра 113.	
2. Совокупность собственных функций и собственных значений 116. 3. Максимально-минимальное свойство собственных значений 122.	
§ 5. Теорема о разложении и ее применения . . . . .	124
1. Теорема о разложении 124. 2. Решение неоднородного линейного интегрального уравнения 126. 3. Билинейная формула для итерированных ядер 127. 4. Теорема Мерсера 128.	
§ 6. Ряд Неймана и разрешающее ядро . . . . .	130
§ 7. Формулы Фредгольма . . . . .	132
§ 8. Новое обоснование теории . . . . .	136
1. Лемма 136. 2. Собственные функции симметрического ядра 137.	
3. Несимметрические ядра 138. 4. Непрерывная зависимость собственных значений и собственных функций от ядра 139.	
§ 9. Расширение границ приложимости теории	140
§ 10. Дополнения и задачи к третьей главе . . . . .	142
1. Примеры 142. 2. Особенные интегральные уравнения 142. 3. Метод Шмидта для вывода теорем Фредгольма 143. 4. Метод Энскога для решения симметрических интегральных уравнений 144. 5. Метод Келлога для определения собственных функций 145. 6. Символические функции ядра и их собственные значения 145. 7. Пример несимметрического ядра, не имеющего собственных функций 145. 8. Интегральные уравнения Вольтерры 146. 9. Интегральное уравнение Абеля 146. 10. Взаимно сопряженные ортогональные системы, принадлежащие несимметрическому ядру 147. 11. Интегральные уравнения первого рода 147. 12. Метод бесконечно большого числа переменных 148. 13. Минимальные свойства собственных функций 149. 14. Полярные интегральные уравнения 149. 15. Ядра, допускающие симметризацию 150. 16. Определение разрешающего ядра посредством функциональных уравнений 150. 17. Непрерывность определенных ядер 150. 18. Теорема Гамерштейна 150. Литература к гл. III 150.	
ГЛАВА IV.	
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.	
§ 1. Постановка задачи вариационного исчисления . . . . .	152
1. Maxima и minima функций 153. 2. Функционалы 155. 3. Типичные примеры задач вариационного исчисления 157. 4. Характерные трудности вариационного исчисления 161.	
§ 2. Прямые методы . . . . .	162
1. Изопериметрическая задача 162. 2. Метод Ритца. Минимальные последовательности 163. 3. Дальнейшие прямые методы. Метод конечных приращений. Бесконечное число независимых переменных 165. 4. Соображения общего характера относительно прямых методов вариационного исчисления 171.	
§ 3. Уравнения Эйлера . . . . .	173
1. Простейшая проблема вариационного исчисления 173. 2. Случай многих неизвестных функций 177. 3. Выражения, содержащие производные высших порядков 179. 4. Случай многих независимых переменных 180.	

---

5. Тождественное обращение в нуль дифференциального выражения Эйлера	182.
6. Однородная форма дифференциальных уравнений Эйлера	186.
7. Вариационные проблемы с расширенными условиями допустимости. Теоремы Дюбуа-Реймона и Гаара	189.
8. Другие вариационные задачи и их функциональные уравнения	195.
<b>§ 4. Замечания относительно интегрирования дифференциального уравнения Эйлера. Примеры . . . . .</b>	<b>196</b>
<b>§ 5. Граничные условия . . . . .</b>	<b>198</b>
1. Естественные граничные условия в задачах со свободной вариацией на границе	198.
2. Геометрические задачи. Трансверсальность	201.
<b>§ 6. Вторая вариация и условие Лежандра . . . . .</b>	<b>205</b>
<b>§ 7. Вариационные задачи с дополнительными условиями . . . . .</b>	<b>207</b>
1. Изопериметрические задачи	207.
2. Конечные дополнительные условия	210.
3. Дифференциальные уравнения в качестве дополнительных условий	212.
<b>§ 8. Инвариантный характер дифференциальных уравнений Эйлера . . . . .</b>	<b>213</b>
1. Выражение Эйлера как градиент в функциональном пространстве. Инвариантность выражения Эйлера	213.
2. Преобразования выражения Ди. Полярные координаты	216.
3. Эллиптические координаты	217.
<b>§ 9. Приведение вариационных задач к каноническому и инволюционному виду . . . . .</b>	<b>222</b>
1. Преобразование обыкновенных задач минимума с добавочным условием	222.
2. Инволюционное преобразование простейшей вариационной задачи	224.
3. Приведение вариационной задачи к каноническому виду	229.
4. Обобщения	230.
<b>§ 10. Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения математической физики . . . . .</b>	<b>233</b>
1. Общие соображения	233.
2. Колебания струны и стержня	235.
3. Мембрана и пластиника	237.
<b>§ 11. Дополнения и задачи к четвертой главе . . . . .</b>	<b>243</b>
1. Вариационная задача, соответствующая заданному дифференциальному уравнению	243.
2. Закон взаимности изопериметрических задач	243.
3. Световые лучи, имеющие форму окружности	243.
4. Задача Диоды	243.
5. Пример пространственной вариационной задачи	244.
6. Изопериметрическая задача на поверхности	244.
7. Индикаторисса и ее применения	244.
8. Вариация при переменной области интегрирования	246.
9. Теоремы Эйлера относительно инвариантных вариационных проблем. Интегралы дифференциальных уравнений механики	248.
10. Трансверсальность для случая кратных интегралов	252.
11. Дифференциальные выражения Эйлера на произвольной поверхности	252.
12. Принцип Томсона в электростатике	253.
13. Проблемы равновесия упругого тела. Принцип Кастильяно	253.
14. Принцип Кастильяно в теории балок	256.
15. Вариационная задача о продольном изгибе стержня	257.
Литература к гл. IV	259.

## ГЛАВА V.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ  
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

§ 1. Предварительные замечания о линейных дифференциальных уравнениях . . . . .	260
1. Общие замечания. Принцип наложения 260. 2. Однородные и неоднородные задачи. Краевые условия 262. 3. Формальные соотношения. Сопряженные дифференциальные выражения. Формулы Грина 262. 4. Линейные функциональные уравнения, как предельные случаи и аналоги систем линейных уравнений 265.	
§ 2. Системы с конечным числом степеней свободы . . . . .	266
1. Собственные колебания. Нормальные координаты. Общая теория процесса 266. 2. Общие свойства колебательных систем 270.	
§ 3. Колебания струны . . . . .	271
1. Свободные колебания однородной струны 271. 2. Вынужденные движения 274. 3. Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля 275.	
§ 4. Колебания стержня . . . . .	279
§ 5. Колебания мембранны . . . . .	281
1. Общая задача об однородной мемbrane 281. 2. Вынужденные движения 283. 3. Узловые линии 284. 4. Прямоугольная мембра 284. 5. Круговая мембра. Бесселевы функции 286. 6. Неоднородная мембра 289.	
§ 6. Колебания пластиинки . . . . .	290
1. Общие соображения 290. 2. Круговая пластиинка 290.	
§ 7. Общие соображения о методе собственных функций . . . . .	291
1. Применение метода в задачах о колебаниях и в задачах о равновесии 291. 2. Задачи о собственных значениях в теории теплопроводности 294. 3. Другие вопросы, приводящие к задачам о собственных значениях 295.	
§ 8. Колебания трехмерных континуумов . . . . .	296
§ 9. Краевые задачи теории потенциала и собственные функции . . . . .	297
1. Окружность, сфера, сферический слой 298. 2. Цилиндрическая область 301. 3. Задача Ламе 301.	
§ 10. Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые краевые точки . . . . .	306
1. Бесселевы функции 306. 2. Функции Лежандра любого порядка 307. 3. Полиномы Якоби и Чебышева 309. 4. Полиномы Эрмита и Лагерра 310.	
§ 11. Об асимптотическом поведении решений штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений	312
1. Ограниченност при бесконечном возрастании независимого переменного 312. 2. Уточнение результата (бесселевы функции) 313. 3. Ограниченност решений при возрастании параметра 315. 4. Асимптотическое выражение решений 316. 5. Асимптотическое выражение штурм-лиувиллевских фундаментальных функций 317.	

§ 12. Краевые задачи с непрерывным спектром собственных значений . . . . .	320
1. Тригонометрические функции 321. 2. Бесселевы функции 321. 3. Задача о собственных значениях уравнения колебания для бесконечной плоскости 321.	
4. Задача Шрёдингера о собственных значениях 322.	
§ 13. Теория возмущений . . . . .	324
1. Простые собственные значения 324. 2. Кратные собственные значения 326. 3. Пример к теории возмущений 328.	
§ 14. Функция Грина (функция влияния). Приведение задач с дифференциальными уравнениями к интегральным уравнениям . . . . .	330
1. Функция Грина и краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 330. 2. Построение функции Грина и обобщенная функция Грина 334. 3. Эквивалентность задачи с дифференциальным уравнением задаче решения соответствующего интегрального уравнения 337. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка 341. 5. Дифференциальные уравнения с частными производными 342.	
§ 15. Примеры функции Грина . . . . .	349
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 349. 2. Функция Грина выражения $\Delta u$ для круга и шара 354. 3. Функция Грина и конформное отображение 356. 4. Функция Грина уравнения потенциала для шаровой поверхности 356. 5. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для прямоугольного параллелепипеда 357. 6. Функция Грина уравнения $\Delta u = 0$ для внутренней области прямоугольника 362. 7. Функция Грина для кругового кольца 364.	
§ 16. Дополнения к пятой главе . . . . .	366
1. Примеры на колебания струны 366. 2. Колебания свободно свисающего каната и бесселевы функции 368. 3. Дальнейшие примеры случаев колебательного уравнения, разрешимых в явном виде. Функции Матье 369. 4. Параметры в краевых условиях 370. 5. Тензоры Грина для систем дифференциальных уравнений 371. 6. Аналитическое продолжение решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 7. Теорема об узловых линиях решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ 372. 8. Пример собственного значения бесконечно большой кратности 372. 9. Границы применимости теорем разложения 372. Литература к гл. V 373.	
ГЛАВА VI.	
<b>ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.</b>	
§ 1. Экстремальные свойства собственных значений . . . . .	375
1. Классические экстремальные свойства 375. 2. Дополнения и обобщения 379. 3. Задачи о собственных значениях для областей, состоящих из отдельных несвязанных кусков 382. 4. Максимально-минимальное свойство собственных значений 383.	
§ 2. Общие следствия из экстремальных свойств собственных значений . . . . .	384
1. Общие теоремы 384. 2. Неограниченное возрастание собственных значений 390. 3. Асимптотическое поведение собственных значений для задачи Штурм-Лиувилля 392. 4. Дифференциальные уравнения, имеющие особые	

точки 393. 5. Дальнейшие замечания относительно возрастания собственных значений. Случай, когда имеются отрицательные собственные значения 394.  
6. Свойства непрерывности собственных значений 396.

**§ 3. Теорема о полноте системы собственных функций и теорема о разложении . . . . . 402**

1. Полнота системы собственных функций 402. 2. Теорема о разложении 404. 3. Обобщение теоремы о разложении 405.

**§ 4. Асимптотическое распределение собственных значений . . . . . 407**

1. Дифференциальное уравнение  $\Delta u + \lambda u = 0$  для прямоугольника 407.  
2. Дифференциальное уравнение  $\Delta u + \lambda u = 0$  для областей, состоящих из конечного числа квадратов или кубов 409. 3. Распространение полученного результата на общее дифференциальное уравнение  $L[u] + \lambda u = 0$  412.  
4. Законы асимптотического распределения собственных значений для произвольной области 414. 5. Законы асимптотического распределения собственных значений дифференциального уравнения  $\Delta u + \lambda u = 0$  в уточненной форме 421.

**§ 5. Задачи о собственных значениях шрёдингровского типа . . . . . 423**

**§ 6. Узлы собственных функций . . . . . 429**

**§ 7. Дополнения и задачи к шестой главе . . . . . 434**

1. Вывод минимальных свойств собственных значений из их полноты 434.  
2. Отсутствие нулей у первой собственной функции 436. 3. Другие минимальные свойства собственных значений 437. 4. Асимптотическое распределение собственных значений для случая колебаний пластиинки 438. 5—7. Задачи 438. 8. Задачи с граничными условиями, содержащими параметр  $\lambda$  438.  
9. Задачи о собственных значениях для замкнутых поверхностей 439.  
10. Оценка собственных значений в случае наличия особых точек 439.  
11. Минимальное свойство круглой мембранны или пластиинки 441. 12. Проблема минимума для случая неравномерного распределения масс 441. 13. Узловые точки для задачи Штурм-Лиувилля и принцип максимума минимумов 442.  
Литература к гл. VI 443.

## ГЛАВА VII.

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, К КОТОРЫМ ПРИВОДЯТ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ.

**§ 1. Предварительные замечания относительно линейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . . 444**

**§ 2. Функции Бесселя . . . . . 445**

1. Интегральное преобразование 446. 2. Функции Ганкеля 447. 3. Бесселевы функции и функции Неймана 448. 4. Выражение бесселевых функций в виде интегралов 451. 5. Другое выражение функций Ганкеля и бесселевых функций в виде интегралов 454. 6. Разложение бесселевых функций в степенные ряды 460. 7. Соотношения между бесселевыми функциями 463.  
8. Нули бесселевых функций 469. 9. Функции Неймана 473.

**§ 3. Шаровые функции Лежандра . . . . . 477**

1. Интеграл Шлэфли 477. 2. Интегральные выражения Лапласа 479.  
3. Функции Лежандра второго рода 480. 4. Сопряженные шаровые функции (функции Лежандра высшего порядка) 481.

§ 4. Применение метода интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям Лежандра, Чебышева, Эрмита и Лагерра . . . . .	481
1. Функции Лежандра 481. 2. Функции Чебышева 483. 3. Функции Эрмита 484. 4. Функции Лагерра 484.	
§ 5. Шаровые функции Лапласа . . . . .	485
1. Нахождение $2n+1$ шаровых функций $n$ -го порядка 486. 2. Полнота полученной системы функций 487. 3. Теорема о разложении 488. 4. Интеграл Пуассона 488. 5. Выражение шаровых функций Максвелла-Сильвестра 489.	
§ 6. Асимптотические разложения . . . . .	496
1. Формула Стирлинга 496. 2. Асимптотическое вычисление функций Ганкеля и Бесселя для больших значений аргумента 498. 3. Метод перевала 501. 4. Применение метода перевала к вычислению функций Ганкеля и Бесселя для больших значений параметра и больших значений аргумента 502. 5. Общие замечания по поводу метода перевала 506. 6. Метод Дарбу 506. 7. Применение метода Дарбу к асимптотическому разложению полиномов Лежандра 507.	
Приложения . . . . .	509
Предметный указатель . . . . .	519