

Э. Гурса

**Курс математического
анализа**

**Т. 1. Ч. 1. Производные и
дифференциалы. Определенные
интегралы**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гурса**
Курс математического анализа: Т. 1. Ч. 1. Производные и дифференциалы.
Определенные интегралы / Э. Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. –
368 с.

ISBN 978-5-458-25180-8

По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе. В то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности, выбор проникнут одной руководящей мыслью - дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки.

ISBN 978-5-458-25180-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ ТОМОВ I и II.

Книга Э. Гурса „Курс математического анализа“ уже приобрела у русских читателей заслуженную известность и признание. По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе; в то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности; выбор проникнут одной руководящей мыслью — дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки. Книга уже принесла большую пользу нашей университетской учащейся молодежи как пособие для углубления обычного курса анализа и для самообразования; можно смело сказать, что она много способствовала повышению уровня нашей математической культуры. Прежние переводы сделаны — том I с первого и второго французских изданий, том II — со второго издания. За прошедшее с тех пор время автор подверг первый том своего курса значительной переработке, а во втором введены большие дополнения. Основной целью его было поставить новые издания на современный уровень развития математической мысли; достаточно указать, что за последние десятилетия основные понятия теории функций действительного переменного стали необходимым средством для обоснования анализа; дополнения касаются ряда вопросов, разработанных в последние десятилетия и настолько важных, что они должны найти свое место в учебнике; наряду с этим в изложение дифференциальной геометрии систематически введены гауссовы координаты. Естественно, редактор поставил своей целью дать эти новые факты и идеи в переводе. С другой стороны, Гурса исключил в новых изданиях ряд „элементарных“ вопросов, как, например, систематическую теорию неопределенных интегралов, которые во Франции отнесены к курсу средней школы. Имея в виду нашего советского читателя, редактор не мог согласиться с такими сокращениями. Поэтому большая часть материалов старых изданий, пропущенная автором в последующем, все же включена в настоящий перевод. Для удобства читателя нумерация параграфов согласована с последними (том I, изд. 5-е, том II, изд. 5-е) французскими изданиями.

В основу настоящего издания положен прекрасно сделанный А. И. Некрасовым и тщательно проредактированный покойным Б. К. Млодзеевским текст первых русских изданий. Переводы добавлений сделаны для I тома Ю. Ф. Морошкиным (аналитические главы) и Н. В. Ефимовым (теория поверхностей), для II тома С. Ф. Морошкиным (1-й полутом) и Ю. А. Рожанской (2-й полутом).

В заключение считаю своим долгом приветствовать решение ГТТИ дать советскому читателю все три тома ценного труда Э. Гурса в русском переводе; мы вправе надеяться, что появление этого издания будет и дальше способствовать повышению уровня математической культуры широких кругов читателей этой книги.

В. Степанов.

Москва, 1932 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
I. Пределы. Множества	13
1. Пределы	—
2. Сечения в области действительных чисел	—
3. Ограниченные множества	15
4. Наибольший из пределов	16
5. Сходящиеся последовательности	18
II. Функции. Общие понятия	20
6. Определения	—
7. Непрерывность	21
8. Свойство непрерывных функций	22
9. Разрывные функции	25
10. Монотонные функции	27
11. Функции с ограниченным изменением	28
12. Функции многих переменных	31
13. Непрерывные кривые	34
Упражнения	36

ГЛАВА II.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

I. Определения. Общие свойства	37
14. Производные	—
15. Производные высших порядков	39
16. Теорема Ролля	—
17. Формула конечных приращений	40
18. Формула Тейлора	42
19. Частные производные	46
20. Плоскость, касательная к поверхности	49
21. Переход от разностей к производным	50
II. Дифференциальное обозначение	52
22. Дифференциалы	—
23. Полные дифференциалы	54
24. Высшие дифференциалы сложной функции	56
25. Дифференциал произведения	58
26. Однородные функции	59
27. Формула Тейлора для функций многих переменных	62
III. Функции, определенные как пределы	65
28. Способ определения новых функций	—
29. Равномерная сходимость	67
30. Равномерно сходящиеся ряды	69
31. Непрерывная функция, не имеющая производной	72
Упражнения	74

ГЛАВА III.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

	<i>Стр.</i>
I. Неявные функции	78
32. Исследование частного случая	—
33. Вычисление корня последовательными приближениями	80
34. Производные от неявных функций	84
35. Приложение к поверхностям	85
36. Высшие производные	86
37. Частные производные	88
38. Совокупные уравнения	91
39. Вычисление производных	93
40. Обращение функций	95
41. Касательная к кривой в пространстве	—
II. Особые точки. Максимумы и минимумы	97
42. Особые точки	—
43. Конические точки поверхности	100
44. Максимумы и минимумы функций одного переменного	102
45. Функции двух переменных	103
46. Исследование сомнительного случая	105
47. Функции трех переменных	109
48. Расстояние точки от поверхности	111
49. Максимум и минимум неявных функций	112
50. Общие замечания об абсолютных максимумах и минимумах	113
51. Максимальное значение одного определителя	115
III. Функциональные определители	116
52. Основное свойство	—
IV. Замена переменных	123
53. Общие замечания	—
54. Задача I	124
55. Приложения	125
56. Задача II	128
57. Преобразование плоских кривых	129
58. Преобразование прикосновения	130
59. Гомографические преобразования	132
60. Задача III	133
61. Другой способ решения	136
62. Задача IV	139
63. Преобразование Лежандра	—
64. Преобразование Ампера	141
65. Уравнение потенциала в криволинейных координатах	142
Упражнения	145

ГЛАВА IV.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. Различные методы квадратуры	151
66. Квадратура параболы	—
67. Общий метод	152
68. Начальные функции	154
II. Определенные интегралы. Геометрические понятия, с ними связанные	156
69. Суммы S и s	—
70. Теорема Дарбу	157
71. Интегрируемые функции	158
72. Определенные интегралы	—
73. Формула среднего значения	162
74. Вторая формула среднего значения	163

	<i>Стр.</i>
75. Переход к первообразным функциям	165
76. Указатели	168
77. Площадь плоской области	170
78. Вычисление площади плоской области	172
79. Длина дуги кривой	175
80. Направляющие косинусы	179
81. Изменение отрезка прямой	—
82. Теоремы Гревса и Шаля	180
III. Замена переменных. Интегрирование по частям	181
83. Замена переменных	—
84. Интегрирование по частям	183
85. Формула Тейлора	185
85bis. Трансцендентность, числа e	186
86. Полиномы Лежандра	187
IV. Распространение понятия об интеграле. Криволинейные интегралы	189
87. Один из пределов обращается в бесконечность	—
88. Применение второй теоремы о среднем	191
89. Подинтегральная функция обращается в бесконечность	194
90. Функция $\Gamma(a)$	197
91. Криволинейные интегралы	198
92. Приложение к площади замкнутой кривой	200
93. Значение интеграла $\frac{1}{2} \int x dy - y dx$	202
V. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла	203
94. Дифференцирование под знаком интеграла	—
95. Интегрирование под знаком интеграла	205
96. Равномерно сходящиеся интегралы	207
Упражнения	211

Г л а в а V.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

I. Неопределенные интегралы	215
97. Интегрирование рациональных функций. Общий способ	—
98. Уникурсальные кривые	227
99. Алгебраически-логарифмические интегралы	230
100. Приведение интегралов эллиптических и ультраэллиптических	232
101. Случай алгебраической интеграции	237
102. Эллиптические интегралы	238
102a. Псевдоэллиптические интегралы	—
103. Интегрирование трансцендентных функций. Интегрирование рациональных функций от $\sin x$ и $\cos x$	243
II. Приближенное вычисление определенных интегралов	252
104. Общие основания	—
105. Интерполирование	254
106. Метод Гаусса	256
106a. Планиметр Амслера	258
107. Интегрирование рядов	260
III. Разные методы	264
108. Приложение формул дифференцирования и интегрирования под знаком интеграла	—
109. Вычисление $\int_0^{\pi} \lg(1 - 2a \cos x + a^2) dx$	267
110. Приближенное значение $\lg \Gamma(n+1)$	268
Упражнения	270

Г л а в а VI.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. Двойные интегралы. Способ вычисления. Формула Грина	274
111. Суммы S и s для функции двух переменных	—
112. Двойные интегралы	276
113. Вычисление двойного интеграла	278
114. Случай произвольной области	281
115. Аналогия с простыми интегралами	284
116. Формула Грина	287
II. Замена переменных. Площадь поверхности	288
117. Предварительная формула	—
118. Замена переменных. Первый способ	290
119. Примеры	292
120. Замена переменных. Второй способ	293
121. Объемы	296
122. Вычисление объемов	298
123. Объем, ограниченный линейчатой поверхностью	299
124. Площадь кривой поверхности	300
125. Элемент поверхности	303
126. Задача Вивiani	305
III. Расширение понятия двойного интеграла. Интегралы по поверхности	306
127. Двойные интегралы по неограниченной области	—
128. Функция $B(p, q)$	309
129. Интегралы от неограниченных функций	310
130. Функциональное уравнение Абеля	312
131. Поверхностные интегралы	313
132. Формула Стокса	315
133. Применение поверхностных интегралов к вычислению объемов	317
Упражнения	318

Г л а в а VII.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ.

I. Кратные интегралы. Замена переменных	321
134. Тройные интегралы	—
135. Способы вычисления	322
136. Формула Остроградского (Грина)	326
137. Соотношение между двумя элементами поверхности	327
138. Замена переменных. Первый способ	328
139. Замена переменных. Второй способ	330
140. Элемент объема	332
141. Эллиптические координаты	335
142. Интегралы Дирихле	336
143. Кратные интегралы	337
II. Интегрирование полных дифференциалов	340
144. Общий метод	—
145. Исследование интеграла $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P dx + Q dy$	343
146. Периоды	345
147. Обобщение предыдущих результатов	348
Упражнения	349

ДОПОЛНЕНИЕ

О формулах дифференцирования определенных интегралов	351
--	-----

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

Постепенным обобщением мы переходим в арифметике от чисел натуральных к числам дробным, к нулю и к числам относительным (положительным и отрицательным). Но уже операция извлечения корня приводит к введению нового рода чисел, *чисел иррациональных*. К этим новым числам мы приходим также, применяя числа к измерению конкретных величин. Если мы имеем, например, две соизмеримых длины A и B , то мерою B по отношению к A , или отношением B к A , называется число $\frac{m}{n}$, представляющее частное чисел m и n , показывающих

содержание общей меры в длинах B и A . Если A и B несоизмеримы, то их отношение не может быть представлено целым или дробным числом и является числом другого рода — иррациональным. Хотя несоиз-

меримое отношение $\frac{B}{A}$ не равно никакому рациональному числу, но существует бесчисленное множество рациональных чисел, сколь угодно близких к $\frac{B}{A}$; чтобы получить такое число, достаточно заменить B ка-

ким-нибудь отрезком C , отличающимся от B менее чем на любой сколь угодно малый отрезок δ , но соизмеримым с A . На этом основан способ приближенного вычисления иррациональных чисел, как отношений между несоизмеримыми величинами, излагаемый в элементарной геометрии.

Иррациональные числа можно также определить чисто арифметически, не прибегая к рассмотрению отношений между конкретными величинами. Мы изложим здесь метод Дедекинда (Dedekind).

Пусть мы каким-нибудь способом разбили все рациональные числа на два класса A и B , обладающие тем свойством, что каждое число a класса A менее каждого числа b класса B . Будем говорить, что мы таким установили в области рациональных чисел некоторое сечение. При этом могут представиться три случая.

1. Среди чисел класса A есть некоторое число L , большее всех остальных чисел того же класса.

2. Среди чисел класса B есть некоторое число L , меньшее всех остальных чисел того же класса.

3. В классе A нет ни одного числа, большего всех остальных чисел того же класса, и в классе B нет ни одного числа, меньшего всех остальных чисел того же класса.

В первых двух случаях очевидно, что наше разбиение рациональных чисел на два класса вполне определяет число L , обладающее тем свойством, что всякое число, меньшее L , принадлежит к классу A , а всякое число, большее L , принадлежит к классу B . Такое число называется иногда само *сечением* и обозначается символом (A, B) . В третьем случае не существует рационального числа, обладающего предыдущими свойствами, но мы будем принимать, что и в этом случае наше разбиение определяет некоторое *иррациональное* число L , большее всех чисел класса A и меньшее всех чисел класса B . Это число L определяется, таким образом, арифметически как некоторое сечение.

Докажем, что каждому числу, данному как отношение двух величин, соответствует некоторое определенное сечение. Для этого будем изображать по правилам аналитической геометрии каждое число x точкою x' некоторой прямой так, чтобы отношение $\frac{Ox'}{OK}$, где OK —

единица меры, равнялось x . Пусть нам дано число L . Тогда соответствующая точка L' на прямой распределит все рациональные точки на два класса A' , B' , причём к A' мы отнесем все рациональные точки a' , лежащие влево от L' , а к классу B' — все точки b' , лежащие вправо от L' ; если точка L' сама рациональна, то мы отнесем ее безразлично к классу A' или к классу B' . Очевидно, что при этом координата каждой точки a' будет меньше координаты каждой точки b' , и мы получим некоторое сечение, определяющее данное отношение L .

Докажем, обратно, что каждому данному сечению (A, B) соответствует отношение некоторых двух отрезков. Пусть нам дано сечение (A, B) . Рассмотрим все рациональные числа a , принадлежащие к классу A , и все рациональные числа b , принадлежащие к классу B , и нанесем на прямую все точки a' , b' , координаты которых суть рациональные числа a , b . Так как из самого определения сечения следует, что каждое число a меньше каждого числа b , то все точки a' будут лежать по одну и ту же сторону относительно всех точек b' ; например, при обычном способе изображения все точки a' будут лежать левее всех точек b' . Распределим теперь все точки прямой на два класса A' , B' следующим образом. К классу A' отнесем все точки a' и все точки, лежащие между точками a' , а к классу B' — все остальные точки прямой. При дальнейшем доказательстве мы будем пользоваться тем свойством, что точки прямой образуют на ней непрерывный ряд. Это свойство выражается различным образом. Мы выразим его в следующей форме:

Если все точки прямой распределены на два класса таким образом, что между каждыми двумя точками одного и того же класса находятся только точки того же класса, то всегда существует одна и только одна пограничная точка, т. е. такая точка, что каждые две точки, между которыми она лежит, принадлежат к различным классам.

Очевидно, что предыдущее распределение точек прямой на классы A' , B' обладает свойством, требуемым этой аксиомой. Поэтому здесь существует такая пограничная точка L' ; пусть ей соответствует число L . Если это число рационально, то оно принадлежит или к классу A , или к классу B , и мы имеем $a \leq L < b$, или $a < L \leq b$; если же число L —

иррациональное, то мы имеем $a < L < b$. Таким образом число L , определенное как отношение $\frac{OL'}{OK}$, может быть также определено и как сечение (A, B) . Отсюда следует, что сечения определяют все непрерывное множество действительных чисел.

1. ПРЕДЕЛЫ. МНОЖЕСТВА

1. Пределы. Говорят, что переменное x имеет пределом постоянное число a , или стремится к a , когда абсолютная величина разности $x - a$, начиная с некоторого момента, становится и *остается* меньше всякого наперед заданного положительного числа. Когда $a = 0$, переменное x называют *бесконечно малым*. Выражения: „ x имеет пределом число a “ и „разность $x - a$ бесконечно мала“, очевидно, равнозначны. Чтобы показать, что переменное x стремится к пределу a , разность $x - a$ часто разбивают на некоторое число частей, например на три, и доказывают, что абсолютная величина каждой из этих частей с некоторого момента остается меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, причем ε — произвольное положительное число.

Этот способ доказательства, который мы часто будем применять, иногда называют *методом доказательства с помощью ε* (ε -доказательство).

Пользуясь неправильным, но удобным способом выражения, говорят также иногда, что переменное x имеет предел $+\infty$ или $-\infty$, или стремится к $\pm\infty$. Выражение: „ x имеет предел, например $+\infty$ “, означает, что переменное x с некоторого момента становится и остается большим всякого наперед заданного положительного числа A , а не то, что разность $(+\infty - x)$ стремится к нулю, что не имело бы никакого смысла.

Подобным же образом часто говорят, что какая-либо переменная по форме или по положению геометрическая фигура имеет своим пределом данную неизменную фигуру. Если в каждом частном случае желают немного уточнить это выражение, приходится измерять с помощью одного или нескольких переменных параметров *расхождение* неизменной и подвижной фигуры, и предшествующее выражение означает в точности, что эти переменные при определенных условиях стремятся к нулю. Возьмем, например, две соседние точки M и M' на кривой C . Говорят, что хорда MM' имеет предельным положением касательную MT в точке M , когда точка M' неограниченно приближается к точке M по кривой C . Так как обе прямые MM' и MT пересекаются в неподвижной точке M , естественно принять за меру их расхождения острый угол α , образуемый обеими прямыми, и высказанное утверждение, на языке анализа, означает, что угол α станет меньше данного произвольно выбранного угла ε , в предположении, что расстояние MM' само будет меньше другой подходящим образом определенной длины ρ .

2. Сечения в области действительных чисел. Предположим теперь, что множество всех чисел, как рациональных, так и иррациональных, разбито на два класса A и B , обладающих следующими свойствами:

1) *Всякое положительное или отрицательное число принадлежит к одному из двух классов.*

2) *Любое число класса A меньше любого числа класса B .*

Очевидно, что оба класса содержат бесчисленное множество как рациональных, так и иррациональных чисел. Покажем, что всегда существует число L , обладающее следующими двумя свойствами:

1) *Всякое число, меньшее L , принадлежит к классу A .*

2) *Всякое число, большее L , принадлежит к классу B .*

Это число L называется и в этом случае *сечением* и, как мы увидим, будет или рациональным, или иррациональным. Существование числа L есть следствие самого понятия иррационального числа, как мы его ввели выше. В самом деле, рассмотрим в обоих классах A и B только рациональные числа. При этом множество всех рациональных чисел разобьется на два класса (α) и (β) , обладающих следующими свойствами: 1) *всякое рациональное число принадлежит к одному из двух классов*; 2) *любое рациональное число класса (α) меньше любого рационального числа класса (β)* . Здесь могут представиться три случая.

1) В классе (α) может существовать рациональное число $\frac{p}{q}$, *большее всех рациональных чисел того же класса*. Тогда это число $\frac{p}{q}$ и будет числом L . В самом деле, всякое число, меньшее $\frac{p}{q}$, принадлежит к классу A . Всякое число b , большее $\frac{p}{q}$, принадлежит к классу B . Это очевидно, если b рационально; если же b иррационально, то мы возьмем число r , заключающееся между $\frac{p}{q}$ и b . Это рациональное число r принадлежит к классу B ; следовательно, принадлежит к классу B и число b .

2) В классе (β) может существовать рациональное число $\frac{p'}{q'}$, *меньшее всех рациональных чисел того же класса*. Как и в первом случае, можно доказать, что число $\frac{p'}{q'}$ будет числом L .

3) Наконец, может быть, что в классе (α) нет ни одного рационального числа, большего всех остальных рациональных чисел того же класса, и в классе (β) нет ни одного рационального числа, меньшего всех остальных рациональных чисел того же класса. Тогда такое разбиение рациональных чисел на два класса (α) и (β) определяет, по предыдущему, некоторое иррациональное число m , большее всех рациональных чисел класса (α) и меньшее всех рациональных чисел класса (β) . В этом случае числом L будет именно это число m . В самом деле, всякое рациональное число, меньшее m , будет принадлежать к классу A , и всякое рациональное число, большее m , будет принадлежать к классу B . Возьмем теперь какое-нибудь иррациональное число $m' < m$, и пусть будет K рациональное число, заключающееся между m' и m ;