

П. Чебышев

**Полное собрание
сочинений**

Том 1. Теория чисел

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
П11

П11 **П. Чебышев**
Полное собрание сочинений: Том 1. Теория чисел / П. Чебышев – М.: Книга
по Требованию, 2013. – 346 с.

ISBN 978-5-458-49977-4

ISBN 978-5-458-49977-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Перед чтением книги надлежит сделать следующие, указанные ниже, исправления.

Страница	Строка	Сверху или снизу	Напечатано	Должно быть
24	23	Сверху	$\dots, a + (aN - 1) A$	$\dots, a' + (aN - 1) A$
126	13	Снизу	\dots уравнению $\left(\frac{p}{49}\right) = 1$, должно	\dots уравнению $\left(\frac{p}{19}\right) = 1$, должно
129	8	Сверху	$18z + 25,$	$28z + 25,$
147	14	Снизу	\dots , а для формы $5u^2 + 4uv + v^2$	\dots , а для формы $5u^2 + 4uv + 6v^2$
177	6	Снизу в формуле	$\sum_{x=2}^8$	$\sum_{x=2}^{x=\infty}$
218	8	Сверху	\dots его формую $\pm (x^2 - Dy^2),$	\dots его формую $\pm (x^2 - Dy^2),$

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ

Краткий биографический очерк *

Пафнутий Львович Чебышев родился 26 (14) мая 1821 г. в поместье своего отца, сельце Окатове, Боровского уезда Калужской губернии. Семейство Пафнутия Львовича принадлежало к старинному дворянскому роду; отец его был по тому времени человек образованный и с порядочными материальными средствами.

Первоначальное воспитание, до самого поступления в университет, он получил дома. Грамоте его обучала мать, Аграфена Ивановна, а некоторым другим предметам, в том числе арифметике и французскому языку, двоюродная сестра А. К. Сухарева, девушка очень образованная и игравшая, повидимому, важную роль в воспитании Пафнутия Львовича.

В 1832 г. Чебышевы всей семьей переехали на жительство в Москву, чтобы приготовить Пафнутия Львовича и старшего его брата к поступлению в университет. Для этой цели были приглашены лучшие московские учителя, в том числе, по математике, известный тогда педагог Погорельский, об „Алгебре“ которого Чебышев впоследствии говорил, что она самая лучшая из всех на русском языке, потому что она „самая краткая“. В это время выяснились окончательно способности П. Л. Чебышева к математике, и он избрал для себя физико-математический факультет.

Поступив в Московский университет в 1837 г., Чебышев уже при переходе с первого курса на второй написал работу „Вычисление корней уравнения“, за которую был награжден серебряной медалью; своими серьезными занятиями он сразу обратил на себя внимание известного профессора Н. Д. Брашмана, который угадал в своем новом ученике будущее математическое светило, а потому начал старательно руководить его занятиями, убеждая его посвятить себя исключительно математике. К этому ученому Чебышев сохранил навсегда глубочайшее уважение; до самой смерти он берег как некую святыню фотографический портрет Брашмана, полученный от него уже гораздо позже. Университетский курс Чебышев окончил в 1841 г.

* Этот биографический очерк, почти целиком заимствованный из статьи проф. К. А. Поссе, помещенной в „Критико-биографическом словаре русских писателей и ученых“ Венгерова, составлен академиками А. А. Марковым и Н. Я. Соняным.

В 1840 г. в значительной части России был голод, и дела многих помещиков, в том числе и родителей Чебышева, пришли в расстройство. Вся семья принуждена была переехать на постоянное жительство в деревню, и отец Чебышева уже не был в состоянии помогать сыну. Чтобы не терпеть нужды, молодому человеку, только-что вышедшему из университета, нужно было бы поступить куда-нибудь на службу или усердно приняться за давание уроков, но он, справедливо рассуждая, что подобные занятия отвлекли бы его от любимых трудов по математике, предпочел переносить лишения. В это время он получал от отца только даровое помещение в его доме на Пречистенке. В этом доме он и поселился, взяв к себе двух братьев и еще двух молодых людей в качестве пенсионеров. Эти молодые люди вместе с братьями Пафнутия Львовича готовились к поступлению в учебное заведение, и П. Л. Чебышев некоторое время сам пробовал учить их математике, но скоро прекратил это занятие, так как, по собственному признанию, оказался педагогом нетерпеливым, сердился и кричал на своих учеников.

В это время появились в свет первые ученые труды Чебышева и написана была его магистерская диссертация „Опыт элементарного анализа теории вероятностей“, которую он защитил в Московском университете в 1846 г.

В 1847 г. он переехал на жительство в Петербург, получив после защиты диссертации „Об интегрировании помощью логарифмов“ должность адъюнкт-профессора в Петербургском университете на место вышедшего профессора В. А. Анкудовича. Эта диссертация, содержание которой вошло в последующие работы Чебышева, вместе со вступительной речью сохранилась в рукописи, а положения при ней напечатаны. Она дала Чебышеву право читать лекции в университете; степень же доктора Чебышев получил в 1849 г. за третью диссертацию — его известное сочинение „Теория сравнений“.

Почти одновременно с Чебышевым в Петербургский университет вступил в качестве ординарного профессора Виктор Яковлевич Буняковский, один из известнейших русских математиков, бывший тогда уже ординарным академиком Академии Наук. Экстраординарным профессором по кафедре прикладной математики был тогда другой, тоже весьма известный, математик — Иосиф Иванович Сомов. Эти два человека, столь же выдающиеся учеными заслугами, сколько и высокими душевными качествами, были первыми, с которыми близко сошелся П. Л. Чебышев по переезде в Петербург и с которыми до конца их жизни сохранил наилучшие отношения. Особенно близок он был с В. Я. Буняковским, который, увидав в Чебышеве огромную научную силу, скоро привлек его в Академию Наук сначала в качестве своего сотрудника по изданию работ знаменитого Эйлера, а затем в качестве сочлена (в 1853 г. Чебышев был избран в адъюнкты, а в 1859 г. в ординарные академики Академии Наук).

Материальные средства П. Л. Чебышева по переезде его в Петербург были в очень плохом состоянии. Дела его родных в это время

сильно расстроились, и единственные средства к жизни давало еле достаточное жалование адъюнкт-профессора.

Скудные материальные средства заставляли его быть очень бережливым; таким он остался и до конца жизни. Единственным предметом, на который Чебышев никогда не жалел денег, были модели изобретаемых им механизмов; на их устройство он тратил сотни и тысячи рублей. С раннего детства он любил устраивать различные приборы и, начав с игрушки, сделанной перочинным ножом, дошел до своей сложной арифметической машины, хранящейся в Conservatoire des arts et métiers в Париже. Многие из его приборов хранятся в С.-Петербургском университете и в Академии Наук.

Круг знакомых, у которых бывал Чебышев, был очень не велик; чаще всего он любил посещать В. Я. Буняковского, у которого собирались многие из математиков, между прочим и известный М. В. Остроградский.

В молодые годы Чебышев часто приходил к И. И. Сомову беседовать о своих открытиях; пользуясь громадной начитанностью своего старшего собрата по науке, он узнавал, не сделано ли это открытие другими раньше, что, по словам А. И. Сомова, брата академика, иногда и оказывалось на деле. Разумеется, это могло относиться только к тому периоду деятельности Чебышева, когда он еще не обратился к таким вопросам математики, которых никто до него не затрагивал и в которых никакой опасности быть предупрежденным встретиться не могло. Надо заметить, что сам Чебышев более любил самостоятельные исследования, чем изучение трудов других математиков, особенно современных. Глубоко изучив творения великих математиков — Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Абеля и других, Чебышев не придавал особого значения чтению текущей математической литературы, утверждая, что излишнее усердие в изучении чужих трудов должно неблагоприятно отражаться на самостоятельности собственных работ.

Одним из любимых развлечений П. Л. были поездки за границу. В первое время своей деятельности поездки эти Чебышев предпринимал не для отдыха, а со строго научными целями. В отчете о командировке за границу в 1852 г.* можно найти описание его путешествия, посещения различных фабрик с целью изучения практической механики, заседаний ученых обществ и бесед с знаменитыми учеными различных стран по научным вопросам. В последующие годы Чебышев хотя и не упускал из вида ученых целей своих путешествий, пользовался ими также и для отдыха от своих непрерывных занятий. Больше всего любил он ездить во Францию, где у него были многочисленные знакомства среди ученых и где он часто посещал конгрессы и докладывал о своих открытиях. Со свойственной ему бережливостью Чебышев останавливался в первые свои поездки в Париж в самом скромном отеле (Hôtel Coignille, против Одеона), обедал в дешевых ресторанах и ездил в omnibusах; только в последние годы он несколько

* Этот отчет мы помещаем в последнем томе настоящего издания. *Ред.*

отступил от своих привычек и даже устраивал обеды своим французским друзьям. В тех случаях, когда Пафнутий Львович оставался на канicularное время в пределах России, он чаще всего жил около Реваля, в Екатеринентале.

Профессорская деятельность Чебышева продолжалась ровно 35 лет, с 1847 по 1882 год (с 1847 по 1853 г. он был адъюнктом, с 1853 по 1857 г. экстраординарным и с 1857 г. ординарным профессором), и протекала исключительно в Петербургском университете, если не считать кратковременного преподавания механики в Александровском лицее. В различные периоды он читал аналитическую геометрию, высшую алгебру, теорию чисел, интегральное исчисление, теорию вероятностей и исчисление конечных разностей, теорию эллиптических функций и теорию определенных интегралов

К чтению своих лекций Чебышев относился с педантической строгостью; лекций никогда почти не пропускал, никогда на них не опаздывал и ни одной лишней минуты после звонка не оставался в аудитории, хотя для этого приходилось прерывать лекции иногда на полуслове. Недоконченный на какой-либо лекции вывод всегда начинал на следующей с самого начала, если только эта лекция не была немедленным продолжением предыдущей. Всякой сколько-нибудь сложной выкладке предпосылал разъяснение ее цели и хода в общих чертах, а затем производил вычисление на доске большей частью молча, предоставляя студентам следить за ним глазами, а не ухом. Выкладки делал довольно быстро и настолько подробно, что следить за ним было очень легко. Во время лекций Чебышев часто делал отступления от систематического изложения курса, сообщал свои взгляды и разговоры с другими математиками по затронутым на лекциях вопросам и выяснял сравнительное значение и взаимную связь между различными вопросами математики. Эти отступления очень оживляли изложение, давали отдых напряженному вниманию слушателей и возбуждали интерес к изучению предмета в более широких рамках.

Курсы, читавшиеся Чебышевым, были невелики по объему, но содержательны, по изложению очень доступны и удобопонятны. На экзаменах Чебышев не был ни слишком строг, ни слишком снисходителен и всегда чрезвычайно сдержан и вежлив. На диспутах возражения Чебышева, всегда касавшиеся не подробностей, а общих вопросов, связанных с предметом диссертации, отличались большою тонкостью и остроумием.

Заслуги Чебышева как профессора навсегда останутся в памяти тех, кому выпала на долю завидная участь учиться у него. Он продолжал учить своих учеников и по окончании ими университетского курса. Первые шаги на научном поприще тех из его слушателей, которые посвятили себя занятиям математикой, были сделаны под непосредственным его руководством и под влиянием драгоценных его указаний, которые он давал желающим и умеющим ими воспользоваться.

Раз в неделю, в определенные часы, двери его были открыты для

всякого, имеющего что-нибудь сообщить о собственных занятиях знаменитому математику и получить от него указания, и редко кто-нибудь от него уходил, не унося с собою новых мыслей и поощрения к дальнейшей работе.

Одною из незабвенных заслуг Чебышева как учителя русских математиков было то, что он своими работами и указаниями в ученых беседах наводил своих учеников на плодотворные темы для самостоятельных изысканий и обращал их внимание на такие вопросы, занятия которыми всегда приводили к более или менее ценным результатам.

Чебышев умер на 74-м году жизни, пережил и 25- и 50-летний юбилей своей ученой деятельности и ни одного из них не праздновал. Всякие попытки его почитателей и учеников оттенить каким-нибудь из общепринятых способов эти даты он отклонял самым энергичным образом.

О последних днях жизни П. Л. Чебышева известно только, что за несколько дней до кончины он заболел инфлуэнциею в легкой форме и хотя нехорошо себя чувствовал, но в постель не ложился. Накануне смерти он в обыкновенное время принимал посетителей, и никто не мог думать, что конец его жизни так близок. Утром 8 декабря (26 ноября) 1894 г. Пафнутий Львович, сидя за письменным столом со стаканом чая, внезапно почувствовал себя дурно и после непродолжительной агонии скончался от паралича сердца.

ТЕОРИЯ СРАВНЕНИЙ *

ВВЕДЕНИЕ

Не следуя вполне в изложении теории сравнений сочинениям Лежандра „*Théorie des nombres*“ и Гаусса „*Disquisitiones arithmeticae*“, я считаю необходимым объяснить причины, заставившие меня сделать отступления от этих превосходных сочинений двух великих геометров. Для этого я войду в некоторые подробности об этих сочинениях и о современном им состоянии теории чисел.

Эйлером положено начало всех изысканий, составляющих общую часть теории чисел. В этих изысканиях Эйлеру предшествовал Фермат; он первый начал заниматься исследованием свойств чисел в отношении их способности удовлетворять неопределенным уравнениям того или другого вида, и результатом его изысканий было открытие многих общих теорем теории чисел. Но изыскания этого геометра не имели непосредственного влияния на развитие науки; его предложения остались без доказательств и без приложений. В этом состоянии открытия Фермата служили только вызовом геометров на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера на них никто не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, и не новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это сделано было Эйлером.

Между многими изысканиями Эйлера в теории чисел наиболее имели влияния на успех этой науки изыскания его по следующим двум предметам: 1) о степенях чисел в отношении остатков, получаемых при делении их на данное число, и 2) о числах, представляющих сумму двух чисел, из которых одно есть квадрат, а другое — произведение квадрата на данное число. Первые положили основание теории указателей, сравнений двучленных вообще и в особенности теории квадратичных вычетов; вторые были началом теории квадратичных форм.

* Отдельные издания: 1-е — СПб. 1849, 2-е — СПб. 1879, 3-е — СПб. 1901; иностранные переводы: „*Theorie der Congruenzen*“, mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von H. Schapira, Berlin 1888; „*Teoria delle congruenze*“, traduzione con aggiunte e note di I. Massarini, Roma 1895.

Основание теории указателей Эйлер положил мемуаром своим „*Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia*“, напечатанным в Записках нашей Академии Наук за 1773 год. В этом мемуаре он раскрыл свойства указателей и первообразных корней, показал высший предел числа решений, допускаемых сравнениями двучленными с простым модулем, и приложение теории указателей к теории квадратичных вычетов и квадратичных форм. Для совершенства теории указателей оставалось найти способ определения первообразных корней, не испытывая различных чисел. Все старания Эйлера в изыскании этого были тщетны; он говорит: „*Via quidem adhuc non patet, tales radices primitivas pro quovis divisore primo inveniendi neque etiam demonstratio, qua tales radices primitivae semper dari evicunt, methodum eas inveniendi declarat*“.* Но при всем успехе теории чисел мы до сих пор находим первообразные корни, испытывая различные числа, и теоремы, изложенные мною во втором прибавлении, едва ли не первый опыт находить первообразные корни без предварительных испытаний.

Исследования Эйлера о делителях чисел вида $a^n \pm b^n$ положили начало теории сравнений двучленных. Эти исследования мы находим во многих мемуарах Эйлера; из них особенного внимания заслуживает мемуар „*Theoremata circa divisores numerorum*“. Здесь он показывает, что возможность удовлетворить сравнению $x^n - a \equiv 0 \pmod{mn+1}$, при $mn+1$ простым числе, предполагает делимость $a^m - 1$ на это число, и доказывает обратное, предполагая m и n простыми между собою. За исключением лишнего ограничения m и n простыми между собою, эти теоремы суть основания современной теории сравнений двучленных вообще и в особенности теории квадратичных вычетов. Впрочем, рассматривая у Эйлера доказательство последней теоремы, легко заметить распространение ее на случай m и n каких-нибудь. В мемуаре „*De quibusdam eximiis proprietatibus circa divisores potestatum occurrentibus*“ он особенно доказывает это для случая $m=2$, не делая никаких ограничений относительно n , и показывает, что делимость $a^n - 1$ на $2n+1$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы a было квадратичным вычетом числа $2n+1$. Кроме того, Эйлер в других мемуарах много занимался квадратичными вычетами, и в „*Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos*“, рассматривая остатки, получаемые при делении квадратов на простые числа, вывел такое заключение:

„*Existente s numero quocunque primo, dividantur tantum quadrata imparia 1, 9, 25, 49, etc., per divisorem $4s$, notenturque residua, quae omnia erunt formae $4q+1$, quorum quodvis littera a indicetur, reliquorum autem numerorum, formae $4q+1$, qui inter residua non occurrunt quilibet littera \mathcal{A} indicetur, quo facto si fuerit.*

* „До сих пор не удается находить первообразные корни для любого простого делителя, и даже доказательство того, что такие примитивные корни всегда существуют, способом их нахождения не установлено“ (Op. min. col., т.I, стр. 523).

divisor numerus
primus formae

$$4ns + a$$

$$4ns - a$$

$$4ns + \mathfrak{A}$$

$$4ns - \mathfrak{A}$$

tum est

$$+ s \text{ residuum et } - s \text{ residuum}$$

$$+ s \text{ residuum et } - s \text{ non-residuum}$$

$$+ s \text{ non-residuum et } - s \text{ non-residuum}$$

$$+ s \text{ non-residuum et } - s \text{ residuum}^* . *$$

Это открытие мы находим у Эйлера в I томе „Opuscula Analytica“, 1772 г. Не трудно в нем узнать закон взаимности двух простых чисел, обнаруженный Лежандром в 1785 г. и положенный им в основание теории квадратичных вычетов. В теории квадратичных форм Эйлер начал свои изыскания с суммы двух квадратов, и в мемуаре „De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum“ доказал, что делители суммы двух квадратов простых между собою должны представлять подобную сумму, и вывел линейную форму этих делителей. Таким образом он дошел до знаменитой теоремы Фермата о разложении простых чисел вида $4m + 1$ на два квадрата. Подобным образом Эйлер нашел квадратичных и линейных делителей для квадрата, сложенного с удвоенным или утроенным квадратом, и предложил без доказательства линейные формы делителей многих квадратичных форм. Так положил Эйлер основание теории делителей квадратичных форм. Гениальные открытия, сделанные Лагранжем в этой части теории чисел, открыли путь Эйлеру к новым изысканиям. Следствием их было новое развитие теории квадратичных форм со многими приложениями ее к исследованию, что данное число простое или нет и как можно найти простые числа чрезвычайно большие.

Эйлер не ограничивался в изысканиях своих одними конечными формулами; он показал также, каким образом употреблением рядов можно дойти до различных предложений теории чисел. Сюда относятся изыскания его de partitione numerorum и о суммах делителей различных чисел.

Имея в виду развитие общей части теории чисел, мы не будем останавливаться на изысканиях Эйлера в анализе Диофанта, результатом которых было решение уравнений вида $ax^2 + by^2 = cz^2$, доказательство невозможности некоторых уравнений с двумя и тремя неизвестными и решение многих неопределенных уравнений, весьма сложных, и перей-

* Пусть s какое-либо простое число; будем делить нечетные квадраты 1, 9, 25, 49 и т. д. на $4s$ и рассматривать остатки, которые все будут вида $4q + 1$; будем обозначать эти остатки буквой a и остальные числа вида $4q + 1$, не встречающиеся среди этих остатков, будем обозначать буквой \mathfrak{A} ; тогда

если простой делитель
вида

$$4ns + a$$

$$4ns - a$$

$$4ns + \mathfrak{A}$$

$$4ns - \mathfrak{A}$$

то

$$+ s \text{ вычет и } - s \text{ вычет}$$

$$+ s \text{ вычет и } - s \text{ невычет}$$

$$+ s \text{ невычет и } - s \text{ невычет}$$

$$+ s \text{ невычет и } - s \text{ вычет}^* .$$