П.С. Моденов

Сборник конкурсных задач по математике с анализом ошибок

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П.С. Моденов
П11 Сборник конкурсных задач по математике с анализом ошибок / П.С. Моденов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 176 с.

ISBN 978-5-458-30864-9

Задачи, предложенные на приёмных испытаниях в высшие учебные заведения. Эта небольшая книга предназначена в помощь при подготовке к приёмным испытаниям по математике в высшие учебные заведения; собранные задачи ориентируют поступающего также и в степени трудности задач, предлагавшихся в учебные заведения различных типов. Мне кажется, что сборник может быть полезен и для преподавателей математики средней школы, а также руководителям приёмных испытаний в высшие учебные заведения. Таким образом представлены следующие типы учебных заведений: университет, пединституты, высшие технические учебные заведения.

ISBN 978-5-458-30864-9

ВВЕДЕНИЕ

I. О письменных испытаниях по математике

А. Московский ордена Ленина государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступающие в 1946—49 гг. на механико-математический и физический факультеты выполняли две письменные работы: одну по алгебре (с арифметикой, а в 1949 г. — с тригонометрией), вторую по геометрии с тригонометрией (в 1949 г. вторая письменная работа включала в себя только геометрию) (задачи №№ 1—94, 135—167, 183—215, 328—375, 386—405). Дополнительные варианты (№№ 376—385) были составлены для небольшого числа поступающих, которые по различным причинам не смогли пройти испытания в установленные сроки. Испытания на физико-техническом факультете проводились в два тура: сначала две письменные работы — одна по алгебре, другая — по геометрии с тригонометрией. Выдержавшие испытания в первом туре допускались ко второму; во втором туре проводилась одна письменная работа по всему школьному курсу математики; за 1947 год мне не удалось восстановить материал полностью и я привожу здесь всего 5 вариантов (№№ 168—182); за 1948 и 1949 гг. задачи первого тура даны под номерами: 216—287 и 406—441, а задачи второго тура — №№ 288—311 и 442—461.

Поступающим на химический, геолого-почвенный и экономический факультеты была предложена одна письменная работа по математике (№№ 55—94, 95—134, 312—327, 462—477, 478—493, 494—509, 510—521).

Б. Московский государственный педагогический институт имени Ленина

Поступающим на физико-математический факультет была предложена одна письменная работа по математике. Здесь мне удалось собрать задачи за последние три года (1947, 1948 и 1949 гг.), однако не полностью (№№ 522—613).

В. Московский областной педагогический институт

Поступающим были предложены задачи №№ 614—641.

Г. Московский ордена Ленина энергетический институт им. В. М. Молотова

Поступающим была предложена одна письменная работа по математике (№№ 642—681).

Д. Московский горный институт имени И. В. Сталина

Поступающим были предложены две письменные работы: одна по алгебре с арифметикой (№№ 682—725), другая — по геометрии с тригонометрией (№№ 726—757).

Е. Московский ордена Трудового Красного Знамени нефтяной институт им. акад. И. М. Губкина

Поступающим были предложены две письменные работы: по геометрии (№№ 758—789) и по алгебре (№№ 790—821).

Ж. Московское ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище им. Баумана

Поступающим были предложены две письменные работы по алгебре (№№ 822—866) и по геометрии с тригонометрией (№№ 867—914).

II. Об устных испытаниях

Порядок проведения устных испытаний дан в разделе II. Этот материал относится к механико-математическому и физическому факультетам Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова. Здесь в первую очередь следует иметь в виду следующее: устные экзамены проводились в точном соответствии с программами приемных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР, утвержденными Министерством высшего образования СССР.

Основные вопросы, которые предлагались поступающим, не выходили за рамки программы. Оценки выставлялись исключительно за ответы на такие вопросы. Однако, в целом ряде случаев поступающим, подготовленным очень хорошо, были предложены дополнительные вопросы повышенной трудности и даже вопросы очень трудные. В целом ряде случаев и на эти вопросы мы получали правильные ответы или же поступающий намечал правильное решение такого вопроса. Среди устных вопросов (№№ 915—965) читатель найдет много таких дополнительных вопросов повышенной трудности. Часть из них навеяна идеями «высшей» математики (неравенство Буняковского, вопросы делимости многочленов и др.) и тот факт, что многие из поступающих справлялись с такими вопросами, свидетельствует о возросшей подготовке по математике в школе, об умении школьников ориентироваться в несколько необычных и даже очень трудных задачах. Эти вопросы повышенной трудности будут интересны для многих, а потому я их поместил в настоящий сборник.

III. О подготовке поступающих

Нельзя не отметить возросшую подготовку по математике в школе за последние десятилетия. И это понятно: целая сеть учительских институтов, педагогических институтов подготовила за многие годы высококвалифицированных преподавателей. Многие учителя повышают свою квалификацию или продолжая учебу или принимая участие в работе институтов усовершенствования учителей, различных научных конференциях и т. п. Помощь учителям оказывается через методистов, инструкторов, научными обществами высших учебных заведений. Возросло качество преподавания математики в школе. Усилилась и приняла многообразные формы внеклассная и внешкольная работа: математические кружки в школе, олимпиады, кружки при высших учебных заведениях для школьников, лекции, организуемые научными и общественными организациями и т. д. Появилось (к сожалению, все еще недостаточно) много хороших и полезных книг, брошюр, статей. Многие из питомцев нашей средней школы являются крупными учеными, наиболее прогрессивными в мире. Большое количество научных работников, развивающих математическую науку в нашей стране и выдвинувших ее на первое место в мире, являются питомцами советской средней школы. Значит, постановка образования в средней школе идет по правильному пути, и преподаватели многих и многих школ могут заслуженно гордиться своими достижениями и успехами.

Мы, однако, не склонны закрывать глаза на известные, еще имеющие место недостатки в работе ряда школ; анализу ошибок и недочетов в подготовке учащихся по математике посвящена III глава сборника.

Подчеркиваем, что отмеченные в главе III дефекты, являются не массовыми (но и не единичными!).

Дополнительная литература, которая здесь приводится, не является, конечно, обязательной, так же как, например, не обязательно знать все соотношения между обратными тригонометрическими функциями, приведенными на стр. 110—112. И дополнительная литература и упомянутые формулы рекомендуются тем, кто хотел бы углубить свою подготовку.

Остановимся еще на одном обстоятельстве, которое важно для руководителей приемных испытаний. В сборнике есть довольно большое количество задач, решение которых естественно распадается на несколько частей; задачи подобного рода не ограничивают поступающего узкими рамками законченного решения, а позволяют показать поступающему свои знания в полной мере, проводя анализ решения достаточно глубоко. Много таких задач было предложено на физико-техническом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова. В качестве конкретного примера возьмем задачу № 200.

Мы, конечно, не могли требовать законченного решения, приведенного в сборнике на стр. 118—121 (да и оно-то, строго говоря, не закончено, если поставить себе целью исследовать так называемые «устранимые особенности»). Уже удовлетворительно, если поступающий получит решение в виде

$$x = n\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}, \quad x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}.$$

Очень хорошо, если он исключит отсюда значения $k=0$, $k=\pm 1$ и $k=-2$. Если же поступающий продвинет исследование еще дальше, по пути, указанному в сборнике, то такое решение нужно отметить как выдающееся.

РАЗДЕЛ I. ЗАДАЧИ
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ (1946 год)

Алгебра (с арифметикой)

Вариант 1

1. Производительность завода А составляет 40,96% производительности завода В. Число годового процента прироста продукции на заводе А на 30 больше числа годового процента прироста продукции на заводе В. Каков годовой процент прироста продукции на заводе А, если на четвертый год работы завод А даст то же количество продукции, что и завод В?

2. Упростить выражение:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},$$

если

$$x=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{2mn}{m-n}}.$$

3. Решить уравнение: $C_x^4=5$, где C_m^n обозначает число сочетаний из m элементов по n.

Вариант 2

4. Непромытый «золотой песок» содержит $k\%$ чистого золота. После каждой промывки «золотого песка» отходит $p\%$ содержащихся в нем примесей и теряется $q\%$ от имеющегося в песке золота. Сколько следует произвести промывок, чтобы число процентов содержания чистого золота в «золотом песке» было не меньше чем r?

5. Упростить выражение:

$$(x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}};$$

если

$$x=ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1};$$

6. Решить систему уравнений:

$$xy+yz=a^2,$$
$$yz+zx=b^2,$$
$$zx+xy=c^2.$$

Вариант 3

7. Находящийся под постоянным давлением газ, в количестве a $м^3$ последовательно пропускают через n фильтров, каждый из которых поглощает $p\%$ общего объема примесей, содержащихся в газе (поступающем в рассматриваемый фильтр). Затем газ поступает в резервуар, где находится b $м^3$ (отнесенного к тому же давлению) газа, содержащего $q\%$ (по объему) примесей. Какой процент примесей (по объему) допустим для газа до его очистки, если число процентов примесей в газовой смеси в резервуаре не должно превышать r?

8. Упростить выражение:

$$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2},$$

если $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$; причем $a>0$, $n>m>0$.

9. Решить уравнение:

$$\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}=2\sqrt{bx},$$

где

$$n>2k>0,\quad b>a>0.$$

Вариант 4

10. Средний годовой процент прироста народонаселения из года в год остается постоянным. Если бы годовой процент прироста увеличился на k, то через n лет численность населения была бы в два раза больше, чем при нормальных условиях. Определить годовой процент прироста населения.

11. Упростить выражение

$$\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

если

$$x=\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

12. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}.$$

Вариант 5

13. В резервуар, содержащий a литров воды, сначала через одну трубу вливают a литров p-процентного (по объему) раствора спирта, а затем после перемешивания, через другую трубу выливают равное количество (т. е. a литров) образующейся смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в резервуаре получился раствор спирта, крепостью не менее $q\%$ (по объему)?

14. Упростить выражение

$$\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}},$$

если $x=\frac{2mn}{n^2+1}$, причем $m>0$, $0<n<1$.

15. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b.$$

Вариант 6

16. Пусть s_1, s_2, s_3 суммы соответственно n_1 первых членов, n_2 первых членов и n_3 первых членов некоторой арифметической прогрессии. Показать, что

$$\frac{s_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{s_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{s_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

17. Упростить выражение

$$\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $x=4(a-1)$ в двух случаях: 1) $1<a<2$, 2) $a>2$.

18. Решить уравнение

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4.$$

Вариант 7

19. В геометрической прогрессии даны: $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n.

20. Упростить выражение

$$\left[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}}+(x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}-2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x=a\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$, причем $m>n>0$.

21. Решить систему уравнений:

$$x^2 + y^2 + x + y = 32,$$
$$12(x + y) = 7xy.$$

Вариант 8

22. Один из корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0,$$

коэфициент a которого неизвестен, равен 3. Найти два других корня этого уравнения.

23. Упростить выражение

$$\left[\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2},$$

если $x = \sqrt{ab}$, причем $a > b > 0$.

24. Решить систему уравнений:

$$x + y = 10,$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2{,}5\sqrt[6]{xy}.$$

Вариант 9

25. Доказать, что уравнение

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1,$$

где a и b действительные числа, не равные нулю, одновременно имеет лишь действительные корни.

26. Найти величину выражения

$$(1 + x^{-1})^{-2} + (1 - x^{-1})^{-2},$$

при $x = (1 - n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1 + n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$, если $n > 1$.

27. Решить систему уравнений

$$x^a = y^b,$$

$$\lg_c \frac{x}{y} = \frac{\lg_c x}{\lg_c y}.$$

Геометрия (с тригонометрией)

Вариант 1

28. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, равную l. Из трех плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны α, а третий равен β. Найти объем пирамиды.

29. Определить площадь равнобедренного треугольника, зная площади s_1 вписанного и s_2 описанного около него кругов.

30. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

Вариант 2

31. Через одно из ребер правильного тетраэдра проведена плоскость, наклоненная под углом α к противоположному (т. е. не пересекающемуся с данным ребром) ребру. Определить площадь полученного сечения тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a.

32. Зная углы треугольника, определить угол между медианой и высотой, проведенными из вершины какого-нибудь угла.

33. Решить уравнение

$$\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x).$$

Вариант 3

34. В параллелепипеде все его грани равные ромбы со сторонами a и острыми углами α. Определить объем этого параллелепипеда.

35. Через точку, лежащую внутри круга радиуса R, проведены две взаимно-перпендикулярные хорды, расстояния которых от центра круга равны a и b. Определить площадь части круга, ограниченной этими хордами и наименьшей дугой этой окружности, соединяющей их концы.

36. Упростить выражение

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

если

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Вариант 4

37. Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях (считая от вершины):

$$\frac{m_1}{n_1}, \ \frac{m_2}{n_2}, \ \frac{m_3}{n_3}.$$

В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

38. Две окружности радиусов R и r соприкасаются внешним образом. Определить радиус окружности, касающейся этих окружностей и их общей внешней касательной.

39. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3.$$

Вариант 5

40. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

41. Внутри угла 60° расположена точка на расстояниях a и b от его сторон. Найти расстояние от этой точки до вершины данного угла.

42. Решить систему уравнений:

$$x+y=\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1.$$

Вариант 6

43. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

44. Три окружности радиусов R_1, R_2, R_3 касаются внешне попарно друг друга. Найти радиус окружности, проходящей через точки касания.

45. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(40^\circ+x)\operatorname{ctg}(5^\circ-x)=\frac{2}{3}.$$

Вариант 7

46. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол θ между двумя смежными боковыми гранями.

47. Расстояние между центрами двух расположенных в одной плоскости кругов радиуса R равно d. Определить площадь части второго круга, лежащей вне площади первого круга.

48. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}.$$

Вариант 8

49. Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны A и B, а расстояние между этими сечениями равно d. Определить площадь сечения шара, параллельного сечениям A и B и делящего пополам расстояние между ними.

50. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

51. Решить уравнение

$$\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

Вариант 9

52. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α, а радиус основания конуса равен R. Найти радиус такой сферы с центром в вершине конуса, которая делила бы объем конуса пополам.

53. Определить площадь треугольника, если даны a и b — длины его сторон и t — длина биссектрисы угла между этими сторонами.

54. Решить уравнение

$$\sec x = 4 \sin x + 6 \cos x.$$

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(1946 год)

Вариант 1

55. Из сосуда, наполненного 96%-ным раствором кислоты, отлили 2,5 *л* и долили сосуд 80%-ным раствором той же кислоты; затем еще раз отлили 2,5 *л* и снова долили 80%-ным раствором кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Определить вместимость сосуда.

56. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые ребра пирамиды?

57. Решить систему уравнений

$$x^a = y^b,$$
$$a^x = b^y,$$

где $\qquad a \neq b, \quad a > 0, \quad b > 0.$

58. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Вариант 2

59. В 500 *кг* руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 *кг* примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20. Определить, какое количество железа осталось еще в руде.

60. Двугранный угол при основании правильной 3-угольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды.

61. Решить систему уравнений:

$$\lg_x (ay) = p,$$
$$\lg_y (bx) = q,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $pq \neq 1$.

62. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$