

Б. Боли, Дж. Уэйнер

Теория температурных напряжений

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Б11

Б11 **Б. Боли**
Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер – М.: Книга
по Требованию, 2014. – 512 с.

ISBN 978-5-458-50804-9

ISBN 978-5-458-50804-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

К наиболее значительным техническим достижениям последних двух десятилетий относятся развитие ядерных источников энергии и освоение на базе ракетной техники высоких скоростей полета. В обоих случаях приходится иметь дело с чрезвычайно высокими температурами, связанными с процессом получения энергии, а в случае высокоскоростных полетов также с явлением аэродинамического нагрева. Потребность в материалах, которые могли бы успешно функционировать при таких высоких уровнях температуры, является одной из наиболее актуальных и трудных задач, определяющих лицо современной техники. Трудность усугубляется тем, что, помимо высоких уровней температуры, в рабочих условиях часто возникают также значительные градиенты температуры. Следствием этих больших разностей температуры являются температурные напряжения, которые нередко представляют собой важный фактор, определяющий долговечность материала. В настоящей книге и рассматриваются температурные напряжения подобного рода.

Конечно, задача о температурных напряжениях возникает во многих более обычных областях и уже давно является предметом исследования. Так, еще в 1835 году, т. е. вскоре после того, как были сформулированы основные положения собственно теории упругости, Дюгамель занимался изучением задач упругости с учетом влияния изменения температуры. С другой стороны, исследования по влиянию температуры при неупругом поведении материалов, что в современных условиях использования высоких уровней температуры и напряжения представляет собой наиболее важную область, начались совсем недавно. Поэтому теория температурных напряжений охватывает область от классических тем до вопросов, находящихся еще в начальной стадии изучения. В настоящей книге сделана попытка на основе ряда исследований, выполненных несколько лет назад по поручению Райтвского авиационного исследовательского центра охватить оба типа вопросов. Однако, очевидно, имеются задачи, которые, несмотря на их важность, не рассмотрены в книге или рассмотрены слишком кратко. В изложении неизбежно подчеркнуты некоторые стороны вопросов, и естественно, что при этом авторы руководствовались собственными интересами и направлением деятельности. Тем не менее авторы постоянно стремились к тому, чтобы основные аспекты теории, ее обоснования и допущения, на которые она опирается, были описаны достаточно основательно и сопровождалась подробным решением типичных иллюстрирующих задач. Мы надеемся, что в результате этих наших усилий читатель получит достаточно прочную базу для собственной исследовательской работы и для дальнейшего изучения литературы по данному вопросу.

Книга делится на четыре части. В первой части (гл. 1—4) рассматриваются основные положения теории термоупругости, причем изложение

начинается с термодинамических аспектов вопроса и включает различные формулировки и методы решения задач термоупругости.

Вторая часть (гл. 5—7) касается теории теплопередачи. В гл. 5 обсуждаются физические основы вопроса с тем, чтобы сделать возможно более понятными допущения, вводимые в математические формулировки задач различного типа. Остальные главы второй части посвящены методам решения краевых задач теории теплопроводности.

В третьей части (гл. 8—13) излагаются вопросы, относящиеся к тому аспекту анализа температурных напряжений, который имеет более практический характер. При этом главным образом используется теория сопротивления материалов, однако решения сопоставляются также и с более точной теорией термоупругости. В этой части приводятся методы расчета балок, пластин и различных составных конструкций, а также рассматриваются вопросы устойчивости.

Наконец, в четвертой части (гл. 14—16) показано, каким образом можно ввести температурные эффекты в теорию неупругих деформаций. Так, в гл. 14 рассматривается общая природа вводимых при этом допущений, в гл. 15 обсуждаются задачи упруго-вязкого поведения тел, а в последней главе — задачи пластического течения.

В общем части 1 и 4 касаются главным образом теоретических аспектов проблемы, в то время как части 2 и 3 — практических. Хотя в книге встречаются частые взаимные ссылки от одной части к другой, все же части 2 и 3 имеют в значительной степени самостоятельное содержание и требуют менее глубокой теоретической подготовки, чем части 1 и 4. Таким образом, книга предназначается как для научных работников, так и для инженеров, а также, разумеется, для студентов; и хотя неизбежно найдутся вопросы, которые покажутся некоторым изложенными недостаточно полно, авторы надеются, что изложение основных положений предмета в единой книге с общих и теоретически обоснованных позиций принесет определенную пользу.

*Бруно А. Боли
Джером Х. Уэйнер*

Колумбийский университет,
март 1960

Ч А С Т Ь 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Основы механики и термодинамики

1.1. Введение. В первой главе рассматриваются математические зависимости, которыми описывается поведение твердого тела при совместном воздействии нагрева и внешних нагрузок. Как и все исследования, относящиеся к сплошным средам, настоящий анализ опирается на основные представления, вытекающие из двух различных наук — механики и термодинамики. Поскольку аналогичные вопросы механики рассматривались при решении задач о поведении тел при постоянной температуре и тщательно обсуждались в многочисленных работах по теории упругости, здесь они затрагиваются лишь вкратце с частыми ссылками на существующую литературу. Что касается термодинамических аспектов задачи, то их рассмотрение становится существенным только при решении задач, связанных с непостоянной температурой; поэтому в большинстве руководств по теории упругости этот вопрос затрагивается лишь поверхностно. Ввиду этого значительную часть настоящей главы пришлось посвятить изложению принципов термодинамики, начиная с относящейся к равновесным системам классической теории, которая затем используется как основа для соответствующего видоизменения постулатов применительно к неравновесным системам, которым, собственно, и посвящена данная книга.

Таким образом, излагаемая в настоящей главе теория является основой для всех приведенных в книге последующих решений задач линейной термоупругости. На нее опирается приведенная в п. 1.14 общая формулировка краевой задачи связанной теории термоупругости. Упрощения и видоизменения в постановке указанной задачи, к которым обычно приходится прибегать, чтобы получить практически приемлемые решения, излагаются в последующих главах. Дополнительно в п. 1.3 кратко рассмотрен термодинамический подход к теории линейного вязко-упругого материала. Эта теория введена здесь лишь попутно, а специальное обсуждение различного рода задач неупругого поведения материалов в другой постановке откладывается до гл. 14.

1.2. Обозначения. В данной и трех последующих главах будет удобно использовать компактную систему обозначений, которую часто называют индексной. Приведем здесь для сведения краткое описание указанной системы¹⁾. Так как эти обозначения используются при обсуждении вопросов

¹⁾ Общие сведения по используемым ниже разделам векторного и тензорного анализа можно найти, например, в книге Джеффриса [1]. Для простоты будем рассматривать только одинаково ориентированные (правые) ортогональные декартовы системы координат.

общего теоретического характера, не касающихся конкретных геометрических форм или картин нагружения, то все рассматриваемые здесь величины достаточно отнести к ортогональной декартовой системе координат. Обозначим координатные оси этой системы через x_1 , x_2 и x_3 , или, короче, x_i , $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим вектор $\mathbf{f}$ с компонентами f_1 , f_2 и f_3 в направлении осей x_1 , x_2 и x_3 соответственно. Проще можно сказать, что $\mathbf{f}$ — это вектор с компонентами f_i , $i = 1, 2, 3$; или, еще более просто, вектор f_i . Очевидно, что не играет роли, какой буквой пользоваться в качестве нижнего индекса, при условии, конечно, что предварительно оговорены значения, которые она может принимать. В дальнейшем, если нет других пояснений, принято, что нижние латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, причем это специально не оговаривается; с другой стороны, греческие нижние и верхние индексы не обозначают компонент вектора, и области, на которые они распространяются, должны быть в каждом случае указаны.

Внутреннее, или скалярное, произведение $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ двух векторов (вектора $\mathbf{f}$ с компонентами f_i и $\mathbf{g}$ с компонентами g_i) по определению равно

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = \sum_{i=1}^3 f_i g_i. \quad (1.2.1)$$

Так как суммирование такого вида часто встречаются, то принято пользоваться упрощенным обозначением, когда повторяющиеся индексы автоматически подразумевают сложение членов, а знак суммы опускается. Так, равенство (1.2.1) можно сокращенно записать в виде

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_i g_i. \quad (1.2.1a)$$

Здесь опять несущественно, какой буквой пользоваться для повторяющегося нижнего индекса в равенстве (1.2.1a). Подобный индекс называют связанным¹⁾, так как он должен принимать *все три* значения в противоположность свободному индексу, который принимает какое-либо одно из трех значений 1, 2, 3.

Внешнее, или векторное, произведение $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ можно представить в индексном выражении с помощью альтернативного тензора, компоненты которого γ_{ijk} определяются следующим образом²⁾:

$$\gamma_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } ijk \text{ — четная перестановка } 123, \\ 0, & \text{если любые два индекса из } ijk \text{ одинаковы} \\ -1, & \text{если } ijk \text{ — нечетная перестановка } 123. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Тогда $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ представляет собой вектор $\mathbf{h}$ с компонентами h_i , где

$$h_i = \gamma_{ijk} f_j g_k \quad (1.2.3)$$

или в развернутом виде $h_1 = (f_2 g_3 - f_3 g_2)$, $h_2 = (f_3 g_1 - f_1 g_3)$ и $h_3 = (f_1 g_2 - f_2 g_1)$.

Если с каждой точкой некоторой области пространства связан переменный вектор, то говорят о векторном поле, которое можно обозначать симво-

¹⁾ В нашей литературе такой индекс называется немым. — *Прим. ред.*

²⁾ Обычно для альтернативного тензора применяются символы ϵ_{ijk} или ϵ_{ijk} , известные так же как перестановочные символы (или символы Леви-Чивита. — *Прим. перев.*). Принятое в тексте обозначение введено во избежание путаницы с компонентами деформации. В выражении (1.2.2) под четными перестановками 1 2 3 понимаются 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, под нечетными 1 3 2, 2 1 3, 3 2 1. По общей терминологии четные перестановки получаются в результате четного числа изменений порядка чередования индексов, нечетные — при нечетном числе изменений. Можно доказать, что четный или нечетный характер числа требующихся изменений в чередовании индексов (т. е. их тождественность) не зависит от порядка, в котором эти изменения проводятся.

лами $\mathbf{f}(P)$ или $f_i(x_1, x_2, x_3)$, где $\mathbf{f}(P)$ — вектор с компонентами f_i , относящийся к точке P с координатами x_1, x_2, x_3 . Если указанные функции дифференцируемы, то можно показать, что девять частных производных $\partial f_i / \partial x_j$, $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$ представляют собой компоненты ортогонального тензора второго ранга. В индексных обозначениях для выражения частной производной по пространственной координате принято вводить запятую. т. е.

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (1.2.4)$$

Число свободных индексов, присутствующих в общей компоненте, всегда указывает на ранг тензора, как, например, в приведенном выражении. Так, внутреннее произведение двух векторов представляет собой, согласно формуле (1.2.1а), тензор нулевого ранга, или скаляр, в то время как внешнее произведение двух векторов [формула (1.2.3)] является тензором первого ранга, или вектором. Указанное обстоятельство полезно иметь в виду при проверке тензорного порядка уравнения, поскольку суммировать можно тензоры только одинакового ранга. Отметим, что в подобном уравнении для свободных индексов в каждом из членов следует пользоваться одинаковыми нижними индексами, что указывает на суммирование соответствующих компонент каждого тензора.

1.3. Деформация. Тензор малых деформаций. Когда при перемещении частиц сплошной среды расстояния между ними меняются, среду называют деформируемой. Представление о деформации является чисто геометрическим или кинематическим и не зависит от природы среды и от причин, вызывающих деформацию. В данной главе будут рассматриваться только такие деформации, которые подчиняются ограничениям, принятым в линейной теории упругости¹⁾.

Пусть перемещение частиц в точке P с координатами x_i в момент времени t описывается вектором $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Тогда мера деформации при принятых выше допущениях определится так называемым тензором малых деформаций с компонентами ε_{ij} , равными

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.3.1)$$

Вектор скорости v_i частицы равен

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (1.3.2)$$

где точкой над функцией обозначается частная производная по времени.

Компоненты тензора вращения ω_{ij} определяются как

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (1.3.3)$$

так что

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad (1.3.4)$$

и, следовательно, это антисимметричный тензор. В системе трех измерений указанный тензор имеет, если не учитывать знака, только три различные не равные нулю компоненты, и без ущерба для общности его можно вы-

¹⁾ Обсуждение указанных ограничений можно найти у В. В. Новожилова [2]. Исследование термодинамики сплошных сред с точки зрения настоящей главы без каких-либо ограничений природы деформаций можно найти в работе авторов [3].

разить трехкомпонентным вектором. Это выполняется с помощью альтернативного тензора. Пусть

$$\omega_k = \frac{1}{2} \gamma_{kji} \omega_{ij}, \quad (1.3.5)$$

так что

$$\omega_1 = \omega_{32} = -\omega_{23} \quad \text{и т. д.}$$

Вектор ω с компонентами ω_i называют вектором бесконечно малого вращения. Исходя из геометрических представлений линейной теории упругости можно показать [2], что при заданной деформации среднее вращение элемента объема определяется значением вектора ω в рассматриваемой точке иначе говоря, элемент поворачивается на угол $|\omega|$ относительно вектора ω как вокруг оси, в право-винтовом направлении для правой системы координат. Умножая обе части формулы (1.3.5) на γ_{rsk} и используя тождество

$$\gamma_{rsk} \gamma_{kji} = \delta_{rj} \delta_{si} - \delta_{ri} \delta_{sj}, \quad (1.3.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера [см. ниже формулу (1.4.9.)], получаем соотношение, обратное (1.3.5):

$$\omega_{sr} = \gamma_{rsk} \omega_k. \quad (1.3.7)$$

1.4. Уравнения движения. Уравнения движения выражают собой законы механики Ньютона, и поэтому их также можно с равным основанием применять к любым средам и процессам. Рассмотрим тело произвольной природы, занимающее замкнутую область $D + B$, где B — ограничивающая ее поверхность¹⁾. В каждой точке P поверхности B приложена поверхностная нагрузка $S_i^{(n)}$ (сила, отнесенная к единице площади), причем верхний индекс n относится к направлению внешней нормали n_i поверхности B в точке P , а нижний индекс по-прежнему указывает на координатное направление. На каждый элемент массы тела действует объемная нагрузка f_i (сила, отнесенная к единице массы), включающая инерционные силы. В соответствии с законами механики требуется, чтобы результирующая сила и результирующий момент всех действующих на тело сил были равны нулю. Эти условия приводят к следующим двум системам уравнений²⁾:

$$\int_D \rho f_i dV + \int_B S_i^{(n)} dA = 0, \quad (1.4.1)$$

$$\int_D \rho \gamma_{ijh} f_j x_k dV + \int_B \gamma_{ijh} S_j^{(n)} x_k dA = 0, \quad (1.4.2)$$

где $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность материала в точке пространства с координатами x_k .

Для дальнейшего анализа необходимо ввести гипотезу о напряжениях согласно которой на любой элемент поверхности внутри тела действуют силы, являющиеся по отношению к этому элементу поверхностной нагрузкой законы движения в форме уравнений (1.4.1) и (1.4.2), включающие указанную нагрузку, применимы к любой области внутри тела так же, как и к телу

¹⁾ Таким образом, через D обозначается открытая область.

²⁾ Уравнение равновесия для моментов записано в предположении, что момент от объемной нагрузки, отнесенный к единице объема, равен нулю. Этот момент может отличаться от нуля для некоторых систем напряжений Максвелла, когда вводятся объемные нагрузки, вызванные электрическим полем. См., например, [4].

в целом. Оставим для нагрузок¹⁾ по внутренним поверхностям то же обозначение, что и для действительных поверхностных нагрузок. Тогда, если n_i — нормаль к поверхности внутреннего элемента, то под $\overset{(n)}{S}_i$ следует понимать отнесенную к единице площади силу, которая представляет собой результат воздействия материала, находящегося со стороны положительного направления нормали, на материал, расположенный по отрицательную сторону нормали. В соответствии с указанной выше гипотезой можно отнести уравнение (1.4.1) к бесконечно малому тетраэдру, откуда устанавливается²⁾, что при ограниченных объемных нагрузках существует тензор напряжений σ_{ij} , который как для внутренней, так и для граничной поверхности удовлетворяет условию

$$\overset{(n)}{S}_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (1.4.3)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (1.4.1), находим

$$\int_D \varrho f_i dV + \int_B \sigma_{ij} n_j dA = 0. \quad (1.4.4)$$

Согласно теореме о дивергенции³⁾, интеграл по поверхности можно преобразовать в интеграл по объему D , что приводит к уравнению

$$\int_D [\sigma_{ij,j} + \varrho f_i] dV = 0. \quad (1.4.5)$$

Так как D — произвольная часть тела, то отсюда вытекает, что везде, где подинтегральная функция непрерывна, справедливо уравнение

$$\sigma_{ij,j} + \varrho f_i = 0. \quad (1.4.6)$$

Аналогичным образом подставляя соотношение (1.4.3) в уравнение (1.4.2), получаем

$$\int_D \varrho \gamma_{ijk} f_j x_k dV + \int_B \gamma_{ijk} \sigma_{jm} n_m x_k dA = 0. \quad (1.4.7)$$

На основании теоремы о дивергенции поверхностный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_B \gamma_{ijk} \sigma_{jm} n_m x_k dA &= \int_D (\gamma_{ijk} \sigma_{jm} x_k)_{,m} dV = \\ &= \int_D (\gamma_{ijk} \sigma_{jm,m} x_k + \gamma_{ijk} \sigma_{jm} \delta_{km}) dV. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Здесь использовано соотношение $x_{k,m} = \delta_{km}$, где δ_{km} — символ Кронекера;

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k \neq m. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Подставляя (1.4.8) в уравнение (1.4.7), получаем с учетом (1.4.6) уравнение

$$\int_D \gamma_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (1.4.10)$$

¹⁾ Речь идет о напряжениях в среде. — Прим. ред.

²⁾ См., например, работу Сокольников И. С. [5].

³⁾ Содержание теоремы о дивергенции рассматривается в п. 7.

Так как полученное выражение относится к любой внутренней области и к каждому значению i , то

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.4.11)$$

Уравнения (1.4.6) и (1.4.11) являются уравнениями движения, применимыми в соответствии с указанными выше предположениями к любой сплошной среде. Если помимо объемных сил F_i (отнесенных к единице массы), вызванных каким-либо внешним воздействием, возникают инерционные силы, то следует считать

$$\dot{f}_i = F_i - \ddot{u}_i, \quad (1.4.12)$$

и уравнение (1.4.6) примет форму

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.4.13)$$

1.5. Термодинамика. Основные положения. В качестве следующего шага развития теории требуется установить связь между функциями, описывающими деформации и напряжения. Указанная связь зависит от энергии и энтропии системы и потому должна изучаться в рамках термодинамики. Ниже, при изложении вопросов термодинамики, основной упор делается на представления, которыми широко пользуются при изучении сплошных сред, в том числе на эффекты неравновесности и рассеивания. Указанные представления охватывают следующие четыре основных раздела: 1) основные положения, рассматриваемые далее в настоящем пункте; 2) равновесные системы (п. 1.6); 3) неравновесные системы (п. 1.7—1.11) и 4) специальные приложения к упругим и упруго-вязким телам (п. 1.12—1.14).

Литература по термодинамике, разумеется, очень обширна, и трудно привести полный перечень работ, которыми обычно пользуются при ее изучении. В качестве общих работ по классической термодинамике можно рекомендовать книги Земанского М. В., Кинана, Пипларда [6—8], а по термодинамике необратимых процессов — работы Пригожина И., Де Гроота, Био [9—11]¹⁾.

Определенную часть вещества, подлежащую изучению, будем называть системой. Ограничимся рассмотрением закрытых систем, т. е., таких, которые не обмениваются массой с окружающей средой. Иногда будет вводиться дальнейшее ограничение, согласно которому отсутствует взаимодействие между системой и окружающей средой; в этом случае систему называют изолированной. Предполагается, что система занимает замкнутую область пространства, а ее вещество химически инертно.

Рассмотрим систему, все части которой находятся в состоянии макроскопического покоя. Если имеются все сведения, полностью характеризующие систему в изучаемом аспекте, то считают, что известно ее состояние. Указанные сведения представляются в форме числовых значений нескольких величин, называемых параметрами состояния, каждым из которых описывается различное свойство системы. Некоторые из этих свойств, называемые экстенсивными, имеют аддитивный характер, например объем, в то время как другие характеризуют интенсивность, например давление, и их называют интенсивными. Если значения параметров состояния подобной системы не зависят от времени, то система находится в состоянии термодинамического равновесия. Систему называют равновесной, если значения интенсивных параметров состояния одинаковы во всех точках тела.

¹⁾ Дальнейшие ссылки приведены в п. 7.7.