А. П. Савин

Энциклопедический словарь юного математика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 82-053.2
ББК 74.27
А11

А. П. Савин
А11 Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин – М.: Книга по Требованию, 2024. – 352 с.

ISBN 978-5-458-39328-7

Словарь поможет читателю получить сведения об истории развития математической науки, основных направлениях ее приложений на практике, познакомит с основными математическими понятиями.Одна из задач книги заинтересовать школьников этой древней и важнейшей ныне наукой, помочь в формировании логического мышления, в усвоении учебной программы. В словаре рассказывается о выдающихся ученых-математиках, приведены занимательные математические задачи.Для школьников среднего и старшего возраста.

ISBN 978-5-458-39328-7

К ЧИТАТЕЛЯМ

В наши дни каждый школьник получает первичные знания по математике. Еще до школы ребята учатся считать, а затем на уроках получают представление о неограниченности числового ряда, об элементах геометрии, о дробных и иррациональных числах, изучают начала алгебры и математического анализа. Эти знания абсолютно необходимы каждому молодому человеку, независимо от того, кем он станет в будущем: рабочим, инженером, механизатором, врачом, офицером или ученым.

Зачатки счета теряются в глубине веков и относятся к тому периоду истории человечества, когда еще не было письменности. Писать человек научился тогда, когда он довольно далеко продвинулся в умении считать. Математические знания в далеком прошлом применялись для решения повседневных задач, и именно практика в значительной степени руководила всем дальнейшим развитием математики. И в наше время, как и в далеком прошлом, практика выдвигает перед математикой сложные задачи. Именно в этом причина современного бурного развития математики, появления многих новых ее ветвей, позволяющих глубже и детальнее изучать явления окружающего нас мира и решать конкретные практические задачи, которые неизбежно возникают в связи с прогрессом инженерного дела и науки. Чтобы решить их, необходимо не только безукоризненно владеть теми знаниями, которые человечество приобрело в прошлом, но и находить, открывать новые средства математического исследования.

Не сомневаюсь, что многим читателям этой книги самим придется принять участие в решении проблем научно-технического прогресса: конструировать новые самолеты, космические ракеты, создавать системы связи, исследовать законы природы и использовать их для нужд практики. Чем больше и глубже нашим читателям удастся усвоить дух математики и научиться использовать ее методы хотя бы в простейших ситуациях, тем дальше и быстрее они сумеют продвинуться в использовании математических средств в той области деятельности, которой займутся после школы.

В ранней юности я мечтал стать кораблестроителем: хотелось конструировать корпуса судов идеальной формы, искать возможности увеличения их скорости без увеличения мощности двигателей. Однако я не стал кораблестроителем, а выбрал математику, но это не отдалило меня от осуществления давней мечты, поскольку математическими методами мне удалось решить ряд задач, способствующих развитию морского дела. Математика дала возможность заниматься и другими практическими вопросами, которые требовали не только применения уже имеющихся математических средств, но и развития самой математической науки. Что принесло большую радость, сказать трудно, поскольку удовлетворение получаешь только тогда, когда преодолеваешь трудности, когда удается найти такой путь, который приводит к решению задачи, казавшейся раньше неразрешимой. Убежден, что многие читатели этой книги в будущем не раз испытают ни с чем не сравнимое наслаждение от благополучного завершения работы над сложной проблемой, теоретической или производственной. Это убеждение связано с тем, что занятия математикой, решение математических проблем требуют непрерывного размышления, поиска, а не просто запоминания или применения уже готового приема.

Последние три столетия дали науке ряд блестящих математических результатов: решены три классические задачи древности, над которыми трудились ученые в течение четырех тысячелетий,– квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба, построены новые математические науки, позволившие открыть неизвестные ранее объекты математического познания; достигнута огромная гибкость математических понятий и методов исследования, способных охватить все многообразие проблем естествознания, технических и социальных дисциплин. Математика превратилась в необходимое орудие познания, без которого многие естествоиспытатели не мыслят себе саму возможность развития их областей знания.

Датский физик Нильс Бор говорил, что математика является значительно большим, чем наука, поскольку она является языком науки. И действительно, математика стала для многих отраслей знания не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Каждому ясно, что без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс физики, инженерного дела и организации производства, так и остались бы нерешенными многие принципиальные проблемы авиации и космонавтики, метеорологии и радиотехники. В наши дни без предварительных расчетов на заводе не начнут производства ни одной сложной машины, не станут модернизировать технологический процесс. С развитием науки возросло количество экспериментальных исследований. В связи с этим потребовалась разработка математической теории эксперимента, позволяющей так организовать наблюдения, чтобы при минимальном их числе получать максимальное количество информации об интересующем нас явлении или процессе. Роль математики в современном познании, современной практической деятельности так велика, что наше время называют эпохой математизации знаний.

Современная наука далеко продвинулась по пути изучения явлений макро- и микромира. Совершены первые полеты в космос, и в их осуществлении математика занимает почетное место. Расчет конструкций ракет, траекторий движения, построение моделей бомбардировки поверхности ракеты метеоритами и метеоритной пылью – это лишь малая часть тех отраслей естествознания и техники, где широко и по существу дела использовалась математика. Достаточно много говорит и тот факт, что о существовании ряда элементарных частиц удалось узнать не опытным путем, а из результатов математических расчетов.

Но для того чтобы математика и далее оставалась орудием исследования новых глубоких явлений микромира (и не только микромира), она должна систематически развивать и оттачивать разработанные ею методы исследования и создавать новые. Для этого абсолютно необходим приток в науку молодых сил, способных принести с собой и новые идеи.

Выявление и развитие способностей молодежи, привлечение их к творческому труду – одна из основных задач школы. Стране крайне необходимы творцы нового во всех областях деятельности, в том числе и в математике. Для этого делается многое: введены факультативные занятия, созданы математические классы и математические школы, издается обширная литература для школьников, в которой рассматриваются вопросы, требующие серьезного размышления, предлагаются нестандартные задачи.

Хотелось бы сказать, что хорошее математическое образование и развитие математических способностей необходимы не только тому, кто впоследствии займется научными исследованиями в области математики, физики, астрономии или инженерного дела, но и тому, кто станет экономистом, организатором производства, агрономом, квалифицированным рабочим. Математический стиль мышления, умение рассуждать строго, без логических скачков нужны также будущим юристам и историкам, биологам и лингвистам, врачам. В связи с моими научными интересами одно время мне нужно было работать с врачами. Хотелось бы отметить, что врачи, когда ставят диагноз, проявляют исключительную логическую скрупулезность при выводе заключений. Порой казалось, что я нахожусь среди коллег-математиков. Недаром многие врачи считают абсолютно необходимым для прогресса медицины привлекать не только физику, химию и биологию, но и математику.

Мой более чем пятидесятилетний педагогический опыт показал мне, что математические способности встречаются гораздо чаще, чем мы обычно думаем. Как правило, неудачи с усвоением школьного или вузовского курса математики происходят не из-за отсутствия математических способностей, а из-за отсутствия привычки систематически работать и доводить познаваемое до понимания, а не до запоминания. Часто случается, что учащийся переходит к последующим частям курса без хорошего усвоения предшествующих, он не проникает в суть фундаментальных понятий и идей, лежащих в основе всего изложения. А нередко учащиеся стремятся набить руку в пользовании определенными алгоритмами без проникновения в их смысл. Часто жалобы на отсутствие математических способностей приходится слушать от тех, кто учится с ленцой, которая мешает преодолевать трудности, встречающиеся на пути познания. А ведь только в самостоятельном преодолении препятствий вырабатывается характер и появляется уверенность в собственных силах.

Но мало выявить способности, необходимо создать условия для их развития, для творческого поиска. Вы, сегодняшние школьники, через несколько лет возьмете на свои плечи трудовые заботы отцов и матерей. Вам придется не только применять на практике достижения науки и техники, экономики и культуры, но и способствовать их прогрессу. Для того чтобы стать творцом, необходимо пройти своеобразную школу творчества. Она начинается в обычной школе и продолжается в кружках, при чтении специальной литературы, в размышлениях над нестандартными задачами, в самостоятельном преодолении трудностей, в воспитании привычки напряженно работать.

Жизнь – изумительный дар природы, но, чтобы она приносила радость, нужно научиться трудиться с увлечением, стремиться облегчить свой труд и усовершенствовать его привычные формы. Миллионы граждан нашей страны принимают участие в изобретательстве, совершенствовании орудий труда и методах их использования. Такая привычка мыслить, открывать новое в обыденном окажет вам огромную помощь в практической работе и позволит превратить труд во внутреннюю потребность.

В Постановлении Пленума ЦК КПСС от 18 февраля 1988 г. подчеркивается: «Важно предоставить каждому человеку возможность постоянного пополнения знаний через разнообразные формы обучения... Стремление к овладению знаниями, духовному росту должно поощряться, получать общественное, государственное признание... Следует уделять первостепенное внимание развитию индивидуальных способностей учащихся, расширять дифференцированное обучение учащихся в соответствии с их запросами и склонностями».

Мы убеждены, что предлагаемая книга внесет свой вклад в большое всенародное дело воспитания нового человека, способного отдавать свои знания и силы решению больших задач, стоящих перед нашим народом.

В добрый путь, друзья!

Академик АН УССР
ГНЕДЕНКО Б. В.

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Дорогие ребята! В этой книге собрано около 200 статей, посвященных основным понятиям математики и ее приложениям.

Ряд статей словаря, такие, как «Группа», «Геометрические преобразования», «Топология», знакомят с новыми областями математики, бурно развивающимися в последние десятилетия. Не забыты и математические развлечения, в том числе и знаменитый венгерский кубик.

В нашей стране много делается для того, чтобы математически одаренные юноши и девушки могли развивать свои способности. Проводятся математические олимпиады, создаются летние математические школы. Об этом вы также сможете прочитать в статьях словаря.

Книга познакомит вас с жизнью и творчеством великих математиков всех времен, с современными и русскими математиками.

Словарь иллюстрирован многочисленными схемами и графиками, которые дополняют текст. Образные иллюстрации, которые даны, например, к статьям «Алгебра», «Арифметика», «Анализ математический», «Геометрия», «Функция», тесно связаны с содержанием статьи, и понять их можно, только прочитав статьи.

Статьи в книге расположены в алфавитном порядке их названий. Если же интересующее вас понятие не является названием статьи словаря, то следует посмотреть в алфавитный указатель, находящийся в конце книги.

Некоторые слова в тексте набраны курсивом. Это значит, что в словаре имеется статья с таким названием. Ряд статей, в частности биографии ученых, даны не в алфавитном порядке, а как приложения к другим статьям. Чтобы найти их, также удобно воспользоваться алфавитным указателем, где даны страницы, на которых напечатаны эти статьи. В конце книги имеется список рекомендованной литературы.

А,Б

АКСИОМА

Начальные геометрические сведения дошли до нас из глубокой древности. Например, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму прямоугольника, треугольника, трапеции, приведены в древнеегипетских математических папирусах, относящихся к 2000 г. до н.э., в клинописных таблицах Древнего Вавилона.

Начальные геометрические знания были добыты опытным путем. Получение новых геометрических фактов при помощи рассуждений (*доказательств*) началось от древнегреческого ученого Фалеса (VI в. до н.э.). Ему приписывают установление свойств равнобедренного треугольника, доказательство равенства вертикальных углов, доказательство того, что вписанный угол, опирающийся на диаметр,– прямой, и др. Фалес, по-видимому, применял поворот части фигуры и перегибание чертежа, т.е. то, что в наши дни называют перемещениями, или движениями (см. *Геометрические преобразования*).

Постепенно доказательства приобретают в геометрии все большее значение. К III в. до н.э. геометрия становится дедуктивной наукой, т.е. наукой, в которой большинство фактов устанавливается путем вывода (дедукции), доказательства. К этому времени относится книга «Начала», написанная древнегреческим ученым Евклидом (см. *Евклид и его «Начала»*). В ней доказываются свойства параллелограммов и трапеций, приведена теорема Пифагора (см. *Пифагора теорема*), изучается подобие многоугольников, рассматриваются многие другие геометрические факты.

В этой книге Евклид проводит аксиоматический взгляд на геометрию. Точка зрения Евклида была следующей. Взяв какую-либо теорему, можно проследить, какие ранее доказанные теоремы были использованы при ее выводе. Для этих ранее доказанных теорем в свою очередь можно выделить те более простые факты, из которых они выводятся, и т.д. В конце концов получается набор некоторых фактов, которые позволяют доказать все изучаемые теоремы геометрии. Эти выделенные факты настолько просты, что не возникает вопроса о необходимости их вывода. Их назвали аксиомами (это греческое слово означает «удостоенное, принятое положение»). Весь набор аксиом (система) называется аксиоматикой. Таким образом, аксиомы–это первоначальные факты геометрии, которые принимаются без доказательства и позволяют вывести из них все дальнейшие факты этой науки. Утверждения, выводимые из аксиом, называют *теоремами*.

Среди сформулированных Евклидом аксиом имеются, например, следующие: «через две точки можно провести прямую»; «порознь равные третьему равны между собой»; «если в плоскости даны прямая и лежащая вне этой прямой точка, то через эту точку можно провести в плоскости не более одной прямой, которая не пересекается с данной» (последняя из этих аксиом–аксиома параллельности–у Евклида формулировалась иначе).

Аксиомы есть не только в геометрии, но и в алгебре, и других математических науках. Например, равенства:

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a, & ab=ba, \\ a+(b+c)=(a+b)+c, & a(bc)=(ab)c, \\ a+0=a, & a\cdot 1=a, \\ a+(-a)=0, & a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1,\ (a\neq 0), \\ & a(b+c)=ab+ac, \end{array}$$

выражающие свойства сложения и умножения, являются в алгебре аксиомами: они принимаются без доказательства и используются для вывода новых фактов (для доказательства теорем). Например, с помощью аксиом доказывают формулы квадрата суммы или разности, правила умножения многочленов, формулу суммы членов геометрической прогрессии и т.д.

В каждой математической науке аксиомы возникают в процессе ее долгого и сложного исторического развития. Первоначальные факты накапливаются в результате практической деятельности человека. Их проверяют, уточняют, систематизируют. Исключают из них те, которые могут быть выведены из других первоначальных фактов. Иногда обнаруживается, что оставшийся список простейших фактов (аксиом)–неполный, т.е. этих фактов недостаточно для вывода всех теорем, и тогда к этому списку добавляют недостающие аксиомы. В результате и получается полный набор аксиом (аксиоматика).

После Евклида математики многих поколений стремились улучшить, дополнить его аксиоматику геометрии. Большую роль сыграли работы современника Евклида, древнегреческого ученого *Архимеда*, который сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению геометрических величин. Из ученых более позднего времени существенный вклад в усовершенствование аксиоматики геометрии внесли русский математик Н.И. Лобачевский, французский математик М. Паш, итальянский математик Д.Ж. Пеано. Логически безупречный список аксиом геометрии был указан на рубеже XIX и XX вв. немецким математиком *Д. Гильбертом.*

АКСИОМАТИКА И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

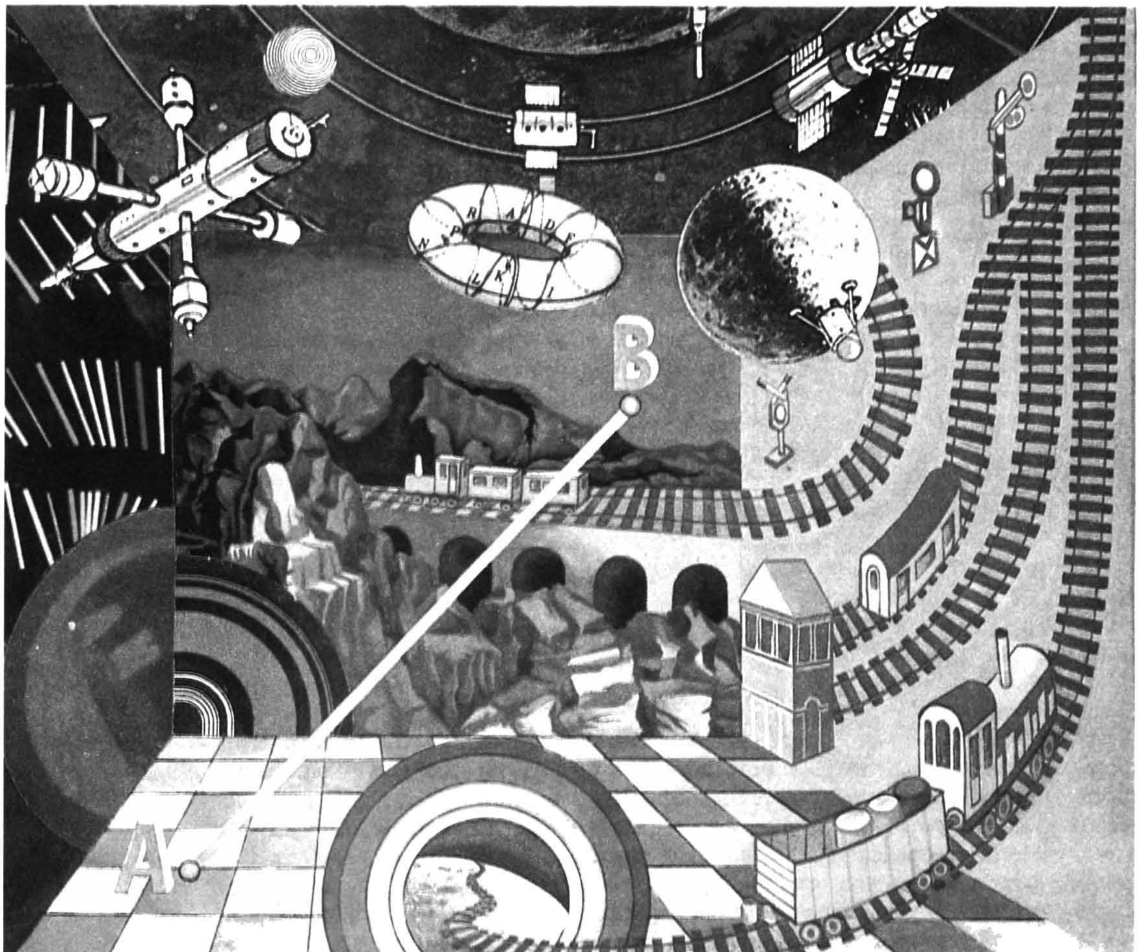
Аксиоматика – система *аксиом* той или иной математической науки. Например, аксиоматика элементарной геометрии содержит около двух десятков аксиом, аксиоматика числового *поля* – 9 аксиом. Наряду с ними важнейшую роль в современной математике играет аксиоматика *группы*, аксиоматика метрического и векторного пространств (см. *Вектор*) и др. Советским математикам С.Н. Бернштейну и А.Н. Колмогорову принадлежит заслуга аксиоматического описания теории вероятностей (см. *Вероятностей теория*). Десятки других направлений современной математики

«Аксиомы обладают наивысшей степенью общности и представляют начала всего».
Аристотель

также развиваются на аксиоматической основе, т.е. на базе соответствующей системы аксиом (аксиоматики).

Аксиоматический метод – важный научный инструмент познания мира. Большинство направлений современной математики, теоретическая механика и ряд разделов современной физики строятся на основе аксиоматического метода. В самой математике аксиоматический метод дает законченное, логически стройное построение научной теории. Не меньшее значение имеет и то, что математическая теория, построенная аксиоматически, находит многократные приложения в математике и естествознании.

Во многих разделах современной математики применяются метрические пространства как совокупности элементов произвольной природы, в которых для каждой пары a и b определено число $\rho(a, b)$, называемое расстоянием между a и b и удовлетворяющее аксиоматике, состоящей всего из трех аксиом:
1) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
2) $\rho(a, b) \geqslant 0$, причем
$\rho(a, b) = 0$ в том, и только в том случае, если $a = b$;
3) $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(b, c)$.



В приложениях математики рассматриваются метрические пространства, «точками» которых могут являться линии, фигуры, траектории полета космических кораблей, плановые задания заводов и т.д. Доказав (на основе аксиом) какую-либо теорему о метрических пространствах, можно утверждать, что она будет справедлива для метрических пространств, применяемых в геометрии, алгебре, астронавтике, экономике и, вообще, во всех тех областях, где появляются метрические пространства.

Развив ту или иную аксиоматическую теорию, мы можем, не проводя повторных рассуждений, утверждать, что ее выводы имеют место в каждом случае, когда справедливы рассматриваемые аксиомы. Таким образом, аксиоматический метод позволяет целые аксиоматически развитые теории применять в различных областях знаний. В этом состоит сила аксиоматического метода.

Современная точка зрения на аксиоматическое построение какой-либо области математики заключается в следующем: во-первых, перечисляются первоначальные (неопределяемые) понятия; во-вторых, указывается список аксиом, в которых устанавливаются некоторые связи и взаимоотношения между первоначальными понятиями; в-третьих, с помощью *определений* вводятся дальнейшие понятия и, в-четвертых, исходя из первоначальных фактов, содержащихся в аксиомах, выводятся, доказываются с помощью некоторой логической системы дальнейшие факты — *теоремы*. Первоначальные понятия и аксиомы заимствованы из опыта. Поэтому очевидно, что все последующие факты, выводимые в аксиоматической теории, хотя их получают на основе системы аксиом чисто умозрительным, дедуктивным путем, имеют тесную связь с жизнью и могут быть применены в практической деятельности человека.

Важнейшим требованием к системе аксиом является ее непротиворечивость, которую можно понимать так: сколько бы мы ни выводили теорем из этих аксиом, среди них не будет двух теорем, противоречащих друг другу. Противоречивая аксиоматика не может служить основой построения содержательной теории.

Чтобы объяснить подробнее, как в современной математике рассматриваются вопросы непротиворечивости, приведем пример. Несколько школьников решили организовать шахматный турнир по упрощенной схеме: каждый должен сыграть ровно три партии с кем-либо из остальных участников (а белыми или черными фигурами – по жребию). Составить расписание турнира никак не удавалось, и мальчики обратились за помощью к учителю. По просьбе учителя юные шахматисты подсчитали общее число участников: оно оказалось нечетным. Тогда учитель предложил сформулировать требования, которые ученики предъявили к турниру, в виде аксиом. Для этого потребовалось ввести три первоначальных (неопределяемых) понятия: «игрок», «партия», «участие игрока в партии». Аксиом получилось четыре:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

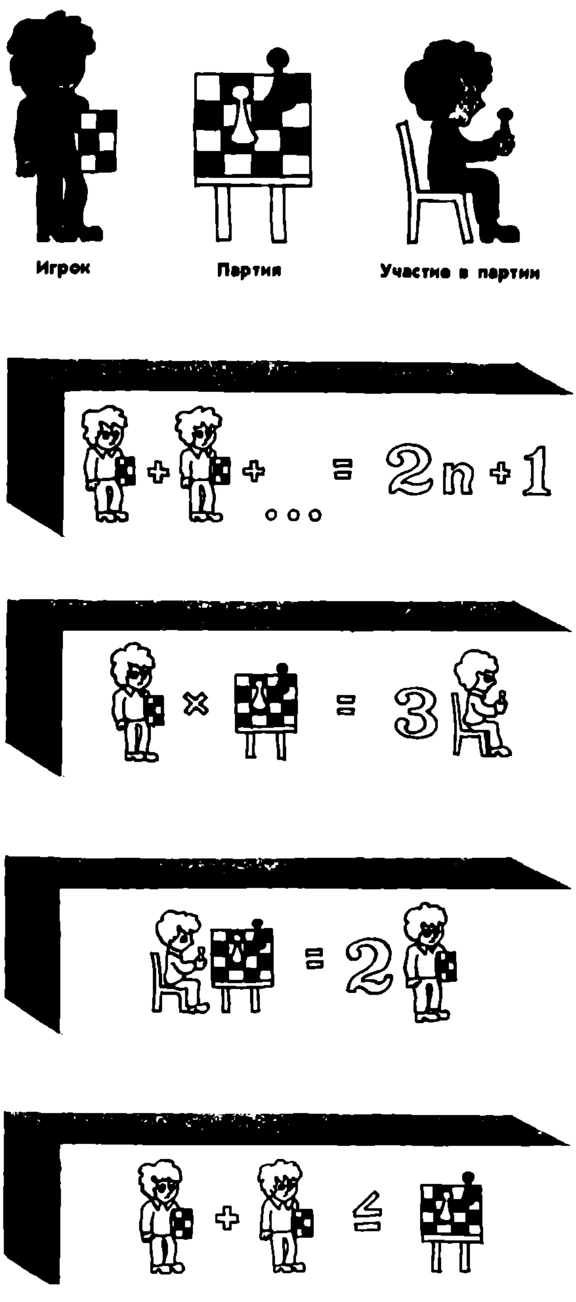
Аксиома 2. Каждый игрок участвует в трех партиях.

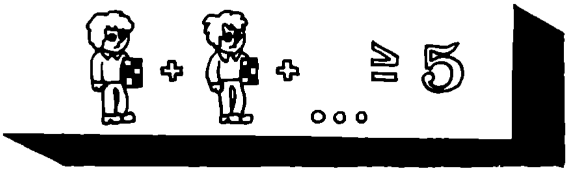
Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждых двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем.

Рис. 1





Первую из них предложил для примера сам учитель.

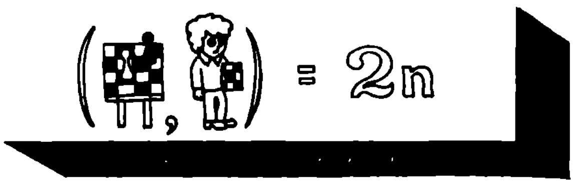
Теорема 1. Число игроков не меньше пяти.

Доказательство. Так как нуль-четное число, то по аксиоме 1 число игроков не равно нулю, т.е. существует хотя бы один игрок A. Этот игрок в силу аксиомы 2 участвует в трех партиях, причем в каждой из этих партий, кроме A, участвует еще один игрок (аксиома 3). Пусть B, C, D-игроки, отличные от A, которые участвуют в этих партиях. По аксиоме 4 все игроки B, C, D различны (если бы, например, было $B = C$, то оказалось бы, что имеются две партии, в которых участвуют игрок A и игрок $B = C$). Итак, мы нашли уже четырех игроков: A, B, C, D. Но тогда по аксиоме 1 число игроков не меньше пяти.

Следующую теорему доказал один из учеников. Для этого он определил новое понятие: если q-некоторая партия и A-один из участвующих в ней игроков, то пару (q, A) назовем выступлением игрока.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков четно.

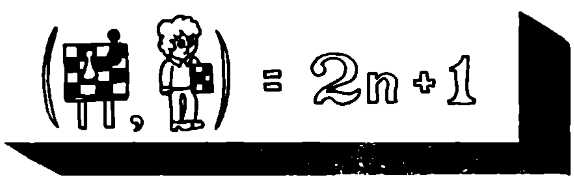
Доказательство. Если в партии q участвуют игроки A и B, то мы получаем два выступления игроков: (q, A) и (q, B), т.е. каждая партия дает ровно два выступления игроков (аксиома 3). Значит, число всех выступлений игроков четно, так как оно вдвое больше числа всех партий.



Однако другой ученик доказал теорему, противоречащую предыдущей.

Теорема 3. Число всех выступлений игроков нечетно.

Доказательство. По аксиоме 2 игрок A участвует ровно в трех партиях, скажем q_1, q_2, q_3. Это дает три выступления игрока: (q_1, A), (q_2, A), (q_3, A). Отсюда следует, что число всех выступлений игроков равно $3n$, где n-число игроков. Так как n нечетно (аксиома 1), то и $3n$ нечетно.



Таким образом, взятая аксиоматика позволяет доказать ряд теорем, однако среди них имеются две, противоречащие друг другу. Это означает, что такая аксиоматика противоречива, т.е. требования, выдвинутые организаторами турнира, несовместимы (рис. 1). Не удивительно, что мальчики не сумели составить расписание турнира: такого расписания просто не существует.

Рис. 1

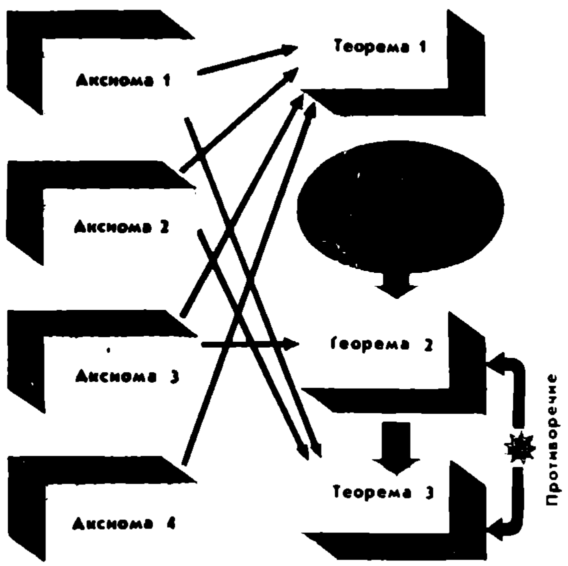
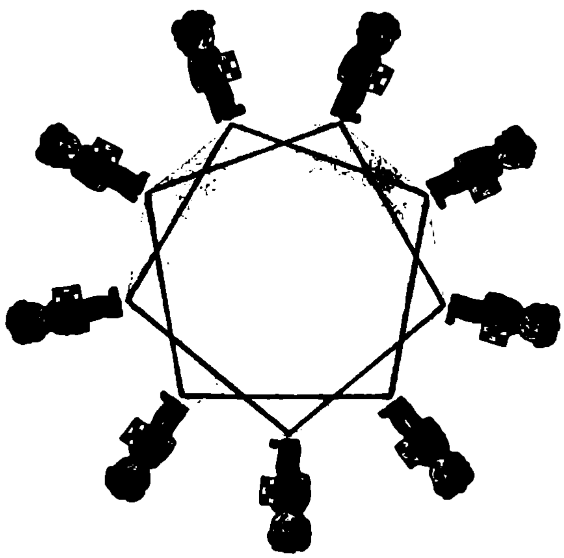


Рис. 2



После этого учитель предложил другую си-

«Так называемые аксиомы математики—это те немногие мыслительные определения, которые необходимы в математике в качестве исходного пункта».
Ф. Энгельс

стему организации турнира, при которой каждый из участников должен сыграть не три, а четыре партии с кем-либо из остальных участников. Иначе говоря, он предложил рассмотреть «теорию», в которой те же первоначальные понятия, а аксиомы формулируются следующим образом:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в четырех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждых двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Однако ученики не спешили выводить теоремы из этих аксиом: вдруг опять обнаружится противоречие. Учитель же заверил мальчиков, что, сколько бы теорем они ни выводили из этих аксиом, никогда противоречий не будет. Вот как он убедил их в этом.

Рассмотрим девятиугольник, в котором кроме сторон проведем девять диагоналей, соединяющих вершины через одну (рис. 2). Вершины девятиугольника будем считать «игроками», проведенные отрезки (стороны и диагонали)—«партиями», а концы соответствующего отрезка—«игроками», участвующими в некоторой «партии». Мы получаем модель (или схему) интересующего нас турнира. Легко установить, что все четыре аксиомы здесь выполняются. Итак, удается построить модель, в которой выполняются все рассматриваемые аксиомы, причем эта модель построена из «материала» геометрии, т.е. науки, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся.

Предположим теперь, что из рассматриваемых четырех аксиом можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Тогда доказательства этих двух теорем можно было бы повторить и в построенной модели (ведь в этой модели все четыре аксиомы имеют место). В результате получается, что, рассуждая о правильном девятиугольнике, мы можем получить две противоречащие друг другу теоремы. Но это означало бы, что геометрия — наука противоречивая, чего мы не допускаем. Таким образом, мы должны признать, что двух противоречащих друг другу теорем вывести из рассматриваемых четырех аксиом невозможно.

Вообще, пусть рассматриваются две теории P и Q, причем теория P задается аксиоматически (и в ее непротиворечивости мы заранее не уверены), а Q—это хорошо известная нам теория, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся. Если из «материала» теории Q удается построить модель, в которой выполняются все аксиомы теории P, то этим непротиворечивость теории P будем считать установленной.

Именно с помощью построения моделей в современной математике установлена непротиворечивость геометрии—в предположении непротиворечивости теории действительных чисел. Далее, установлена непротиворечивость теории действительных чисел—в предположении непротиворечивости теории рациональных чисел; наконец, установлена непротиворечивость теории рациональных чисел—в предположении непротиворечивости теории натуральных чисел.

АЛГЕБРА

Алгебра—часть математики, которая изучает общие свойства действий над различными величинами и решение уравнений, связанных с этими действиями.

Решим задачу: «Возрасты трех братьев 30, 20 и 6 лет. Через сколько лет возраст старшего будет равен сумме возрастов обоих младших братьев?» Обозначив искомое число лет через x, составим уравнение: $30 + x = (20 + x) + (6 + x)$, откуда $x = 4$. Близкий к описанному метод решения задач был известен еще во II тысячелетии до н. э. писцам Древнего Египта (однако они не применяли буквенной символики). В сохранившихся до наших дней математических папирусах имеются не только задачи, которые приводят к уравнениям первой степени с одним неизвестным, как в задаче о возрасте братьев, но и задачи, приводящие к уравнениям вида $ax^2 = b$ (см. *Квадратные уравнения*).

Еще более сложные задачи умели решать с начала II тысячелетия до н. э. в Древнем Вавилоне: в математических текстах, выполненных клинописью на глиняных пластинках, есть квадратные и биквадратные уравнения, системы уравнений с двумя неизвестными и даже простейшие кубические уравнения. При этом вавилоняне также не использовали букв, а приводили решения «типовых» задач, из которых решения аналогичных задач получались заменой числовых данных. В числовой же форме приводились и некоторые правила тождественных преобразований. Если при решении уравнения надо было извлекать квадратный корень из числа a, не являющегося точным квадратом, находили приближенное значение корня x: делили a на x и брали среднее арифметическое чисел x и a/x.

Первые общие утверждения о тождественных преобразованиях встречаются у древнегреческих математиков, начиная с VI в. до н. э. Среди математиков Древней Греции было принято выражать все алгебраические утверждения в геометрической форме. Вместо сложения чисел говорили о сложении отрезков, произведение двух чисел истолковывали как площадь прямоугольника, а произведение трех чисел – как объем прямоугольного параллелепипеда. Алгебраические формулы принимали вид соотношений между площадями и объемами. Например, говорили, что площадь квадрата, построенного на сумме двух отрезков, равна сумме площадей квадратов, построенных на этих отрезках, увеличенной на удвоенную площадь прямоугольника, построенного на этих отрезках. С того времени и идут термины «квадрат числа» (т. е. произведение величины на самое себя), «куб числа», «среднее геометрическое». Геометрическую форму приняло у греков и решение квадратных уравнений – они искали стороны прямоугольника по заданным периметру и площади.

Большинство задач решалось в Древней Греции путем построений циркулем и линейкой (см. *Геометрические построения*). Но не все задачи поддавались такому решению. Например, «не решались» задачи удвоения куба, трисекции угла, задачи построения правильного семиугольника (см. *Классические задачи древности*). Они приводили к кубическим уравнениям вида $x^3 = 2$, $4x^3 - 3x = a$ и $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ соответственно. Для решений этих задач был разработан новый метод, связанный с отысканием точек пересечения конических сечений (эллипса, параболы и гиперболы).

Геометрический подход к алгебраическим проблемам сковывал дальнейшее развитие науки, так как, например, нельзя было складывать величины разных размерностей (длины и площади или площади и объемы), нельзя было говорить о произведении более чем трех множителей и т. д. Отказ от геометрической трактовки наметился у Диофанта Александрийского, жившего в III в. В его книге «Арифметика» появляются зачатки буквенной символики и специальные обозначения для степеней неизвестного вплоть до 6-й. Были у него и обозначения для степеней с отрицательными показателями, обозначения для отрицательных чисел, а также знак равенства (особого знака для сложения еще не было), краткая запись правил умножения положительных и отрицательных чисел. На дальнейшее развитие алгебры сильное влияние оказали разобранные Диофантом задачи, приводящие к сложным системам алгебраических уравнений, в том числе к системам, где число уравнений было меньше числа неизвестных. Для таких уравнений Диофант искал лишь положительные рациональные решения (см. *Диофантовы уравнения*).

С VI в. центр математических исследований перемещается в Индию и Китай, страны Ближнего Востока и Средней Азии. Китайские ученые разработали метод последовательного исключения неизвестных (см. *Неизвестных исключение*) для решения систем линейных уравнений, дали новые методы приближенного решения уравнений высших степеней. Индийские математики использовали отрицательные числа и усовершенствовали буквенную символику. Однако лишь в трудах ученых Ближнего Востока и Средней Азии алгебра оформилась в самостоятельную ветвь математики, трактующую вопросы, связанные с решением уравнений. В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед ал-Хорезми написал трактат «Китаб аль-джебр валь-мукабала», где дал общие правила для решения уравнений первой степени. Слово «аль-джебр» (восстановление), от которого новая наука алгебра получила свое название, означало перенос отрицательных членов уравнения из одной его части в другую с изменением знака. Ученые Востока изучали и решение кубических уравнений, хотя не сумели получить общей формулы для их корней.

В Западной Европе изучение алгебры нача-