В.И. Смирнов

Курс высшей математики

Том 5

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.И. Смирнов
В11 Курс высшей математики: Том 5 / В.И. Смирнов – М.: Книга по Требованию, 2013. – 658 с.

ISBN 978-5-458-31239-4

В современных теоретических схемах математической физики большое значение имеют теория функций вещественного переменного, различные функциональные пространства и общая теория операторов. Этим вопросам в основном и посвящена настоящая книга, которая написана на основе пятого тома моего "Курса высшей математики", вышедшего в 1947 году.Содержанием теории функций вещественного переменного в настоящей книги является теория классического интеграла Стилтьеса, интеграла Лебега-Стилтьеса и теория вполне аддитивных функций множеств.

ISBN 978-5-458-31239-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава V

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современных теоретических схемах математической физики большое значение имеют теория функций вещественного переменного, различные функциональные пространства и общая теория операторов. Этим вопросам в основном и посвящена настоящая книга, которая написана на основе пятого тома моего „Курса высшей математики", вышедшего в 1947 году.

Содержанием теории функций вещественного переменного в настоящей книге является теория классического интеграла Стилтьеса, интеграла Лебега—Стилтьеса и теория вполне аддитивных функций множеств.

В первой главе изложена теория классического интеграла Стилтьеса, а также рассмотрено более общее определение интеграла Стилтьеса по промежутку любого типа, основанное на совпадении соответствующих верхнего и нижнего интегралов Дарбу при разбиении основного промежутка на промежутки любого типа. В качестве примеров классического интеграла Стилтьеса рассматриваются интегралы Фурье—Стилтьеса и Коши—Стилтьеса. Для них устанавливаются формулы обращения. Интеграл Стилтьеса определяется и для случая плоскости.

Далее в первой главе изучается пространство C непрерывных функций и устанавливается общая форма линейных функционалов в этом пространстве.

Во второй главе излагаются основы метрической теории функций вещественного переменного и интеграла Лебега—Стилтьеса. Вся теория излагается для случая плоскости и выясняется возможность очевидного обобщения ее на случай n-мерного эвклидова пространства. Теория меры строится на основе любой неотрицательной, аддитивной, нормальной, функции, определенной на полуоткрытых двумерных промежутках. Интеграл Лебега—Стилтьеса от ограниченной функции определяется на основе совпадения верхнего и нижнего интегралов Дарбу при разбиении основного измеримого множества на измеримые множества. В конце второй главы подробно излагается процесс усреднения функций и свойства средних функций при некоторых условиях на усредняющее ядро. Процесс усреднения широко используется в дальнейшем.

В третьей главе излагается теория вполне аддитивных функций множеств. После доказательства первоначальных теорем этой теории приводится без доказательства теорема о разбиении вполне аддитивной функции множеств на сингулярное и абсолютно непрерывное слагаемое и выясняются основные факты, связанные с этим разбиением. Подробно рассматривается случай одного независимого переменного. Далее в общем случае исследуется абсолютно непрерывная функция множеств и устанавливается формула замены переменных в многомерном интеграле Лебега — Стилтьеса.

В конце третьей главы приводится доказательство упомянутой выше теоремы о разбиении вполне аддитивной функции множеств на два слагаемые. Далее вводится в многомерном случае понятие интеграла Хеллингера и исследуются его свойства. В частности, указывается связь интеграла Хиллингера с интегралом Лебега — Стилтьеса. Подробно разбирается случай одномерного интеграла Хеллингера. Все доказательства конца третьей главы основаны на предварительном подробном изучении свойств вполне аддитивных функций множеств **[78, 79]**.

Четвертая глава содержит изложение основ общей теории метрических и нормированных пространств. В конце ее приведено подробное изложение обобщенных производных, теорем вложения для различных функциональных пространств и теории функционалов в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Все эти вопросы связаны с известными исследованиями С. Л. Соболева. Они изложены и в его монографии „Некоторые применения функционального анализа в математической физике“ (1950 г.).

Обобщенные производные определяются двояко — при помощи формулы интегрирования по частям и путем замыкания функций с непрерывными производными, при чем доказывается равносильность этих определений. Особо рассматривается случай областей звездного типа. Далее вводятся полные нормированные функциональные пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$, первое из которых состоит из функций $\varphi(x)$, определенных в области D и имеющих все обобщенные производные порядка l, причем $\varphi(x)$ и упомянутые производные принадлежат $L_p(D)$, а при определении второго пространства берутся функции $\varphi(x)$, имеющие все обобщенные производные до порядка l

включительно. В дальнейшем доказывается, что для широкого класса областей D $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$ состоит из одного и того же множества функций и что введенные в них нормы эквивалентны. Далее для пространства $W_p(D)$ сравнительно просто доказываются теоремы, являющиеся частным случаем теорем вложения для $W_p^{(l)}(D)$.

Далее, сначала эти теоремы формулируются, а затем в мелком шрифте приводится полное их доказательство на основе интегрального представления С. Л. Соболева. Весь этот материал тесно связан с его упомянутой выше монографией.

В последней пятой главе излагается общая теория пространства Гильберта, причем сначала все изложение проводится для случая ограниченных операторов. Доказываются теоремы Фредгольма для линейных уравнений с вполне непрерывными операторами. Для нормированных пространств они приводились без доказательства.

Для самосопряженных операторов на непрерывном спектре даются соответствующие интегральные представления через дифференциальные решения при помощи интегралов Хеллингера. Приводятся примеры применения общей теории ограниченных операторов в l_2 L_2.

Последний параграф пятой главы посвящен теории неограниченных операторов в Гильбертовом пространстве. После доказательства общих теорем теории приводится большое число примеров дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными. После общей теории расширения замкнутых симметричных операторов рассматривается специально случай полуограниченных операторов и, в частности, их расширение по Фридрихсу.

Предполагается выпуск шестого тома с изложением некоторых вопросов современной теории дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными.

При составлении настоящей книги я пользовался, кроме специальных статей, многими книгами. Приведу основные из них: В. И. Гливенко „Интеграл Стилтьеса"; И. П. Натансон „Основы теории функций вещественного переменного"; Сакс „Теория интеграла"; Vallée-Poussin „Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire"; Stone „Linear Transformation in Hilbert Space and their applications to Analysis"; Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман „Теория линейных операторов"; А. И. Плеснер „Спектральная теория линейных операторов, I" (Успехи математических наук, т. IX, 1941); Н. И. Ахиезер „Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов" (там же); С. Л. Соболев „Некоторые применения функционального анализа в математической физике.

Приношу мою благодарность С. М. Лозинскому, прочитавшему первоначальную рукопись книги и сделавшему ряд ценных указаний.

Изложение многих вопросов второй части этой книги принадлежит профессору О. А. Ладыженской, она является моим соавтором в этой части книги. С ней я подробно обсуждал план построения этой книги.

Большую помощь при составлении второй части книги оказал М. С. Бирман. Ему принадлежит изложение параграфов, посвященных теоремам вложения [114—118] и теории малых возмущений спектра [198]. Ценные советы были им даны по вопросу спектров симметричных операторов и их расширений, а также при изложении главы IV.

Приношу мою глубокую благодарность О. А. Ладыженской и М. С. Бирману. Без их помощи я не смог бы проделать всей работы.

Первые три главы книги были прочтены Г. П. Акиловым, от которого я получил ряд ценных советов, касающихся изложения отдельных вопросов. Приношу ему мою большую благодарность.

20 июля 1959 г.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

1. Множества и их мощность. При применении математического анализа в современном естествознании большую роль играют различные понятия интеграла, и в первых двух главах мы изложим теорию интегрирования в более общем виде, чем это мы делали раньше. Предварительно в настоящем параграфе приведем некоторые первоначальные сведения из теории множеств. Они являются некоторым дополнением к тому, что мы излагали в [IV; 15].

Пусть имеются два множества A_1 и A_2, состоящие из каких-либо объектов (элементов). Говорят, что два множества имеют *одинаковую мощность*, если между элементами, входящими в A_1, и элементами, входящими в A_2, можно установить биоднозначное соответствие, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу из A_1 сопоставляется определенный элемент из A_2, причем в этом соответствии, наоборот, каждый элемент A_2 сопоставлен одному, и только одному, элементу A_1. Бесконечное множество (т. е. множество, содержащее бесконечное число элементов) называется *исчислимым*, или *счетным*, если оно имеет ту же мощность, что и множество всех целых положительных чисел, т. е. если элементы этого множества можно пронумеровать целыми положительными числами: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Два счетных множества имеют одинаковую мощность. Выясним некоторые свойства счетных множеств. Рассмотрим часть счетного множества, содержащую бесконечное множество элементов $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots$, где $p_1, p_2 \ldots$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел. Элементы этого нового множества также пронумерованы. Номером каждого элемента является значок у p. Иначе говоря, они пронумерованы в порядке возрастания значков $p_1, p_2, \ldots$ Таким образом, *бесконечная часть счетного множества есть счетное множество*. Рассмотрим теперь два счетных множества: $A(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, состоящее из элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots$, и $B(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, состоящее из элементов $b_1, b_2, b_3, \ldots$; составим их сумму, т. е. объединим в одно множество C элементы, входящие в оба указанных выше множества. Полученное таким образом новое множество C называется обычно суммой множеств A и B. Это новое множество также счетно. Действительно, достаточно, например, поставить элементы множества C в следующем порядке: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, чтобы убедиться в счетности его. Если имеются одинаковые элементы a_k, b_l, то надо удержать один из них, а остальные вычеркнуть. Аналогичное рассуждение применимо и для суммы конечного числа счетных множеств, т. е. *сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество.*

Положим, что имеется счетное множество счетных множеств. Элементы всех этих множеств можно обозначить буквой с двумя целочисленными индексами $a_p^{(q)}$. Верхний индекс указывает номер того множества, к которому принадлежит элемент, а нижний — тот номер, который указанный элемент имеет в том счетном множестве, к которому он принадлежит. Нетрудно пронумеровать все элементы $a_p^{(q)}$. В качестве первого элемента возьмем тот элемент, у которого оба индекса равны единице: $a_1^{(1)}$. Возьмем затем те элементы, у которых сумма индексов есть три, и расположим в порядке возрастания верхнего индекса. Таким образом, мы получим второй и третий элементы суммы множеств: $a_2^{(1)}$, $a_1^{(2)}$. Возьмем теперь те элементы, у которых сумма индексов равна четырем, и расположим их в порядке возрастания верхнего индекса: $a_3^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$. Это даст нам четвертый, пятый и шестой элементы суммы множеств. Продолжая это построение, мы убеждаемся в том, что *сумма счетного числа счетных множеств есть счетное множество.* Это утверждение, очевидно, осталось бы в силе, если некоторые из слагаемых множеств были бы не счетными, а конечными множествами.

Пусть имеется некоторое бесконечное множество A. Выберем из него какой-нибудь элемент и припишем ему номер один. Оставшееся множество по-прежнему будет бесконечным. Выберем из него какой-нибудь элемент и припишем ему номер два. Продолжая так и дальше, мы видим, что *из всякого бесконечного множества можно выделить счетное множество.* Оставшееся после такого выделения множество может быть или пустым, т. е. не содержащим ни одного элемента, или конечным, или бесконечным. Покажем, что если это оставшееся множество бесконечно, то оно имеет ту же мощность, что первоначальное множество, т. е. справедливо следующее утверждение: *если после выделения из бесконечного множества A счетного множества P остается бесконечное множество B, то множества A и B имеют одинаковую мощность.* Выделим из бесконечного множества B вновь некоторое счетное множество Q, и пусть C — оставшееся множество. При этом первоначальное множество A разобьется на три множества $A = P + Q + C$, из которых множество C может быть и пустым, а может быть и бесконечным, а множества P и Q суть счетные множества. До второго выделения мы имели $A = P + B$. Нетрудно установить биоднозначное соответствие между элементами A и B. Действительно, мы имеем $A = P + Q + C$ и $B = Q + C$. Сумма счетных множеств $P + Q$ есть счетное множество, и, следовательно, между элементами $P + Q$ и Q можно установить биоднозначное соответствие. Каждый элемент множества C приведем в соответствие самому себе. Таким образом, и будет установлено биоднозначное соответствие между элементами A и B. Из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что *если к бесконечному множеству добавить счетное множество, то вновь полученное множество будет иметь ту же мощность, что и первоначальное множество*. Оба утверждения о вычитании и добавлении счетного множества остаются в силе, если счетное множество заменить конечным. Доказательство приводится совершенно так же, как и выше.

Мы показали раньше [IV; **15**], что множество рациональных чисел, принадлежащих некоторому промежутку $[a, b]$, или множество всех рациональных чисел есть счетное множество. Это доказывается совершенно так же, как и утверждение о счетности суммы счетного числа счетных множеств. Роль верхнего индекса играет числитель дроби, а роль нижнего индекса — ее знаменатель, причем сначала надо рассмотреть положительные дроби. Приведем теперь пример несчетного множества. Рассмотрим все вещественные числа, принадлежащие промежутку $[0,1]$. Каждое из них, кроме нуля, мы можем представить бесконечной десятичной дробью с целой частью, равной нулю, и наоборот каждой такой десятичной дроби будет соответствовать некоторое вещественное число из указанного промежутка. Конечными дробями мы не пользуемся, так как конечная дробь дает то же число, что и бесконечная, имеющая в периоде 9, например $0{,}37 = 0{,}36999\ldots$ Покажем, что множество упомянутых вещественных чисел несчетно. Ведем доказательство от обратного. Положим, что все указанные десятичные дроби совместно с дробью $0{,}00\ldots$, дающей левый конец промежутка, можно пронумеровать. Составим новую десятичную дробь с целой частью, равной нулю, следующим образом. В качестве первого десятичного знака возьмём какую-нибудь цифру, отличную от первого десятичного знака первой из пронумерованных десятичных дробей, в качестве второго десятичного знака возьмем какую-нибудь цифру, отличную от второго десятичного знака второй из пронумерованных дробей, и т. д. Получится бесконечная десятичная дробь (цифрой 0 при составлении десятичных знаков новой десятичной дроби мы пользоваться не будем), которая отлична от всех пронумерованных десятичных дробей. Таким образом, соответствующее ей вещественное число не пронумеровано, а это противоречит тому, что все вещественные числа из промежутка $[0,1]$ пронумерованы. Таким образом, мы показали, что *множество всех вещественных чисел, принадлежащих промежутку* $[0,1]$, *несчетно*. Говорят, что это множество имеет *мощность континуума*. Нетрудно видеть, что множество вещественных чисел, принадлежащих любому конечному промежутку $[a, b]$, имеет ту же мощность, что и множество вещественных чисел, принадлежащих промежутку $[0, 1]$. Биоднозначное соответствие между элементами этих множеств устанавливается формулой $y=\frac{x-a}{b-a}$. Когда x пробегает промежуток $[a, b]$, переменное y пробегает промежуток $[0, 1]$. Если использовать формулу $y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$, то при изменении x внутри промежутка $[0,1]$ переменная y пробегает множество всех вещественных чисел, т. е. *множество всех вещественных чисел также имеет мощность континуума*. Если концы промежутка мы не будем причислять к множеству, то это не изменит его мощности, так как добавление или вычитание из бесконечного множества конечного множества не меняет его мощности.

В дальнейшем замкнутый промежуток мы будем обозначать символом $[a, b]$, а открытый промежуток, т. е. промежуток, к которому не присоединяются концы, символом (a, b). Если левый конец не присоединяется, а правый присоединяется, то будем пользоваться символом $(a, b]$, аналогичное значение имеет $[a, b)$. Числа a и b могут принимать и бесконечные значения: $a=-\infty$ и $b=+\infty$, т. е. рассматриваемые промежутки могут быть бесконечными налево и направо. Например, замкнутый промежуток $[-\infty, +\infty]$ содержит оба бесконечно далеких элемента. В соответствии с этим и функция $f(x)$ может быть определена при $x=-\infty$, и $x=+\infty$, и мы можем, например, писать $f(-\infty)$. Непрерывность при $x=-\infty$ равносильна условию $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty)$. Аналогично и для $x\to+\infty$.

Кроме того, можно пользоваться и обычными обозначениями $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty+0)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty-0)$.

Нетрудно показать [I; 43], что функция $f(x)$, конечная и непрерывная в замкнутом промежутке $[-\infty, +\infty]$, равномерно непрерывна в этом промежутке.

2. Интеграл Стилтьеса и его основные свойства. Напомним определение интеграла Римана, которым мы обычно пользовались в предыдущих томах. Пусть $[a, b]$ — конечный промежуток и $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в этом промежутке. Подразделяем промежуток на части $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, на каждом из частичных промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ берем некоторую точку ξ_k и составляем сумму произведений:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \tag{1}$$

Если при беспредельном измельчании подразделений и любом выборе точек ξ_k написанная сумма имеет определенный предел A, то этот предел и называют интегралом от $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. Пусть δ — наибольшая из разностей x_k-x_{k-1}. Беспредельное измельчание промежутка $[a, b]$ на части равносильно тому, что $\delta\to 0$, и существо-