

**Федоров Евграф Степанович**

# **Новая геометрия, как основа черчения**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3  
ББК 84-4  
Е14

Е14 **Евграф Степанович Ф.**  
Новая геометрия, как основа черчения / Федоров Евграф Степанович – М.: Книга по Требованию, 2024. – 149 с.  
**ISBN 978-5-519-78780-2**

**ISBN 978-5-519-78780-2**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



отчетливѣе показать разнообразную приложимость теоремъ этой науки къ  
г) задачамъ, я присоединилъ прикладную часть, въ которой всегда выиски-  
в... вѣйшіе способы рѣшенія представляющихся задачъ проекціоннаго черченія.

Съ чувствомъ глубокой благодарности вспоминаю Николаевское Инженерное Училище, въ которомъ еще въ 1869 году мною были усвоены основныя начала Новой Геометріи и которое было едва ли не первымъ учебнымъ заведеніемъ въ Россіи, введшимъ у себя преподаваніе этой важной и изящной математической дисциплины.

Приношу благодарность В. В. Никитину за содѣйствіе, оказанное имъ при составленіи этого руководства, и А. К. Болдыреву за весьма внимательное чтеніе корректуръ.

Въ заключеніе приведу крупнѣйшіе источники свѣдѣній по этой наукѣ съ присоединеніемъ тѣхъ работъ автора, какими пришлось пользоваться при составленіи книги <sup>1)</sup>.

1. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures 1822.

Эта книга какъ бы составляетъ введеніе при появленіи въ свѣтъ Новой геометріи. Именно въ ней, въ систематизованномъ изложеніи, преобладающимъ образомъ трактуются основныя начала, азбука Новой геометріи.

2. Möbius. Der barycentrische Calcul. 1827.

Здѣсь, въ противоположность почти всему послѣдующему, изложеніе въ видѣ формулъ, основанныхъ на новой и совершенно оригинальной системѣ (барицентрической) координатъ, по которой каждой точкѣ въ видѣ координаты въ пространствѣ, придается опредѣленный вѣсъ, чтобы на нее смотрѣть какъ на центръ тяжести извѣстной системы.

Эта книга сыграла въ наукѣ большую роль, указавъ на сродство системъ, выражаемое двойными отношеніями (Doppelverhältniss).

Разсмотрѣны различныя виды этого сродства въ связи съ построеніями, относящимися къ кривымъ и поверхностямъ второго порядка. Особенно же оригинальнымъ и цѣннымъ является рѣшеніе вопроса о рациональномъ развитіи комплексовъ (Netze) изъ четырехъ данныхъ точекъ. Благодаря этому, на автора слѣдуетъ смотрѣть какъ на родоначальника ученія о сингоніи или рациональныхъ совокупностей. Впослѣдствіи это ученіе независимо было развито кристаллографами.

3. Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten 1832.

Въ этомъ сочиненіи я усматриваю формальное появленіе въ свѣтъ Новой геометріи, хотя и въ эскизномъ, по чрезвычайно изящномъ, видѣ.

Вслѣдъ за этою „геніальнѣйшей геометріи XIX вѣка“ выпустилъ въ свѣтъ необычайное множество работъ, которыми посмертно собраны въ слѣдующемъ сочиненіи.

4. Jacob Steiner's Gesammelte Werke (herausgegeben von K. Weierstrass) 1881—2 (два тома).

5. Его же. Vorlesungen über Synthetische Geometrie. Во второмъ томѣ, озаглавленномъ Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften (bearbeitet von H. Schröter II Auflage 1876), заключается уже довольно подробное изложеніе началъ Новой Геометріи.

6. Staudt. Geometrie der Lage 1847.

Первая книга, въ которой оригинальность метода Новой геометріи проявлена до предѣловъ крайней отчетливости. Въ ней нѣтъ ни одного чертежа, ни одной формулы, а между тѣмъ систематически выведены соотношенія линейныхъ, отчасти и квадратичныхъ образовъ. Изложеніе вѣрныя признается очень труднымъ, чѣмъ и объясняется обыкновенно недостаточная оцѣнка и распространеніе этой замѣчательной книги.

7. Chasles. Traité de géométrie supérieure. Первое изданіе 1852, второе 1880 г.

Она заключаетъ въ себѣ изложеніе соотношеній не только линейныхъ совокупностей, но и теорію кривыхъ и поверхностей второго порядка съ точки зрѣнія Новой геометріи. Благодаря легкости изложенія, оно получило, первое изъ курсовъ Новой геометріи, значительное распространеніе.

8. Reye. Synthetische Geometrie der Kugeln 1879.

Первое спеціальное сочиненіе по совокупностямъ шаровъ. Въ немъ не только собрано все существенное, сдѣланное прежними авторами, особенно Ферматомъ, но и самостоятельно дополнено авторомъ до цѣлостной, изящной и вѣсной весьма простой теоріи шаровъ. Благодаря автору, въ геометріи шаровъ впервые получила реальность геометрія четырехъ измѣреній. Изложеніе безъ чертежей и безъ формулъ.

9. Его же. Die Geometrie der Lage 1892.

Обстоятельное руководство, вмѣстившее въ себѣ все существенное, что появилось въ математической литературѣ по Новой геометріи, насколько оно могло быть изложено въ элементарной, хотя и объемистой, книгѣ въ трехъ томахъ. Много главъ принадлежитъ самому автору.

<sup>1)</sup> Изложеніе этого руководства настолько существенно отличается отъ изложенія въ имѣющихся заграничныхъ руководствахъ, ради объединенія изложенія Новой Геометріи съ той новой точки зрѣнія, которая въ немъ проводится, и потребовались выходы столькихъ новыхъ соотношеній, что авторъ не находилъ возможнымъ ихъ перечислять въ этомъ вступленіи; но они конечно хорошо видны каждому спеціалисту.

10. Федоровъ. Начала ученія о фигурахъ 1885.

11. Его же. Этюды по аналитической кристаллографіи, 1885—7. Въ этихъ двухъ сочиненіяхъ рядъ главъ, трактующихъ по вопросамъ Новой геометріи. Такъ въ третьемъ этюдѣ впервые отмѣчены особыя свойства параболы какъ кривой проективности.

12. Его же. *Syngonielehre* 1906.

Это сочиненіе (изъ *Abhandlungen d. k. Bayerischen Akad. d. Wis. B. XXIII*) впервые спеціально излагаетъ арифметическую часть Новой геометріи то есть ученіе о раціональных совокупностяхъ.

Кромѣ того, въ Запискахъ Горнаго Института, выпускахъ 1-мъ и 2-мъ помѣщены статьи того же автора, трактующія объ основнѣхъ вопросахъ Новой Геометріи, а именно 1) „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“, 2) „Коллинеарныя системы въ положеніи перспективномъ, по двѣ ниволюиды“ и 3) „Этюды по Геометріи шаровъ. Сфероколлинеадія; реципрочныя преобразованія; мегасферы векторіальныхъ и обыкновенныхъ шаровъ; мегасферы параллельныхъ векторовъ. Полярныя отношенія мегасферъ“.

Изъ нихъ въ первой статьѣ (несмотря на ея конечную цѣль выработки наиболее совершенной системы рудничныхъ плановъ) впервые въ научной литературѣ отмѣчается раздѣленіе геометріи шаровъ на двѣ системы: шаровъ обыкновенныхъ и векторіальныхъ и излагаются ихъ элементарныя основы, и впервые же устанавливается геометрія параллельныхъ векторовъ (приемы которой и кладутся въ основаніе системы рудничныхъ плановъ). Наконецъ въ трудѣ „Системы гармоническихъ векторовъ и отрезковъ“, имѣющемъ появиться въ слѣдующихъ выпускахъ того же журнала, устанавливается цѣлый рядъ (до восьми) новыхъ геометрическихъ системъ.

## Часть первая (теоретическая).

### Глава I. О совокупностях элементов . . . . .

Стран.

1—7

1. Понятіе о совокупностяхъ. 2. Элементы совокупностейъ. 3. Ступени совокупностейъ. 4. Прямые, секунды, терціи и пр. 5. Линейныя совокупности. 6. Число опредѣляющихъ элементовъ. 7. Пересѣченіе совокупностейъ. 8. Геометрическія системы. 9. Коррелятивность и гомологичность. 10. Значеніе однозначной проективности. 11. Позиціонныя построенія. 12. Соответствіе совокупностейъ. 13. Перспективное положеніе. 14. Основной законъ проективности.

### Глава II. Однозначныя преобразованія однородныхъ системъ . . . .

8—28

1. Преобразованія вообще. 2. Гомологичность линейныхъ примъ. 3. Она опредѣляется тремя элементами. 4. Растяженіе; подобіе. 5. Двойныя и противоположныя точки. 6. Общій видъ гомологичности примъ точекъ. 7. Понятіе объ инволюціи. 8. Минимы двойныя точки. 9. Двойное отношеніе. 10. Гармоническое отношеніе. 11. Второй видъ инволюціи. 12. Построеніе гармоническихъ точекъ есть построеніе позиціонное. 13. Перспективныя примы. 14. Противоположныя лучи. 15. Число такихъ лучей. 16. Гомологичность линейныхъ секундъ точекъ. 17. Коллинеація вообще. 18. Коллинеація въ пространствѣ. 19. Средство. 20. Виды средства. 21. Свойства сдвига. 22. Свойства растяженія. 23. Соотнесеніе средства и коллинеаціи. 24. Число элементовъ, устанавливающее гомологичность. 25. Гомологичность круговъ и шаровъ. 26. Свойства этой гомологичности. 27. Конформность въ преобразованіи шаровъ. 28. Важность этого преобразованія. 29. Гармоническія отношенія въ системахъ шаровъ. 30. Особая теорема о сѣченіи шара прямыми подъ равными углами. 31. Приведеніе коллинеарныхъ системъ въ положеніе инволюціи. 32. Обобщенная инволюція на прямой.

### Глава III. Однозначныя преобразованія неоднородныхъ системъ . . .

29—40

1. Коррелятивность перспективныхъ совокупностейъ. 2. Полюсы и поляры. 3. Полярныя плоскости. 4. Полныя совокупности точекъ и плоскостейъ. 5. Кривыя 2-го порядка какъ кривыя коррелятивности. 6. Обобщенная инволюція на плоскости и въ пространствѣ. 7. Полныя четырехсторонники и четырехугольники. 8. Кривыя, коллинеарныя съ кругомъ. 9. Только эти кривыя есть кривыя коррелятивности. 10. Кривыя поверхности, коллинеарныя съ шаромъ. 11. Коррелятивность кривыхъ вообще. 12. Коррелятивность

многогранниковъ. 13. Аналитическія выраженія для гармоническихъ лучей и плоскостейъ. 14. Гармоническій четырехугольникъ. 15. Проективность системъ точекъ на прямой. 16. Проективность системъ точекъ на плоскости. 17. Гомологичность примъ лучей на плоскости. 18. Кристаллографическая проективность на плоскости. 19. Эллипсъ и гипербола какъ кривыя коррелятивности. 20. Парабола какъ кривая коррелятивности.

Стран.

### Глава IV. Линейныя совокупности

41—58

1. Составленіе линейныхъ совокупностейъ. 2. Совокупности точекъ, прямыхъ плоскостейъ. 3. Линейная прима пересѣкающихся круговъ и шаровъ. 4. То же непересѣкающихся круговъ и шаровъ. 5. Степень круговъ и шаровъ. 6. Степень въ точкахъ радикальной оси. 7. Секунды круговъ. 8. Примы шаровъ. 9. Ортогональныя пары примъ круговъ. 10. Минимы круги и шары. 11. Построеніе примъ по даннымъ минимымъ шарамъ. 12. Положеніе шаровъ примы въ пространствѣ. 13. Образованіе линейныхъ примъ. 14. Сколько преобразованій. 15. Примъъ двойной проективности. 16. Полныя совокупности точекъ, прямыхъ и плоскостейъ. 17. Секунда к 18. Секунда и терція шаровъ. 19. Разряды терцій шаровъ. 20. Преобразование совокупностейъ шаровъ. 21. Проведеніе чрезъ данныя точки шаровъ совокупностейъ. 22. Свѣченіе совокупностейъ шаровъ шаромъ или плоскостью. 23. Согласное положеніе шаровъ и другихъ элементовъ. 24. Сфера шаровъ. 25. Круговыя сѣченія конуса. 26. Самоколлинеарная прима шаровъ. 27. Равнозначныя дуги. 28. Преобразование четырехугольниковъ. 29. Преобразование полныхъ шестигранниковъ.

### Глава V. Совокупности нелинейныя и спеціально квадратичныя . .

59—83

1. Кругъ какъ производная равныхъ примъ. 2. Кривыя второго порядка какъ производныя гомологичныхъ примъ. 3. Циклы и квадратичныя примы лучей. 4. Циклы элементовъ другого рода. 5. Квадратичныя примы опредѣляются тремя, четырьмя и въ общемъ случаѣ пятью элементами. 6. Квадратичная прима непересѣкающихся прямыхъ. 7. Свойства одноплоского гиперболоида. 8. Плоскія сѣченія этой поверхности. 9. Параболическій гиперболоидъ. 10. Одноплоский гиперболоидъ какъ поверхность коррелятивности. 11. Поверхности коллинеарно-связанныя съ шаромъ. 12. Ихъ круговыя сѣченія. 13. Сопряженные діаметры и главныя оси. 14. Особые свойства параболы какъ кривой коррелятивности. 15. Преобразование круга въ равностороннюю

гиперболу. 16. Два опредѣленія кривыхъ второго порядка. 17. Цилиндрическая коллинеація. 18. Теорема Паскаля. 19. Распространеніе этой теоремы. 20. Опредѣленіе кривыхъ примыи лучей не гомологичныхъ. 21. Эллипсъ опредѣляемый прямою лучей изъ его фокусовъ. 22. Распространеніе вывода на гиперболу и параболу. 23. Коррелятивность секунды лучей и плоскостей (копическая). 24. Коррелятивность двухъ такихъ секундъ съ разными центрами. 25. Гомологичность секундъ лучей. 26. Особые точки кривыхъ. 27. Полярныя отношенія особыхъ точекъ. 28. Перспективное положеніе круговой и линейной примыи лучей. 29. Кривыя третьяго порядка какъ производныя изъ примыи лучей. 30. Примыи кривыхъ. 31. Шары и поверхности второго порядка.

#### Глава VI. Совокупности круговъ и шаровъ . . . . .

84—104

1. Пересѣченіе двухъ линейныхъ терцій шаровъ. 2. Пересѣченіе трехъ и четырехъ терцій. 3. Инволюція точекъ на кругѣ и шарѣ. 4. Пересѣченія шаровъ, вещественныя и мнимыя. 5. Ступени шаровыхъ совокупностей. 6. Системы круговъ на шарѣ и плоскости. 7. Система векторіальныхъ круговъ и шаровъ. 8. Соотношенія между радикальными центрами и центрами подобія. 9. Циклы и сферы шаровъ. 10. Линейныя совокупности векторіальныхъ шаровъ. 11. Построеніе сферы векторіальныхъ шаровъ по четыремъ даннымъ. 12. Шары, касательные къ тремъ

Стран.

ремъ даннымъ. 13. Конфигурація. 14. Циклы векторіальныхъ круговъ. 15. Поверхность центровъ квадратичныхъ совокупностей шаровъ. 16. Преобразованіе терцій шаровъ обратными радіусами. 17. Понятіе о мегаферѣ. 18. Свойства циклиды. 19. Разные виды циклиды. 20. Особая циклида. 21. Конусъ какъ циклида. 22. Кругъ какъ циклида. 23. Совокупность шаровъ, касательныхъ къ одному данному. 24. Мегаконусы. 25. Система параллельныхъ векторовъ.

Стра

### Часть вторая (прикладная).

|                                                                   |         |
|-------------------------------------------------------------------|---------|
| Глава VII. Чертежные инструменты                                  | 107—110 |
| Глава VIII. Проекція линейная (и гномоническая) . . . . .         | 109—111 |
| Глава IX. Проекція (грамма- и гномо-) стереографическая . . . . . | 112—117 |
| Глава X. Проекція ортогональная (методъ начертательной геометріи) | 120—127 |
| Глава XI. Проекція векторіальная . . . . .                        | 125—127 |
| Глава XII. Проекція косая (изображеніе многогранниковъ) . . . . . | 128—131 |
| Глава XIII. Изображенія перспективныя                             | 131—134 |
| Алфавитный указатель названій                                     | 134—135 |



| Стран.  | строка      | вмѣсто            | сдѣдуетъ          |
|---------|-------------|-------------------|-------------------|
| 5 пр.   | 2 сверху    | на                | не                |
| 6 пр.   | 3 и 6 снизу | п                 | п                 |
| 17 пр.  | 6 "         | общемъ            | этомъ особомъ     |
| 17 "    | 6 "         | (коллинеарность), | коллинеарности    |
| 20 "    | 8 "         | перпендикуляровъ  | перпендикуляромъ  |
| 21 лв.  | 2 сверху    | примѣненія        | измѣненія         |
| 27 пр.  | 22 снизу    | $Z_1 Z_2$         | $Q_1 Q_2$         |
| 31 лв.  | 11 "        | точка             | точки             |
| 36 пр.  | 15 сверху   | $Oa.Ob = O'a.O'b$ | $Oa.O'b = O'a.Ob$ |
| 43 пр.  | 9 "         | двѣ               | два               |
| 43 лв.  | 14 снизу    | преобразуетъ      | преобразуется     |
| 45 пр.  | 9 "         | отношенія         | означенія         |
| 53 пр.  | 23 "        | круга             | шара              |
| 65 пр.  | 19 "        | $bb' \dots a'$    | $bb' \dots a$     |
| 66 лв.  | 22 сверху   | $b$               | $a'$              |
| 85 лв.  | 9 снизу     | линейной          | линейныхъ         |
| 126 пр. | 10 сверху   | $CB$              | $CD$              |
| 126 пр. | 15 снизу    | каждомъ           | каждому           |

# Глава I.

## О совокупностях элементов.

1. При всякомъ геометрическомъ построении за-  
дается одно или нѣсколько условий, которымъ оно  
должно удовлетворять.

Если построение по этимъ условіямъ вообще воз-  
можно, то оно можетъ быть одно, или два, или еще  
ольшее число. Въ первомъ случаѣ оно называется  
*однозначнымъ*, во второмъ *двузначнымъ* и т. д.

Если построение опредѣляется нѣсколькими усло-  
віями, то при удовлетвореніи только части ихъ, мы  
получаемъ безконечную совокупность рѣшеній, и всѣ  
рѣшенія связаны между собою опредѣленнымъ ма-  
тематическимъ закономъ.

Въ частности, если эта безконечная совокупность  
относится къ точкамъ, то, по геометріи древнихъ,  
е принято называть геометрическимъ мѣстомъ.  
Вообще же за ними сохраняется обозначеніе *совокуп-  
ности* или точнѣе *безконечная совокупность*.

Для поясненія рассмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1. Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ  
двухъ данныхъ, есть плоскость, проходящая чрезъ сред-  
нюю точку прямого отрезка, опредѣленнаго двумя дан-  
ными точками и притомъ плоскость, перпендикулярная къ  
этому отрезку.

2. Геометрическое мѣсто точекъ на плоскости, равно-  
отстоящихъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ, пересѣкаю-  
щихся въ точкѣ  $O$ , есть прямая биссектрисы (равнодѣ-  
лящая) угловъ, опредѣляемыхъ данными прямыми. Эти  
биссектрисы также пересѣкаются въ точкѣ  $O$  и перпенди-  
кулярны другъ къ другу.

Въ этомъ случаѣ, какъ видимъ, рѣшеніе двузначно.

3. Если рѣшеніе приводитъ къ безконечной совокуп-  
ности прямыхъ, непрерывно измѣняющихся въ своемъ  
положеніи, то эта ~~совокупность~~ совокупность при этомъ движеніи опи-  
сываетъ нѣкоторую кривую. Всегда и около каждой точки  
этой кривой можно избрать такую маленькую часть, что  
въ предѣлахъ этой части точка кривой, и только она  
одна, принадлежитъ одной изъ прямыхъ совокупности;  
такая точка называется точкою касанія соотвѣтственной  
прямой, а сама прямая есть касательная къ кривой.

Напр. если возьмемъ на плоскости кругъ и точку  $F$   
внутри или вне его, соединимъ эту точку со всѣми точ-

ками окружности и изъ середины полученныхъ отрезковъ  
возставимъ къ нимъ перпендикуляры, то послѣдніе и  
составятъ совокупность, огибающую нѣкоторую кривую  
(эллипсъ, если взята точка внутри, гиперболу, если она  
вне круга); къ каждой точкѣ кривой имѣется одна кас-  
ательная прямая, принадлежащая къ совокупности<sup>1)</sup>.

Замѣчу мимоходомъ, что если изъ точки  $F$  въ кругъ  
проведена къ нему касательная и затѣмъ какъ точку  
касанія, такъ и двѣ чрезвычайно близкія къ ней съ обѣихъ  
сторонъ точки на кругѣ примемъ за концы прямыхъ от-  
резковъ, имѣющихъ другой конецъ въ точкѣ  $F$ , а изъ  
середины этихъ отрезковъ проведемъ три перпендикуляра,  
то получимъ слѣдующее. Средній перпендикуляръ съ  
обоими другими пересѣчется на весьма большомъ раз-  
стояніи (въ предѣлахъ—на безконечности) и притомъ въ точ-  
кахъ съ противоположныхъ его сторонъ. Поэтому на этотъ  
перпендикуляръ мы можемъ смотрѣть какъ на общую  
касательную къ кривой въ безконечно удаленныхъ ея  
точкахъ (такія касательныя называются асимптотами).

4. Въ предѣдущемъ примѣрѣ совокупность предста-  
влена прямыми и эти прямые огибаютъ кривую линію,  
имѣя каждая съ кривою одну общую точку касанія.

Мы легко расширимъ понятіе о такихъ совокупностяхъ,  
если представимъ себѣ непрерывно измѣняющіяся въ своемъ  
положеніи плоскости, огибающія нѣкоторую кривую по-  
верхности. Еще яснѣе представимъ себѣ такую совокуп-  
ность, если будемъ исходить изъ нѣкоторой кривой по-  
верхности, во всѣхъ точкахъ которой представимъ себѣ  
проведенныя касательныя плоскости то есть плоскости,  
имѣющія (по крайней мѣрѣ въ очень маленькой части  
поверхности вокругъ нѣкоторой произвольно взятой на  
ней точки), съ поверхностью одну общую точку.

Если возьмемъ шаръ и точку  $F$  внутри или вне его  
поверхности и, соединивъ ее со всѣми точками поверх-  
ности шара прямыми отрезками, проведемъ чрезъ сре-  
дины отрезковъ перпендикулярныя плоскости, то сово-  
купность такихъ плоскостей и есть одна изъ совокупно-  
стей подобнаго рода, огибающихъ кривую поверхность  
(эллипсоидъ, если точка  $F$  внутри, двуполоый гипербо-  
лоидъ, если эта точка вне шара).

По условіямъ, здѣсь заданнымъ, очевидно, что если  
чрезъ точку  $F$  проведемъ плоскости, пересѣкающую крив-

<sup>1)</sup> Эти построенія будутъ изложены и изображены въ  
главѣ V.

люю поверхность, то въ качествѣ линіи пересѣченія получимъ соответственно кривую, упомянутую въ примѣрѣ 3.

5. Возьмемъ два произвольные круга, и зададимся всеми кругами, касательными къ обоимъ кругамъ сразу.

Очевидно, что мы получимъ безконечную совокупность круговъ, касающихся обоихъ данныхъ съ вѣншей стороны. Въ составъ этой совокупности, какъ предѣльные, войдетъ и кругъ, центръ котораго находится на одной прямой съ центрами данныхъ круговъ, и тотъ, котораго центръ удаленъ въ безконечность и окружность котораго представлена прямою, касательною къ обоимъ кругамъ. Сюда же войдутъ и круги, касающіеся обоихъ данныхъ съ внутренней стороны, въ томъ числѣ и тотъ, центръ котораго находится на одной прямой съ центрами данныхъ.

Однако, заданію удовлетворяетъ и другая безконечная совокупность, а именно круговъ, которые касаются одного изъ данныхъ съ вѣншей, а другого со внутренней стороны. И въ этой совокупности имѣется два круга, центры которыхъ лежатъ на одной прямой съ центрами данныхъ.

Итакъ, получаемъ двѣ безконечныя совокупности.

2. Изъ предыдущихъ примѣровъ усматриваемъ, что смотря по условіямъ заданія выводятся совокупности однозначно, двузначно или даже многозначно, Геометрическіе образы, составляющіе эти совокупности, могутъ быть весьма разнообразны. И такъ какъ эти образы представляютъ послѣдніе недѣлимые данныхъ совокупностей, то и называются ихъ элементами.

Въ примѣрахъ 1. и 2. предыдущаго п. таковыми геометрическими элементами совокупностей являются точки. Въ примѣрѣ 3. элементы представляютъ прямыя линіи, въ примѣрѣ 4. плоскости, а въ примѣрѣ 5. круги.

3. Изъ этихъ совокупностей особенное значеніе имѣютъ тѣ, которые опредѣляются наименьшимъ числомъ элементовъ.

Напр. всякая простая и непрерывная совокупность точекъ есть линія. Но изъ всѣхъ возможныхъ линій выдѣляется по простотѣ и важности прямая линія какъ опредѣляемая двумя точками, то есть двумя ея элементами. Все равно, какъ бы мы ни выбрали эти двѣ точки на прямой, опредѣляемая ими совокупность, то есть сама прямая, будетъ всегда одна и та же. Всякая такая совокупность, представляющая одну простую безконечность элементовъ, есть совокупность первой ступени.

Тремя точками однозначно опредѣляется плоскость, все равно какія бы три ея точки мы ни выбрали для ея опредѣленія. Но такъ какъ каждыя двѣ изъ этихъ трехъ точекъ опредѣляютъ прямую, то есть совокупность первой ступени, то на плоскость мы должны смотрѣть какъ на совокупность второй ступени, такъ какъ въ ея составъ входитъ безконечное множество совокупностей первой ступени напр. всѣ

прямыя, опредѣляемыя точками прямой и еще одною постоянною точкою, это такъ сказать совокупность совокупностей.

Всѣ точки пространства представляютъ совокупность третьей ступени, такъ какъ могутъ разсматриваться какъ безконечная совокупность плоскостей напр. параллельныхъ.

Вмѣсто точекъ мы можемъ взять за элементы какіе нибудь другіе образы (напр. прямыя, плоскости, круги и др.) и составлять изъ нихъ совокупности разныхъ ступеней. Но и въ этихъ совокупностяхъ линейныя мы будемъ различать по тому же признаку наименьшаго числа, какъ только что сдѣлано для точекъ.

4. Въ виду того, что въ Новой Геометріи постоянно приходится имѣть дѣло съ совокупностями разныхъ ступеней, употребленіе столь длинныхъ, хотя и слишкомъ часто необходимыхъ выраженій, какъ „совокупность такой-то ступени“ весьма неудобно и должно быть замѣнено короткимъ, но систематичнымъ, изъ котораго сразу было бы видно, о какой ступени идетъ рѣчь.

Будемъ называть совокупности первой ступени примами, второй ступени секундами, третьей ступени терціями и т. д. Изъ такого опредѣленія слѣдуетъ, что примы состоятъ изъ безконечнаго числа элементовъ, секунды изъ примъ, терціи изъ секундъ и т. д.

Напр. прямая есть прима точекъ; также и всякая вообще кривая линія. Плоскость и всякая вообще поверхность можетъ быть составлена изъ безконечнаго числа линій, то есть примъ.

Все пространство представляетъ терцію точекъ; но если бы мы вообразили себѣ пространство четырёхъ измѣреній, то такое пространство представляло бы кварту точекъ.

Но если реальное пространство и не представляетъ кварталъ точекъ, то все же оно обнимаетъ кварталъ шаровъ. Въ самомъ дѣлѣ, это пространство обнимаетъ терцію различныхъ точекъ; но каждая точка можетъ быть принята за центръ безконечной совокупности шаровъ всѣхъ діаметровъ отъ нуля до безконечности, а потому полная совокупность шаровъ есть безконечная совокупность терцій шаровъ то есть кварты.

До сего времени для сокращеннаго обозначенія совокупностей разныхъ ступеней употреблялись случайныя выраженія, созданныя на цѣмечкомъ языкѣ гениальными творцами разныхъ отдѣловъ Новой Геометріи и затѣмъ переведенныхъ на другіе языки. На нѣмецкомъ языкѣ примы закрѣплялось словомъ *Raum*!

кунды Bündel, понятие терціи Gebüsch. Первые два слова переносились на русский языкъ выраженіями „пучекъ“, „связка“; третье выраженіе не получило общепринятаго переводнаго выраженія (могло бы быть переведено словомъ „дорожѣ“). Для кварты и на нѣмецкомъ языкѣ не оказалось соответственнаго слова. Во всякомъ случаѣ примѣненіе этихъ терминовъ было нецѣлесообразно. Напр. выраженіе „гармоническій пучекъ“ означать не приму лучей, а лишь определенную совокупность изъ четырехъ лучей. Удобныя для такихъ определенныхъ и конечныхъ совокупностей, эти выраженія совершенно неудобны для систематическаго изложенія и развитія понятій.

Изъ примѣровъ совокупностей, приведенныхъ въ п. 1, примѣръ 1 относится къ секундѣ точекъ, примѣръ 2 къ двумъ примамъ точекъ, примѣръ 3 къ нелинейной примѣ прямыхъ, примѣръ 4 къ нелинейной секундѣ плоскостей, примѣръ 5 къ двумъ нелинейнымъ примамъ круговъ.

5. Изъ всѣхъ возможныхъ примъ точекъ существуетъ только одна, однозначно определяемая двумя произвольными точками, а именно прямая линія.

Остальныя примы точекъ, то есть кривыя линіи, требуютъ для своего опредѣленія большаго числа точекъ. Такъ кругъ опредѣляется тремя, эллипсъ и гиперболоа опредѣляются пятью точками и т. д.

Также изъ всѣхъ возможныхъ секундъ точекъ имѣется только одна, однозначно определяемая тремя точками, а именно плоскость.

Такія исключительныя совокупности, опредѣляемыя минимальнымъ числомъ элементовъ, называются линейными.

Поэтому прямая есть линейная прима, плоскость есть линейная секунда точекъ.

Линейнымъ совокупностямъ принадлежитъ въ геометріи столь исключительная роль, что ради краткости не желательно \*каждый разъ, говоря о нихъ, повторять это выраженіе полностью. И въ дальнейшемъ изложеніи мы будемъ часто такія линейныя совокупности обозначать просто какъ примы, секунды и пр.; и лишь тогда, когда будемъ имѣть дѣло съ нелинейными совокупностями, мы обязательно будемъ прибавлять характеристичное для совокупности выраженіе.

Итакъ вообще линейною прямою мы обозначаемъ такую совокупность элементовъ, которая выполнѣ опредѣляется двумя изъ нихъ, линейною секундою такую, которая опредѣляется тремя изъ нихъ и т. д.

Напр. линейная прима лучей на плоскости есть совокупность всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную постоянную точку, потому что два произвольно взятые луча этой совокупности выполнѣ и однозначно опредѣляютъ всю совокупность по точкѣ ихъ пересѣченія (центръ примы лучей). Линейная секунда плоскостей есть совокупность всѣхъ плоскостей,

проходящихъ чрезъ данную постоянную точку, потому что три произвольныя плоскости этой секунды выполнѣ и однозначно опредѣляютъ всю секунду.

6. Число элементовъ, опредѣляющихъ линейную совокупность  $n$ -ой ступени, есть  $n+1$ .

Линейная прима, по опредѣленію, есть совокупность, опредѣляемая двумя элементами.

Для опредѣленія линейной секунды намъ достаточно имѣть линейную приму и еще одинъ элементъ, не входящій въ составъ этой примы.

Онъ съ любымъ изъ элементовъ примы опредѣляетъ линейную же приму, а потому полная совокупность составитъ изъ бесконечнаго числа линейныхъ примъ и всегда останется тою же, каковыя бы другіе элементы той же секунды мы ни замѣнили взятый для опредѣленія элементъ (лишь бы онъ не входилъ въ составъ опредѣляющей примы).

Для опредѣленія линейной терціи кромѣ тѣхъ трехъ элементовъ, которые опредѣляютъ линейную секунду, намъ нуженъ еще элементъ, не входящій въ составъ секунды. Тогда, составивъ изъ произвольныхъ двухъ изъ этихъ четырехъ элементовъ линейную приму, мы легко получимъ бесконечное число секундъ, опредѣляемыхъ двумя остальными элементами и однимъ изъ бесконечно большаго числа элементовъ примы.

Понятно, что полное число всѣхъ возможныхъ элементовъ, принятыхъ въ разсмотрѣніе, опредѣляетъ высшую ступень возможныхъ для даннаго элемента совокупностей.

Напр. для точекъ на плоскости высшая ступень есть вторая, такъ какъ вся совокупность всѣхъ точекъ на плоскости есть секунда; въ пространствѣ же высшая ступень для точекъ есть третья, а для шаровъ четвертая.

7. Двѣ линейныя совокупности одной и той же ступени могутъ пересѣкаться лишь въ линейной же совокупности одною ступенью ниже.

Пересѣченіемъ двухъ совокупностей мы называемъ ту, которая обща обѣимъ. Если эта послѣдняя опредѣляется числомъ  $n$  элементовъ, то, по опредѣленію линейныхъ совокупностей вообще, могли бы и для опредѣленія пересѣкающихся совокупностей взять эти же  $n$  элементовъ. Но такъ какъ совокупность пересѣченія есть только часть этихъ совокупностей, то для опредѣленія каждой изъ нихъ въ отдѣльности нужно было бы для каждой отдѣльно взять еще по крайней мѣрѣ по одному элементу (не входящему въ составъ совокупности пересѣченія), и тогда дѣйствительно линейная совокупность

пересѣченія обнимала бы всё общіе элементы обѣихъ совокупностей, я никакихъ другихъ, а сама пересѣкающаяся совокупности были бы одною ступенью выше, чѣмъ совокупность пересѣченій. Такъ какъ подъ буквою *n* не подразумѣвается какое-нибудь определенное число, то съ повышеніемъ этого числа одновременно повышалась бы ступень совокупности пересѣченія, какъ и ступени обѣихъ пересѣкающихся совокупностей.

Мы говоримъ въ теоремѣ лишь про возможность пересѣченія, такъ какъ можно допустить, что такого пересѣченія и не происходитъ. Напр. двѣ прямыя то есть линейныя примы точекъ въ пространствѣ могутъ и не пересѣкаться.

Эти теоремы выводятъ насъ за предѣлы нагляднаго представленія, такъ какъ изъ нея слѣдуетъ напр. что двѣ линейныя терціи могутъ пересѣкаться въ линейной секундѣ и т. п.

Двѣ линейныя примы во всякомъ случаѣ могутъ пересѣкаться лишь въ одномъ единственномъ элементѣ.

8. Всякія геометрическія построенія сводятся къ проведенію извѣстныхъ совокупностей и опредѣленію ихъ соотношеній.

Напр. въ элементарной геометріи на плоскости всё построенія сводятся къ проведенію прямыхъ и круговъ. Въ высшей геометріи допускается возможность проведенія кривыхъ, имѣющихъ строгое опредѣленіе и чаще всего кривыхъ второго порядка. Но при этомъ за элементы всѣхъ построеній всегда принимаются точки. Поэтому если совокупность всѣхъ возможныхъ построеній вообще мы обозначимъ *системою*, имѣющею для всѣхъ элементовъ опредѣленный геометрическій образъ, то сами возможные геометрическія системы мы можемъ различать по тому образу, который принять за элементъ во всей системѣ.

Съ этой точки зрѣнія какъ элементарная геометрія, такъ и геометрія высшая могутъ быть объединены въ одну геометрическую систему — систему точекъ.

Новая же геометрія допускаетъ элементы и другого рода, а потому сама собою распадается на отдѣльныя системы — согласно принятымъ элементамъ — и посреди этихъ системъ система точекъ есть лишь одна изъ возможныхъ системъ.

Вообще за возможный элементъ какой-нибудь системы мы можемъ принять такой, чтобы по двумъ произвольно взятымъ изъ нихъ мы могли построить линейную приму. Если слѣдимъ изъ нихъ построить

линейную приму, то изъ трехъ элементовъ слѣдимъ построить линейную секунду, изъ четырехъ терцію и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, построивъ изъ двухъ элементовъ линейную приму и имѣя третій элементъ, не входящій въ составъ примы, мы также изъ него и изъ всѣхъ элементовъ примы можемъ построить линейную секунду и т. д.

Напр. на плоскости мы можемъ принять за элементы круги, проходящіе чрезъ одну постоянную точку. Въ самомъ дѣлѣ, два такихъ круга необходимо пересѣкаются <sup>1)</sup> еще въ какой-нибудь другой точкѣ, а чрезъ двѣ точки мы можемъ провести строго определенную совокупность круговъ, которая, слѣдовательно и будетъ линейною прямою круговъ; и каждые два произвольные круги этой примы вполнѣ строго и однозначно опредѣляютъ ту же приму.

9. Существуетъ разрядъ построеній, устанавливающихъ соотвѣстствіе между элементами разныхъ совокупностей и системъ. Такое соотвѣстствіе можетъ быть однозначнымъ, если одному определенному элементу отвѣчаетъ одинъ единственный определенный элементъ или многозначнымъ, если ему отвѣчаетъ два или большее число элементовъ другой совокупности, которая во всякомъ случаѣ должна быть той же ступени. Такое соотвѣстствіе получило общее наименованіе *проективности*.

Въ частности, если это соотвѣстствіе однозначное оно ближе отмѣчается словомъ *коррелятивность* (или *соотнесительность*), въ особенности если оно относится къ элементамъ разнороднымъ (напр. соотвѣстствіе между точками и прямыми, точками и плоскостями, точками и кругами и т. д.). Если же оно относится къ элементамъ одного рода (между точками и точками, прямыми и прямыми, кругами и кругами и т. д.), то принято его отмѣчать словомъ *гомологичность*. Сами системы въ первомъ случаѣ будутъ *коррелятивными*, во второмъ *гомологичными*.

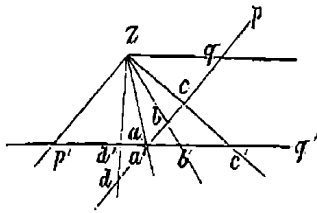
Наглядными примѣрами могутъ служить различнаго рода изображенія на чертежѣ.

Если имѣемъ рисунокъ или вообще извѣстную систему точекъ на плоскости, и мы хотимъ изображать на чертежѣ, какъ этотъ рисунокъ или эта система представится при разсматриваніи хотя бы сбоку искома, то на изображеніи каждая точка должна соответствовать одной, и только одной точкѣ рисунка или системы. Эта связь точекъ и есть связь гомологичности.

Если же наше изображеніе имѣетъ условный харак-

<sup>1)</sup> Въ томъ частномъ случаѣ, когда оба круга только касаются, обѣ точки пересѣченія сливаются въ одну. Этими двумя кругами опредѣляется примы всѣхъ касательныхъ въ одной точкѣ круговъ.

теръ, и напริมѣръ мы изобразимъ разныя плоскости въ пространствѣ точками, то все-таки для того, чтобы чертежъ имѣлъ полное значеніе, необходимо, чтобы каждый его точкѣ соответствовала въ пространствѣ одна, и только



Фиг. I.

одна плоскость. Эта связь точекъ на чертежѣ и плоскостей въ пространствѣ есть связь коррелятивности.

Установимъ соответствіе (гомологичность) между точками двухъ прямыхъ, принявъ, что точкамъ  $a, b, c$  гомологичны точки  $a', b', c'$  другой прямой (Фиг. I); со-  
вѣдимъ точки  $a$  и  $a'$ , а чрезъ точки  $b$  и  $b'$ ,  $c$  и  $c'$  проведемъ два луча, пересекающіеся въ точкѣ  $Z$ ; всякій другой лучъ, исходящій изъ  $Z$ , отмѣчаетъ на обѣихъ прямыхъ гомологичныя точки, и вообще между всѣми точками прямыхъ будетъ установлено однозначное соответствіе (гомологичность).

Также можемъ установить однозначное соответствіе между точками прямой и плоскостями, проходящими чрезъ какую-нибудь другую прямую, принявъ коррелятивными какую-нибудь точку прямой и проходящую чрезъ нее плоскость примы плоскостей. Здѣсь имѣемъ примѣръ коррелятивности между прямою точкою и плоскостями.

Также можемъ установить коррелятивность между точками на плоскости и кругами, проходящими чрезъ одну определенную постоянную точку, если примемъ за коррелятивные элементы кругъ и его центръ.

10. О громадномъ значеніи однозначной проективности мы можемъ судить прежде всего по тому, что въ геометрической сторонѣ явленій природы, совершающихся подъ дѣйствіемъ одного простого закона, мы именно наблюдаемъ эту связь въ послѣдовательности явленій, затѣмъ по общій тѣхъ математическихъ прѣмовъ, которыми пользуются точныя науки, чтобы въ возможно простомъ и удобно понимаемомъ видѣ изобразить болѣе или менѣе сложные и трудно воспринимаемые воображеніемъ объекты, и особенно когда рѣчь идетъ объ изображеніи на бумагѣ то есть на плоскости того, что представляетъ собой объектъ пространственный.

Къ природнымъ явленіямъ, сущность которыхъ выражается въ однозначной проективности, а именно въ гомологичности, относятся напр. явленія расширения твердыхъ тѣлъ отъ нагреванія, равномернаго давленія и вообще дѣйствія разнообразныхъ силъ<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Напр. въ самомъ простомъ видѣ представится намъ расширение стекляннаго шара. Проведемъ изъ его центра во всѣхъ направленіяхъ прямыя. Поставъ нагреванія, считая, что центръ остался точно на своемъ мѣстѣ, мы найдемъ, что всѣ остальные точки передвинутся по этимъ прямымъ; и если на одной изъ нихъ возьмемъ точку, бывшую сначала на разстояніи  $r$ , то послѣ нагреванія

Всегда вообще явленія усложняются мультиплицативностью на одной какой-либо силы или причинѣ, къ дѣйствию которой относится простой законъ, но нѣсколькихъ.

Въ громадномъ большинствѣ случаевъ человекъ не въ силахъ изъ такой совокупности дѣйствующихъ причинъ выделить умственнымъ процессомъ составляющія и прямо вывести рядъ законовъ, относящихся къ каждой дѣйствующей причинѣ въ отдѣльности. Невозможность этого вызываетъ необходимость постановки хода явленія умышленно въ особые условія, можетъ быть нигдѣ и не проявляющіеся въ природѣ безъ такой особой постановки эксперимента, имѣющаго задачей извѣсти дѣйствіе всѣхъ другихъ причинъ, кромѣ научаемой, къ разбѣрамъ преврегаемости; и вотъ тогда то выясняются тѣ простыя законы точной науки, которыя составляютъ ея сущность и ставятъ человека въ положеніе понимающаго явленія и подучившаго средства какъ дѣлать предсказаніе, такъ и направлять явленія въ сторону, выгодную для его жизни. Только послѣ вывода этихъ простыхъ законовъ выясняется и простота геометрической стороны явленій, выражающаяся въ гомологичности точекъ во время хода явленія.

Собственно же коррелятивностью приходится пользоваться для упрощенія изображеній; но и приложенія этого рода совершенно необходимы въ общемъ ходѣ усвоенія законовъ природы.

11. Установивъ однозначно проективную связь между элементами линейныхъ совокупностей, мы можемъ параллельно и однозначно сопоставлять и всѣ геометрическія построенія въ сравнимыхъ системахъ.

Поэтому, если рядъ такихъ построеній въ одной системѣ приводитъ къ доказательству какой-либо теоремы, то благодаря этому становится излишнимъ доказательство соответственной теоремы для коррелятивной системы.

Теоремы мы можемъ непосредственно переносить изъ одной системы въ другую, соблюдая лишь строгое соответствіе въ выраженіяхъ условій, при которыхъ эта теорема имѣетъ доказательную силу.

Но конечно не всякія построенія могутъ такимъ образомъ сопоставляться для разныхъ системъ, а только такія, которыя обусловливаются однозначностью соответствія между элементами этихъ системъ.

Если двѣ системы гомологичны (то есть каждой точкѣ одной соответствуетъ одна, и только одна, точка другой) и дана кривая въ одной, мы выведемъ гомологичную кривую въ другой. Проведя чрезъ двѣ точки первой сѣкущую, мы можемъ ту же операцію произвести и во второй, то есть провести сѣкущую

на  $t$  градусовъ и если коэффициентъ расширения есть  $\alpha$ , точка передвинется и станетъ на разстояніи  $r(1+\alpha t)$ ; и такъ всякой первоначальной точкѣ послѣ расширения отъ нагреванія будетъ соответствовать одна, и только одна, точка, которая поэтому и будетъ точкою гомологичною.

чрезъ двѣ гомологичныя точки. Если проведемъ касательную къ кривой въ какой-либо точкѣ, то во второй системѣ ей будетъ также гомологична касательная въ гомологичной точкѣ кривой.

Такія построенія назовемъ *позиционными*.

Но если въ первой системѣ возьмемъ средину между двумя точками, то вообще этой средней точкѣ уже не будетъ гомологична средняя же точка въ гомологичной системѣ. Если изъ какой-нибудь точки проведемъ кругъ, то вообще этому кругу въ другой системѣ не будетъ гомологиченъ кругъ же, и тѣмъ менѣе кругъ того же радіуса. Если проведемъ къ прямой перпендикуляръ въ какой-нибудь точкѣ, то вообще этому перпендикуляру не будетъ гомологиченъ перпендикуляръ же въ другой системѣ. Поэтому всякія такія построенія уже не есть позиціонныя.

Принявъ это, можемъ сказать, что всѣ теоремы, вытекающія изъ позиціонныхъ построеній, одинаково дѣйствительны для всѣхъ коррелятивныхъ системъ.

Къ позиціоннымъ построеніямъ прежде всего относится проведеніе линейныхъ совокупностей, пересѣченіе и касаніе коррелятивныхъ совокупностей.

Пусть дана въ пространствѣ поверхность  $n$ -го порядка. Это означаетъ, что поверхность какою-нибудь прямою можетъ быть пересѣчена въ  $n$  точкахъ, но не больше.

Каждой точкѣ этой системы коррелятивенъ некоторый опредѣленный элементъ другой системы, а совокупности точекъ поверхности, то есть самой поверхности, коррелятивна некоторая нелинейная секунда. И вотъ мы уже безъ спеціальнаго доказательства можемъ утверждать, что во второй системѣ некоторая линейная прима можетъ пересѣчь эту секунду въ  $n$  элементахъ, но не больше, и что слѣдовательно эта секунда есть также секунда  $n$ -го порядка.

Въ частныхъ случаяхъ такія выраженія какъ „пересѣченіи“ получаютъ особый, непривычный смыслъ.

Возьмемъ напр. въ системѣ точекъ поверхность шара и примемъ за коррелятивныя съ точками этой системы такія плоскости другой системы, чтобы въ частности, точкамъ самого шара были коррелятивны касательныя плоскости (возможность такого допущенія вѣрно конечно доказать, что и будетъ сдѣлано въ главѣ III). Пересѣтемъ шаръ прямою, которая съ его поверхностью будетъ имѣть двѣ общія точки (пересѣченія)  $a$  и  $b$ . Эти двѣ точки однозначно опредѣляютъ линейную приму то есть прямую  $ab$ . Въ коррелятивной системѣ точкамъ  $a$  и  $b$  соответствуютъ касательныя плоскости  $A$  и  $B$ , также однозначно опредѣляющія линейную приму плоскостей  $AB$  то есть совокуп-

ность плоскостей, пересѣкающихся въ опредѣляемой ими прямой.

Теперь ясно, что какъ для системы точекъ мы можемъ сказать, что поверхность шара пересѣкается съ прямою  $ab$  въ точкахъ  $a$  и  $b$ , такъ для системы плоскостей, что совокупность плоскостей, огибающихъ шаръ пересѣкается съ примой плоскостей  $AB$  въ плоскостяхъ  $A$  и  $B$ .

Измѣняя положеніе прямой  $ab$  то есть точекъ  $a$  и  $b$  на шарѣ, мы приведемъ обѣ эти точки къ слитію въ одну точку, и тогда прямая  $ab$  станетъ касательною къ шару, мы должны соответственно измѣнять и положеніе плоскостей  $A$  и  $B$ , а слѣдовательно и примы  $AB$ , пока обѣ плоскости не сольются въ одну: и тогда прима  $AB$  представитъ совокупность плоскостей, пересѣкающихся въ прямой, касательной къ тому же шару, и эта прима съ совокупностью плоскостей, огибающихъ шаръ будетъ имѣть всего одну общую плоскость (слившуюся плоскость  $A$  и  $B$ ), и мы можемъ сказать, что прима касательна къ этой совокупности, ибо имѣетъ съ нею всего одну общую плоскость.

12. Въ предыдущемъ и было показано, что если въ системѣ точекъ имѣется поверхность  $n$ -го порядка, то въ коррелятивной системѣ этой поверхности соответствуетъ некоторая секунда  $n$ -го порядка.

Примѣнивъ тотъ же ходъ разсужденія, мы можемъ сказать, что если въ системѣ точекъ имѣется кривая  $n$ -го порядка то есть такая, которая некоторою плоскостью можетъ быть пересѣчена въ  $n$  точкахъ, но не больше, то въ коррелятивной системѣ этой кривой соответствуетъ прима  $n$ -го порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, построенія пересѣченія есть построенія позиціонныя. Самой кривой также какъ и пересѣкающей ее плоскости въ коррелятивной системѣ соответствуютъ некоторымъ прима и секунда, причемъ каждой опредѣленной точкѣ какъ кривой, такъ и плоскости, соответствуетъ опредѣленный же единичный элементъ въ коррелятивной системѣ. Слѣдовательно и тѣмъ возможнымъ  $n$  точкамъ пересѣченія кривой и плоскости въ послѣдней системѣ также соответствуетъ  $n$  элементовъ какъ элементовъ общихъ и примы, и секунды, то есть элементовъ пересѣченія той и другой. Никакихъ другихъ общихъ элементовъ въ этой второй системѣ быть не можетъ, такъ какъ имъ соответствовали бы еще какія-нибудь точки пересѣченія кривой и плоскости въ системѣ точекъ, а это признано невозможнымъ.

Итакъ, если изъ двухъ коррелятивныхъ системъ одна есть система точекъ, и въ ней имѣется поверхность или кривая  $n$ -го порядка, то этой поверхности и этой кривой во всякой другой коррелятивной системѣ соответствуютъ также секунда или прима  $n$ -го порядка.

Въ частности, для системъ точекъ, если поверхность не можетъ быть пересѣчена никакою прямою