

Д. Гильберт

Наглядная геометрия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д11 **Д. Гильберт**
Наглядная геометрия / Д. Гильберт – М.: Книга по Требованию, 2014. –
304 с.

ISBN 978-5-458-27055-7

В книге содержится, действительно, очень наглядный, но достаточно строгий рассказ о геометрических науках и теориях, в частности о геометрической кристаллографии, о геометрической сущности кинематики и о топологии. Книга вполне доступна школьникам старших классов, интересующимся математикой. В то же время она во многих главах хорошо дополняет, не дублируя, курс вузовской математики. Эту книгу с удовольствием прочтет и зрелый математик, случайно не познакомившийся с нею в процессе своего математического образования.

ISBN 978-5-458-27055-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции — она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести весь этот материал в систематическую связь — и другая тенденция, тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремится к живому пониманию объектов и их *внутренних* отношений.

Что касается геометрии, то в ней тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям алгебраической геометрии, римановой геометрии и топологии, в которых находят широкое применение методы абстрактных рассуждений, символики и анализа. Тем не менее и ныне наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии, и притом не только как обладающее большой доказательной силой при исследовании, но и для понимания и оценки результатов исследования.

Здесь мы будем рассматривать геометрию в ее современном состоянии с наглядной стороны. Руководствуясь непосредственным созерцанием, мы сможем уяснить многие геометрические факты и постановку вопросов и благодаря этому во многих случаях мы сможем также изложить в наглядной форме методы исследований и доказательств, которые приводят к пониманию теорем без введения в рассмотрение деталей абстрактных теорий и выкладок. Например доказательство того, что сфера со сколь угодно малой дырой все еще разгибаема, или что два различных тора не всегда могут быть конформно отображены друг на друга, можно представить в такой форме, которая дает представление о ходе доказательства, не заставляя следовать за деталями аналитического изложения.

Благодаря разносторонности геометрии и ее отношениям к различным ветвям математики мы получим, таким образом, обзор математики вообще и представление об изобилии ее проблем и о богатстве содержащихся в ней идей. Так, с помощью наглядного рассмотрения выявятся результаты важнейших направлений геометрии, содействующие справедливой оценке математики в широкой публике. Ибо вообще математика не пользуется популярностью, хотя ее значение и признается. Причина этого лежит в распространенном представлении о математике как о продолжении и более высокой ступени счетного мастерства. Этому представлению должна противостоять наша книга, в которой вместо формул приведено много наглядных фигур, которые читатель легко дополнит моделями.

Книга должна послужить увеличению числа друзей математики, облегчая читателю проникновение в математику без необходимости изучения ее, сопряженного с известными трудностями.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При такой целеустановке благодаря богатству материала не может быть никакой речи о систематичности и полноте изложения; не могли быть исчерпаны также и отдельные темы. Далее невозможно во всех разделах этой книги предполагать у читателя равную степень математической подготовки. В то время как вообще изложение совершенно элементарно, некоторые прекрасные математические исследования можно изложить вполне понятно только прошедшим уже некоторую школу, если избегать утомительных длиннот.

Все добавления к отдельным главам предполагают известное предварительное образование. Они всегда дополняют, а не поясняют текст.

Различные ветви геометрии находятся в тесных и часто неожиданных взаимоотношениях друг с другом. В нашей книге это очень часто проявляется. При большом разнообразии материала было все же необходимо придать каждой отдельной главе известную законченность и в последующих главах не предполагать полного знания предыдущих; путем отдельных маленьких повторений мы надеялись достигнуть того, что каждая отдельная глава, а иногда даже отдельные разделы представляют интерес сами по себе и в отдельности доступны пониманию читателя. Пусть читатель прогуливается в огромном саду геометрии, в котором каждый может подобрать себе такой букет, какой ему нравится.

Основу этой книги составили четырехчасовые лекции «Наглядной геометрии», которые я читал зимой 1920/21 г. в Геттингене и которые обработал В. Роземан. В основном содержание и построение их остались неизменными. В деталях С. Кон-Фоссен многое переработал и частично расширил.

Давид Гильберт.

Геттинген, июнь 1932 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	5
Глава I. ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ	
1. Плоские кривые	9
2. Цилиндр и конус; конические сечения и поверхности вращения, образуемые ими	14
3. Поверхности второго порядка	19
4. Построение эллипсоида и софокусных поверхностей второго порядка при помощи нити	25
Добавление к главе первой	
1. Построение конического сечения при помощи подэры	30
2. Директрисы конических сечений	32
3. Подвижная стержневая модель гиперболоида	34
Глава II. ПРАВИЛЬНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ	
5. Плоские точечные решетки	36
6. Плоские точечные решетки в теории чисел	41
7. Точечные решетки в трех и более измерениях	47
8. Кристаллы как правильные точечные системы	54
9. Правильные системы точек и дискретные группы движений	58
10. Плоские движения и их сложение. Классификация дискретных групп плоских движений	60
11. Дискретные группы плоских движений с бесконечной фундаментальной областью	64
12. Кристаллографические группы движений плоскости. Правильные системы точек и стрелок. Построение плоскости из конгруэнтных областей	69
13. Кристаллографические классы и группы пространственных движений. Группы и точечные системы с зеркальной симметрией	79
14. Правильные многогранники	86
Глава III. КОНФИГУРАЦИИ	
15. Предварительные замечания относительно плоских конфигураций	91
16. Конфигурации (7_3) и (8_3)	93
17. Конфигурации (9_3)	96
18. Перспектива, бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности на плоскости	104
19. Бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности в пространстве. Теорема Дезарга и конфигурация Дезарга (10_3)	111
20. Сопоставление теорем Паскаля и Дезарга	118
21. Предварительные замечания относительно пространственных конфигураций	122
22. Конфигурация Рейе	123
23. Правильные тела и ячейки и их проекции	130
24. Исчислительные методы геометрии	144
25. Двойной шестисторонник Шлефли	149

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

26. Плоские кривые	155
27. Пространственные кривые	161
28. Кривизна поверхности. Случай эллиптический, гиперболический и параболический. Линии кривизны и асимптотические линии; точки округления, минимальные поверхности; «обезьянье седло»	164
29. Сферическое изображение и гауссова кривизна	172
30. Развертывающиеся поверхности. Линейчатые поверхности	182
31. Закручивание пространственных кривых	187
32. Одиннадцать свойств шара	190
33. Изгибание поверхности на себя	205
34. Эллиптическая геометрия	207
35. Гиперболическая геометрия. Ее взаимоотношения с евклидовой и эллиптической геометрией	213
36. Стереографическая проекция и преобразования, сохраняющие окружности. Модель Пуанкаре гиперболической плоскости	217
37. Методы отображений. Отображения, сохраняющие длину, сохраняющие площади; геодезическое, непрерывное и конформное отображения	228
38. Геометрические теории функций. Теорема Римана об отображениях. Конформное отображение в пространстве	230
39. Конформное отображение кривых поверхностей. Минимальные поверхности. Задача Платона	235

ГЛАВА V. КИНЕМАТИКА

40. Шарнирные механизмы	238
41. Движение плоских фигур	241
42. Прибор для построения эллипсов и их рулетт	248
43. Движения в пространстве	249

ГЛАВА VI. ТОПОЛОГИЯ

44. Многогранники	252
45. Поверхности	257
46. Односторонние поверхности	263
47. Проективная плоскость как замкнутая поверхность	272
48. Нормальные типы поверхностей конечной связности	280
49. Топологическое отображение поверхности на себя. Неподвижные точки. Классы отображений. Универсальная поверхность наложения тора	282
50. Конформное отображение тора	286
51. Задача о соседних областях, задача о нити и задача о красках	289

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ШЕСТОЙ

1. Проективная плоскость в четырехмерном пространстве	295
2. Евклидова плоскость в четырехмерном пространстве	296

Предметный указатель	298
--------------------------------	-----

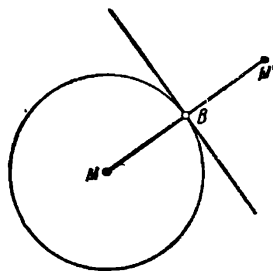
ПЕРВАЯ ГЛАВА

ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

1. Плоские кривые. Простейшей поверхностью является плоскость, простейшими кривыми — плоские кривые, простейшая среди последних — прямая. Прямую можно определить либо как кратчайший путь между двумя точками, либо как линию пересечения двух плоскостей, либо как ось вращения.

Следующей в порядке возрастания сложности кривой является окружность. Уже эта фигура послужила исходной точкой для столь многочисленных и столь глубоких исследований, что они могли бы сами по себе заполнить содержание целого курса. Мы определяем окружность как кривую, все точки которой отстоят на равном расстоянии от данной точки. Мы получаем окружность общеизвестным построением при помощи циркуля или натянутой нити.

Самое построение наглядно показывает, что окружность есть замкнутая, на всем протяжении выпуклая кривая; поэтому через каждую точку окружности можно провести определенную прямую — касательную, имеющую с окружностью только одну общую точку, точку касания, а в остальной части лежащую целиком вне окружности (черт. 1). Радиус MB , проведенный в точку касания B , должен быть кратчайшим расстоянием от центра M круга до касательной t , ибо все точки последней, за исключением точки касания, лежат вне круга и, следовательно, отстоят от центра дальше, чем точка касания. Отсюда далее следует, что этот радиус перпендикулярен к касательной. Для доказательства построим зеркальное изображение центра M относительно прямой t , т. е. опустим перпендикуляр из точки M на прямую t и продолжим его на равное расстояние до точки M' ; тогда M' называется зеркальным изображением точки M . А так как MB есть кратчайшее расстояние от M до t , то из соображений симметрии $M'B$ также должно быть кратчайшим расстоянием от M' до t . Следовательно, MBM' должно быть кратчайшим расстоянием между M и M' , и, значит, линия MBM' не может иметь излома в точке B , т. е. MB действительно является перпендикуляром к t .



Черт. 1.

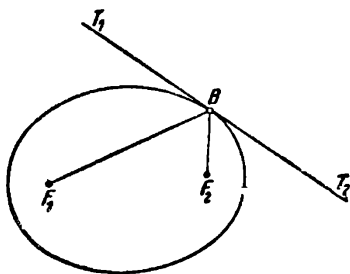
Само собой напрашивается обобщение этого построения окружности, а именно: при построении окружности с помощью нити мы брали связанную нить, закрепляли ее конец в неподвижной точке, центре круга, и, натягивая нить, вычерчивали кривую. Если же закрепить связанную нить не в одной, а в двух точках, то мы получим кривую, похожую на окружность, называемую эллипсом. Обе точки закрепления нити называются фокусами эллипса. Построение с помощью нити показывает, что эллипс можно определить как кривую, точки которой имеют постоянную сумму расстояний от двух данных точек. Сближая обе точки, мы получим окружность как предельный случай эллипса. Всем упомянутым свойствам окружности соответствуют простые свойства эллипса. Эллипс также замкнут, всюду выпуклый и имеет в каждой своей точке касательную, которая за исключением точки касания целиком лежит вне эллипса. Радиусам окружности соответствуют в эллипсе две прямые, соединяющие точку эллипса с фокусами. Они называются радиусами-векторами точки эллипса.

Тому факту, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу в точке касания, соответствует в случае эллипса то, что касательная образует равные углы с радиусами-векторами, проведенными в точку касания.

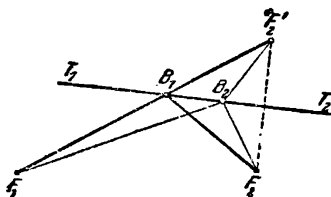
Это утверждение означает, что на черт. 2:

$$\sphericalangle F_1BT_1 = \sphericalangle F_2BT_2.$$

Для доказательства (черт. 3) построим зеркальное изображение точки F_2 относительно касательной и обозначим его F'_2 . Прямая $F_1F'_2$, которая пересекается с касательной в некоторой точке B_1 , есть кратчайшее рас-



Черт. 2.



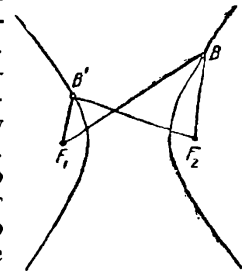
Черт. 3.

стояние между F_1 и F'_2 . Следовательно $F_1B_1F_2$ есть кратчайший путь от F_1 к F_2 , имеющий общую точку с касательной, ибо для всякой иной точки B_2 касательной $F_1B_2F_2 = F_1B_2F'_2$ будет больше, чем $F_1B_1F_2 = F_1B_1F'_2$. С другой стороны, кратчайший путь между F_1 и F_2 , имеющий общую точку с касательной, образуют радиусы-векторы, проведенные в точку касания B , ибо всякая другая точка касательной, как расположенная вне эллипса, имеет большую сумму расстояний от фокусов, чем точка B эллипса; значит точки B и B_1 совпадают, а отсюда и вытекает наше

утверждение, ибо F_2 и F_2' расположены симметрично относительно прямой T_1T_2 , а $\sphericalangle F_1B_1T_1$ есть вертикальный угол для $\sphericalangle F_2'B_1T_2$.

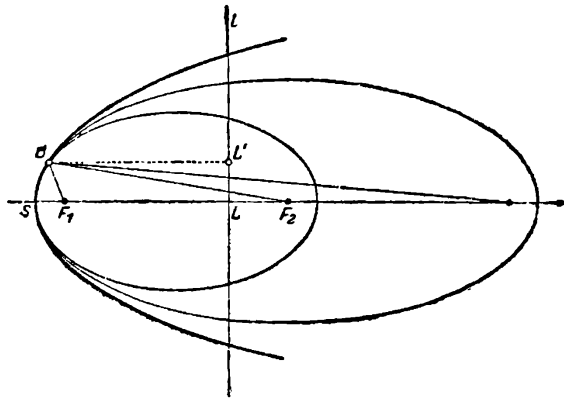
Это свойство касательной к эллипсу находит применение в оптике, чем и объясняется название «фокусы». Именно, если поместить источник света в одном фокусе, то лучи, зеркально отраженные от эллипса, соберутся в другом фокусе.

Не так легко, как построение эллипса, хотя принципиально столь же просто, построение кривой, у которой *разность* расстояний ее точек от двух неподвижных точек постоянна. Эта кривая называется гиперболой, а неподвижные точки — ее фокусами. Для каждой точки B или B' кривой (черт. 4) должно удовлетворяться или соотношение $F_1B - F_2B = a = \text{const.}$ или $F_2B' - F_1B' = a$. Соответственно этому гипербола состоит из двух отдельных ветвей. Вид гиперболы наглядно показывает, что кривая эта всюду выпукла и имеет касательную во всякой точке. Ниже (стр. 16, примечание) будет показано, что и в случае гиперболы касательная к кривой имеет с этой кривой только одну общую точку — именно точку прикосновения. Так же, как и в случае эллипса, можно показать, что касательная к гиперболе делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными в точку касания (черт. 6).



Черт. 4.

Из эллипса с помощью предельного перехода можно получить новую кривую — параболу (черт. 5). Для этого оставим один фокус, например F_1 , и ближайшую к нему вершину S эллипса неподвижными (вершинами



Черт. 5.

эллипса называются точки пересечения кривой с прямой, соединяющей ее фокусы). Будем теперь рассматривать эллипсы, получающиеся при перенесении второго фокуса F_2 все далее от точки F_1 на продолжение прямой SF_1 ; эти эллипсы стремятся к некоторой предельной кривой, которая и есть парабола. Из самого предельного перехода можно вывести

простое определение параболы. Именно, при вычерчивании эллипса с помощью нити мы можем заметить, что если карандаш находится вблизи точки S (черт. 5), то при достаточно большом расстоянии между F_1 и F_2 отрезок нити, соединяющей карандаш с точкой F_2 , почти параллелен линии SF_1 . Следовательно, если в некоторой точке L прямой F_1F_2 восстановить перпендикуляр l к F_1F_2 , то приближенно будем иметь:

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{const.}$$

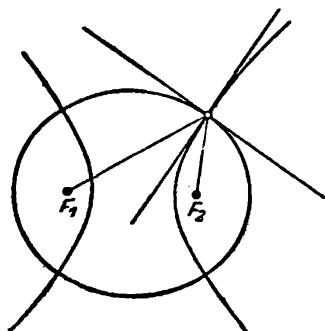
(где L' — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую l). Если теперь ввести новую постоянную, равную

$$\text{const.} - LF_2$$

(LF_2 имеет постоянное значение для каждой кривой), то будем иметь:

$$F_1B + BL' = \text{const.}$$

Это соотношение будет удовлетворяться с тем большей точностью, чем больше расстояние F_1F_2 , а для предельной кривой оно будет вполне точно. Таким образом парабола есть кривая, для точек которой сумма



Черт. 6.

расстояний от некоторой определенной точки и некоторой определенной прямой постоянна или (что приводит к тому же) такая кривая, точки которой отстоят на равном расстоянии от некоторой постоянной точки и некоторой постоянной прямой. Мы получим эту последнюю прямую, если проведем прямую, параллельную l и расположенную по другую сторону от точки S на расстоянии, равном SF_1 ; она называется директрисой параболы.

Если вообразить, что парабола представляет собой отражающее зеркало, то она должна отражать все лучи, падающие параллельно F_1S , в точку F_1 ; это также следует из предельного перехода.

Мы рассмотрели семейство эллипсов, имеющих общую вершину и общий ближайший к этой вершине фокус. Теперь рассмотрим семейство всех эллипсов, имеющих общие фокусы. Это семейство «софокусных» эллипсов покрывает плоскость однократно и непрерывно, т. е. через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая семейства; действительно, каждой точке соответствует вполне определенная сумма расстояний от этой точки до фокусов, и следовательно, каждая точка принадлежит тому эллипсу, которому соответствует эта сумма расстояний ¹⁾.

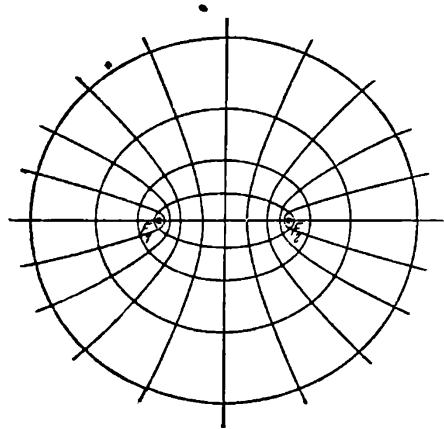
¹⁾ Отрезок прямой, соединяющий оба фокуса, представляет также эллипс (особенный, выродившийся). Этот эллипс получается, если принять за значение суммы расстояний длину отрезка прямой, соединяющей фокусы.

Возьмем еще семейство гипербол, имеющих эти же взятые нами точки в качестве фокусов. Это семейство также покрывает плоскость однократно и непрерывно¹⁾. Так что через каждую точку плоскости проходят в точности две кривые системы, состоящей из софокусных эллипсов и гипербол (черт. 6).

В каждой точке (за исключением фокусов) касательные к проходящим через эту точку двум кривым — эллипсу и гиперболе — делят пополам угол между радиусами-векторами взятой точки и смежный с ним угол; следовательно, касательные эти взаимно перпендикулярны.

Таким образом софокусные эллипсы и гиперболы образуют два «взаимно ортогональных семейства кривых» (два семейства называются ортогональными, если каждая кривая одного семейства пересекает каждую кривую другого семейства под прямым углом; угол пересечения двух кривых определяется как угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке пересечения).

Теперь, чтобы получить наглядное представление о нашей системе кривых (черт. 7), начнем с прямой, перпендикулярной к отрезку F_1F_2 , проходящей через его середину, и затем рассмотрим семейство гипербол. Мы видим, что гиперболы становятся все более сжатыми и наконец переходят в полупрямые, служащие продолжением отрезка F_1F_2 вправо и влево. При этом плоскость целиком заполняется гиперболой.



Черт. 7.

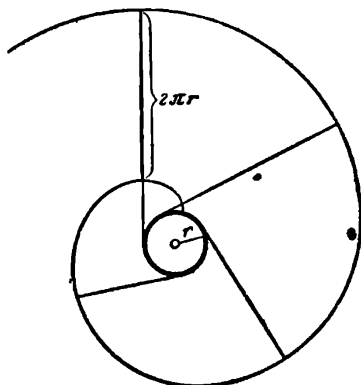
Теперь мы переходим к самому отрезку F_1F_2 , к которому непосредственно примыкают сперва очень сжатые эллипсы, которые затем постепенно становятся все более округлыми и вместе с тем безгранично растут. Таким образом мы вторично заполняем всю плоскость.

Другой, и притом исключительно простой, пример взаимно ортогональных семейств кривых представляют концентрические окружности и прямые, проходящие через их общий центр. Эту систему можно получить из предыдущей путем предельного перехода, заставляя сближаться оба фокуса. При этом эллипсы переходят в окружности, а гиперболы — в пары прямых.

Линии уровня и линии наибольшего подъема на географических картах суть также ортогональные семейства.

¹⁾ Прямая, проходящая через оба фокуса, если из нее выбросить отрезок соединяющий фокусы, есть вырожденная гипербола, точно так же, как прямая перпендикулярная к отрезку, соединяющему фокусы, и проходящая через его середину; для этой последней разность расстояний имеет постоянное значение — нуль.

Наконец упомянем другое построение с помощью нити, приводящее к ортогональным семействам. Возьмем конец нити, накрученной на какую-нибудь выпуклую кривую, например на окружность, и станем разматывать нить, все время натягивая ее (черт. 8). Тогда конец нити опишет «эвольвенту» окружности. Эта кривая описывает один за другим витки вокруг окружности, представляя собой, таким образом, спираль. Само построение наглядно показывает, что кривая перпендикулярна к одной из двух касательных к окружности, которые можно провести из какой-либо точки кривой.



Черт. 8.

Все последующие витки эвольвенты также пересекают эту касательную под прямым углом, причем отрезок касательной между двумя последующими витками эвольвенты имеет постоянную длину и равен как раз длине взятой окружности.

Можно получить бесконечное множество эвольвент той же самой окружности, если при разматывании нити

начать с других точек окружности. Но все эвольвенты могут быть получены также из одной эвольвенты путем вращения ее вокруг центра окружности. Семейство эвольвент покрывает всю плоскость за исключением внутренности круга однократно и непрерывно. Оно ортогонально к семейству полупрямых, касательных к окружности, взятых в определенном направлении обхода окружности.

И вообще для любого заданного семейства прямых ортогональное семейство состоит из эвольвент. Образующая их кривая — та, которую (как в нашем примере окружность) огибают прямые заданного семейства.

Мы вернемся еще к этому в дифференциальной геометрии (гл. IV) и кинематике (гл. V).

2. Цилиндр и конус; конические сечения и поверхности вращения, образуемые ими. Простейшую кривую поверхность, именно круговой цилиндр, можно получить при помощи простейших кривых — окружности и прямой — следующим образом. Через одну из точек окружности проведем прямую, перпендикулярную к плоскости круга, и будем перемещать ее параллельно самой себе вдоль всей окружности. Далее можно получить круговой цилиндр, заставив одну прямую вращаться вокруг другой прямой, параллельной первой и служащей для первой прямой осью вращения. Таким образом круговой цилиндр есть *поверхность вращения*. Поверхности вращения представляют важный тип поверхностей; они встречаются в практическом обиходе в виде стаканов, бутылок и т. д. Все они могут быть охарактеризованы тем, что их можно получить путем вращения некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Плоскость, перпендикулярная к оси, пересекает круговой цилиндр по окружности; плоскость, наклонная к оси, дает в сечении, как в этом можно непосредственно убедиться, эллипсовидную кривую. Покажем, что