М.Ф. Берг, М.А. Знаменский, Г.Н. Попов

Рабочая книга по математике

Для 7-го года обучения в городской школе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М.Ф. Берг

М11 Рабочая книга по математике: Для 7-го года обучения в городской школе / М. Ф. Берг, М.А. Знаменский, Г.Н. Попов – М.: Книга по Требованию, 2015. – 256 с.

ISBN 978-5-458-41290-2

Рабочая книга по математике. Для 7-го года обучения в городской школе. 7-е издание.

ISBN 978-5-458-41290-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Если мы захотим найти отношение двух других параллельных сторон наших треугольников, то, определяя отношение $\frac{AB}{A_1B_1}$ или $\frac{BC}{B_1C_1}$ первым или вторым способом, мы увидим, что

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{5}{2} \text{ и } \frac{BC}{B_1C_1}=\frac{5}{2},$$

т. е. отношения параллельных сторон оказываются равными. Мы знаем, что, соединяя равные отношения знаком равенства, мы получаем пропорцию. Следовательно,

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1} \text{ и } \frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}\ ^{1)}.$$

Итак, стороны наших треугольников, рассматриваемые как отрезки, образуют две пропорции. Всякие четыре отрезка, образующие пропорцию, мы называем *пропорциональными*. Поэтому мы может сказать, что *стороны наших треугольников пропорциональны.*

Вопросы. 1. Что называют общей мерой двух отрезков, нескольких отрезков?

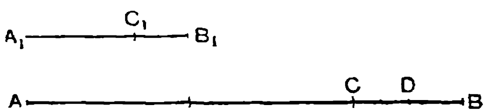
2. Какие отрезки называют пропорциональными?

Упражнения. 1. Найдите общую меру отрезков длиною в 10,5 *см* и 7 *см*.

2. Общая мера двух отрезков равна 3 *см*, а отношение их равно $\frac{3}{7}$. Найдите длины отрезков.

§ 2. Отношение двух отрезков, не имеющих общей меры.

Пусть нам надо найти отношение двух отрезков AB и A_1B_1 (черт. 2). Предположим, что, откладывая меньший отрезок A_1B_1 на большем, мы получаем остаток CB; что, откладывая CB на отрезке A_1B_1, мы получим новый остаток C_1B_1. Новый остаток надо будет откладывать на первом остатке CB. Если он уложится на нем целое число раз, то он уложится целое число раз и на A_1B_1 и на AB, т. е. будет их общей мерой. Предположим, что,



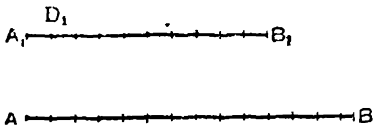
Черт. 2.

---

[1]) Мы могли бы присоединить еще и третью пропорцию: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, но она вытекает как следствие из двух первых на основании соображения, что две величины $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{BC}{B_1C_1}$, равные одной и той же третьей $\frac{AC}{A_1C_1}$, равны между собою

повторяя эти построения, мы никогда не получим такого остатка, который уложился бы целое число раз на предыдущем. Тогда говорят, что отрезки AB и A_1B_1 *не имеют общей меры.* В дальнейшем мы увидим, что отрезки, не имеющие общей меры, существуют (§ 28).

Как найти отношение таких отрезков? Как уже указывалось в § 1, можно, во-первых, измерить с одинаковой степенью точности эти отрезки какой-нибудь единицей длины и найти затем их отношение, которое будет, конечно, не точным, а приближенным. Во-вторых, можно поступить следующим образом. Разделим меньший отрезок A_1B_1 на несколько равных частей, например, на 10 (черт. 3) и откладываем одну такую часть A_1D_1 на большем AB. Пусть на нем она уложится 13 раз с остатком, меньшим, чем откладываемый отрезок. Эта часть не может уложиться на AB целое число раз без остатка, иначе она будет общей мерой отрезков AB и A_1B_1, а мы предположили, что у них общей меры нет. Тогда приближенно мы можем считать, что $AB=13A_1D_1$ и $A_1B_1=10A_1D_1$. Следовательно,



Черт. 3.

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{13A_1D_1}{10A_1D_1}=\frac{13}{10}.$$

Ясно, что отношение $\frac{13}{10}$ будет не точным, а приближенным.

Из сказанного следует, что для определения отношения двух, не имеющих общей меры, отрезков мы должны уметь *делить отрезок на равные части.*

Упражнения. 3. Постройте отрезки длиною в 10,5 *см* и 6 *см* и найдите геометрическим путем их общую меру.

§ 3. Деление отрезка на равные части.

Пусть дан произвольной величины угол AOB (черт. 4). Отложим на одной стороне его, например, на OA, ряд равных между собою отрезков OA_1, A_1A_2, A_2A_3,... Через одну из точек деления проведем прямую, пересекающую другую сторону угла, и через остальные точки деления проведем прямые, ей параллельные, так что $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$,... На стороне OB получается таким образом ряд отрезков OB_1, B_1B_2, B_2B_3,... Докажем, что эти отрезки также равны между собою.

Для доказательства проводим вспомогательные прямые A_1E, A_rF, $A_3G, \ldots$, параллельные стороне OB.

Сравнивая треугольники OA_1B_1, A_1A_2E, $A_2A_3F, \ldots$, мы видим, что они равны по равенству стороны и двух прилежащих углов (укажите равные части подробнее!), из чего следует, что сходственные стороны их OB_1, A_1E, $A_2F \ldots$, также между собою равны:

$$OB_1 = A_1E = A_2F = \ldots$$

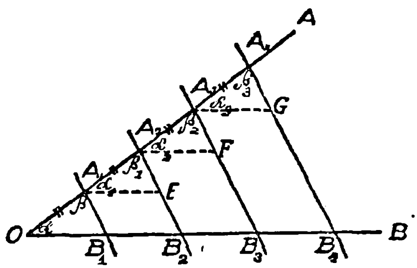
Рассматривая параллелограмы $B_1A_1EB_2$, $B_2A_2FB_3$, $B_3A_3GB_4, \ldots$, мы заключаем, что противоположные стороны их равны, а именно

$$A_1E = B_1B_2,\ A_2F = B_2B_3,\ A_3G = B_3B_4, \ldots$$

Заменяя в предыдущем равенстве отрезки A_1E, $A_2F, \ldots$ равными им отрезками, получаем:

$$OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots$$

Итак: *если отложим на одной стороне угла ряд равных отрезков и проведем через точки деления параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на ней получатся отрезки, также равные между собою.*



Черт. 4.

На этой теореме основывается решение задачи о делении отрезка на произвольное число равных частей.

Пусть требуется разделить данный отрезок AB на 5 равных частей (черт. 5).

Через один конец данного отрезка AB проводим под произвольным углом к нему прямую AC и на ней от A откладываем 5 равных отрезков.

Пятую точку деления C_5 соединяем с B и через остальные точки деления проводим прямые, параллельные C_5B, которые и рассекают AB, согласно изложенной теореме, на 5 равных частей в точках X_1, X_2, X_3 и X_4.

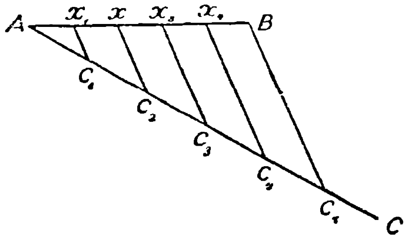
Упражнения. 4. Разделите данный отрезок на 3, на 6 и на 7 равных частей.

5. Разделите данный отрезок указанным приемом на 4 равные части и проверьте точность построения двукратным делением пополам приемом, основанным на симметрии.

6. Разделите данный отрезок на 2 части, из которых одна больше другой в 2 раза, в $1\frac{1}{2}$, в $1\frac{1}{4}$ раза.

§ 4. Построение пропорциональных отрезков.

Выделим на чертеже (черт. 5) какие-нибудь две параллельные между собою секущие сторон угла BAC, например, BC_5 и X_3C_3, и рассмотрим отрезки, отсекаемые ими на сторонах угла A. Секущая BC_5 отсекает отрезки AB и AC_5, секущая X_3C_3 — отрезки AX_3 и AC_3.



Черт. 5.

Отрезки AB и AX_3 состоят из 5 и из 3 равных частей; следовательно, их отношение выражается числом $\frac{5}{3}$:

$$\frac{AB}{AX_3}=\frac{5}{3}.$$

Отрезки AC_5 и AC_3, полученные на другой стороне угла, также состоят из 5 и из 3 равных между собою частей, так что их отношение выражается тем же числом:

$$\frac{AC_5}{AC_3}=\frac{5}{3}.$$

Итак, отношение отрезков, отсеченных на одной стороне угла, равно отношению отрезков на другой стороне угла, т. е. эти отрезки образуют пропорцию:

$$\frac{AB}{AX_3}=\frac{AC_5}{AC_3}.$$

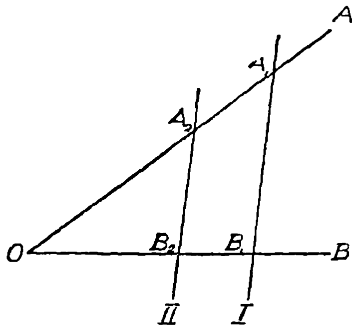
Мы рассматривали отрезки, отложенные от A. Рассматривая примыкающие друг к другу отрезки AX_3 и X_3B на одной стороне и соответствующие им отрезки AC_3 и C_3C_5 на другой стороне угла, мы получили бы отношение в обоих случаях равным $\frac{3}{2}$, т. е. получили бы пропорцию:

$$\frac{AX_3}{X_3B}=\frac{AC_3}{C_3C_5}.$$

При другом числе отсекаемых частей отношения отрезков выразились бы другими дробями, но равенство отношения двух отрезков на одной стороне отношению отрезков на другой стороне осталось бы в силе.

Отсюда выводим **теорему**, на которой основано все учение о пропорциональности и подобии: *две параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки*, т. е. если I ‖ II (черт. 6), то

$$\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB_2}.$$



Черт. 6.

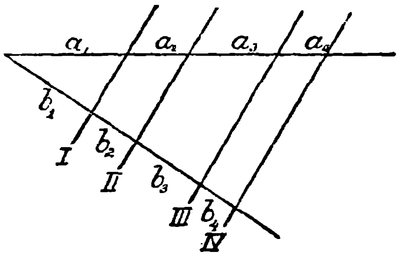
Так как средние члены пропорции можно переставлять, не нарушая равенства, то пропорция может быть записана и так:

$$\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}.$$

Если возьмем на стороне OA отрезки OA_2 и A_2A_1, то получим пропорцию:

$$\frac{OA_2}{A_2A_1}=\frac{OB_2}{B_2B_1}.$$

Вообще, если на одной стороне угла берем какую-либо пару отрезков, то их отношение равно отношению сходственно расположенных отрезков на другой стороне.



Черт. 7.

Можно увеличить число секущих. Так, если (черт. 7) I ‖ II ‖ III ‖ IV, то отношения сходственно расположенных отрезков на сторонах угла равны:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}.$$

Упражнения. 7. На одной стороне угла, вершина которого O, отложены отрезки $OA=9$ *см* и $AB=6{,}3$ *см*; на другой стороне отложен отрезок $OC=12{,}6$ *см*. На каком расстоянии от O следует взять на этой стороне угла точку D, чтобы прямые AC и BD были параллельны?

8. Параллельные прямые LL_1 и MM_1 пересекают стороны угла и отмечают на одной стороне два примыкающих друг к другу отрезка $a=13{,}2$ *см* и $b=8{,}4$ *см*. На другой стороне они отмечают два отрезка, из которых один больше другого на 3,6 *см*. Определите эти отрезки и сделайте построение всей фигуры в уменьшенном в 2 раза масштабе.

9. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Определите CM, если $AB = 1{,}5$ *м*, $CD = 22{,}5$ *дм* и $BM = 12$ *дм*.

10. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB разделена на отрезки $AC = 6$ *см* и $BC = 9$ *см* и из точки C проведена прямая, параллельная основаниям, до встречи в точке P с боковой стороной CD. Определите CD, если $CP = 15$ *см*.

11. Две параллельные прямые, пересекающие стороны угла, дают на одной стороне отрезки a_1 и a_2, на другой отрезки b_1 и b_2. Определите длины этих отрезков, если a_1 больше a_2 на 6 *см*, b_1 больше b_2 на 4 *см* и a_2 меньше b_1 на 1 *см*.

12. На одной стороне угла рядом параллельных прямых отсекаются отрезки, содержащие 9 *см*, 4 *см*, 6 *см* и 5 *см*. Сумма соответствующих им отрезков на другой стороне угла равна 18 *см*. Определите длину этих отрезков.

Из изложенной основной теоремы о пропорциональных отрезках вытекают непосредственно способы решения следующих задач на построение:

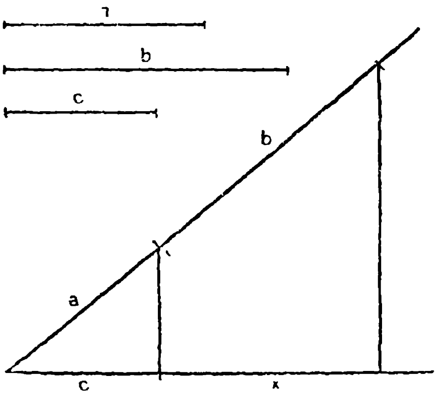
1. *Построить отрезок x, служащий четвертой пропорциональной* к заданным отрезкам a, b, c, т. е. удовлетворяющий *пропорции:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Строим произвольный угол и на одной стороне его откладываем отрезки a и b (черт. 8), на другой c; соединяем концы отрезков a и c и из конца отрезка b проводим прямую, параллельную прямой, соединяющей концы отрезков a и c. Эта прямая отсекает, по основной теореме, на второй стороне угла искомый отрезок x, удовлетворяющий пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

т. е. являющийся четвертой пропорциональной к данным трем отрезкам.



Черт. 8.

Выполнить построение, если x удовлетворяет пропорции:

$$1)\ \frac{a}{b}=\frac{x}{c};\quad 2)\ \frac{a}{x}=\frac{b}{c};\quad 3)\ \frac{x}{a}=\frac{b}{c}.$$

2. Дан отрезок AB. *Разделить отрезок на две части, пропорционально двум другим отрезкам m и n.*

При точке A строим угол произвольной величины, одной стороной которого служит AB. На другой стороне угла откладываем последовательно данные отрезки m и n. Свободный конец отрезка n соединяем с B и через конец отрезка m проводим прямую, параллельную первой прямой: отрезок AB рассекается ею на два отрезка x и y, которые пропорциональны m и n, т. е.

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}.$$

Упражнения. 13. Отрезок в 12 *см* разделите на части, пропорциональные отрезкам в 9 *см* и 15 *см*.

14. Отрезок в 9,6 *см* разделите в отношении 5 : 7.

15. Разделите отрезок в 10 *см* пропорционально трем данным отрезкам m_1, m_2, m_3.

16. Сумма диагоналей ромба равна 14 *см*, а отношение их равно отношению 2 : 5. Постройте ромб.

17. Постройте прямоугольник, периметр которого имеет данную величину P, если стороны его пропорциональны высоте равностороннего треугольника.

18. Постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза которого имеет данную величину c и делится высотой в отношении 2 : 1.

19. Сторона треугольника равна a и делится высотой на две части, пропорциональные данным двум отрезкам p и q. Угол, противолежащий данной стороне, имеет данную величину α. Постройте треугольник.

20. Постройте треугольник по данным основанию a, углу α при противоположной вершине и отношению $m : n$, в котором основание делится биссектрисою угла при вершине.

§ 5. Подобие фигур.

Всякий план местности и здания, всякий технический чертеж дают такие изображения фигур, при которых сохраняются неизменными величины углов между линиями фигуры и отношения размеров или отрезков, так что размеры и отрезки плана или чертежа *пропорциональны истинным величинам* изображаемых отрезков. *Две фигуры*, в которых все *отрезки пропорциональны* и *углы между соответствующими отрезками равны,* называются *подобными.* Таким образом, всякий план, чертеж представляет фигуру подобную той, с которой он снят.

Разница между действительным предметом и его планом состоит в том, что на плане все линейные размеры и отрезки фигуры уменьшены в одинаковое число раз. Это значит, что отношение любых двух соответственных отрезков двух подобных фигур есть величина постоянная. Это отношение мы можем назвать *коэфициентом пропорциональности* или *линейным коэфициентом подобия.* На планах, географических картах и т. п. коэфициент подобия указывается в виде *масштаба.* Масштаб дается дробью, например: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{250}$ и т. д., или в виде указания, что, например, в 5 *см* содержится 1 *км.* В первом случае масштаб прямо указывает отношение размеров плана или чертежа к действительным, т. е. указывает, что все отрезки настоящей фигуры уменьшены в 10, в 250 раз. Во втором случае он указывает то же самое, но только в иной форме; именно, указание „в 5 *см* содержится 1 *км*" надо понимать так: коэфициент подобия равен отношению

$$\frac{5\ см}{1\ км}=\frac{5\ см}{100000\ см}=\frac{1}{20\,000}.$$

Наоборот, масштаб $\frac{1}{10}$ можно задать в виде указания, что в 1 *см* содержится 1 *дм.*

Упражнения. 21. Какое уменьшение обозначает масштаб 100 *м* в 2 *дм*?

22. Стороны одного четыреугольника равны 18 *см*, 24 *см*, 12 *см* и 30 *см*. Найдите длину сторон подобного четыреугольника, если коэфициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

23. Разрез трубы изображен на чертеже двумя концентрическими окружностями; радиус внутренней окружности равен 4,8 *см*, а внешней окружности 6 *см*. Найдите настоящие размеры отверстия трубы и толщину стенок, если чертеж сделан в масштабе $\frac{1}{8}$.

§ 6. Подобные треугольники.

Изучение подобных фигур мы начнем с простейших фигур, с треугольников. Согласно определению прошлого параграфа два треугольника подобны, если их углы попарно равны, а стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны. В дальнейшем тороны двух подобных треугольников, лежащие против равных углов, мы будем называть сходственными.

Найдем признаки, при соблюдении которых два треугольника могут быть подобными.

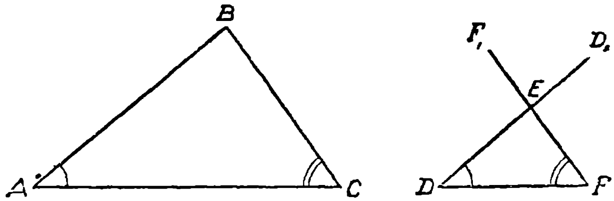
а) Возьмем треугольник ABC (черт. 9). Построим при концах произвольного отрезка DF углы, равные углам A и C. В пересечении их сторон получается точка E, так что образуется треугольник DEF.

Докажем, что эти два треугольника подобны (знак подобия: $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$).

Так как два угла треугольника DEF соответственно равны двум углам треугольника ABC, то и третьи углы равны: $\angle E = \angle B$.

Остается доказать, что сходственные стороны треугольников пропорциональны.

Если наложим треугольник DEF на треугольник ABC так, чтобы угол D совпал с равным ему углом A, то вследствие равенства остальных углов EF будет параллельна BC.



Черт. 9.

Применяя к углу A теорему о пропорциональных отрезках получаем:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Если совместим угол E с равным ему углом B, то DF направится параллельно AC, и мы получим другую пропорцию:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Соединяя эти две пропорции в одну строку и обозначая размеры сторон одного треугольника через a, b, c, а сходственных сторон подобного ему треугольника — через a_1, b_1, c_1, получаем:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1},$$

т. е. *сходственные стороны треугольников пропорциональны.*

Итак, доказана **теорема I**:

если два угла одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Постройте подобные треугольники, взяв на одной стороне треугольника точку и проводя через нее прямую, параллельную одной из сторон треугольника.

б) Наоборот, если известно, что стороны двух треугольников пропорциональны, то можно доказать, что углы их равны и, следовательно, треугольники подобны.

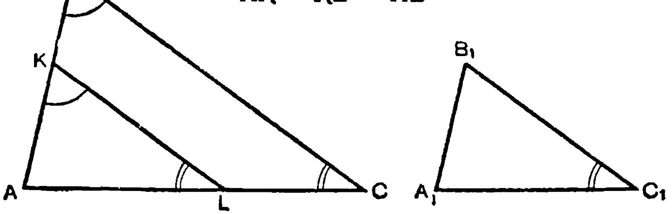
Дано (черт. 10), что стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны, т. е.

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

Требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Для доказательства откладываем на одной из сторон треугольника ABC, например на AB, отрезок AK, равный стороне A_1B_1, и через конец K отрезка проводим $KL \parallel BC$: тогда $\angle K=\angle B$ и $\angle L=\angle C$, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle AKL$, из чего следует пропорциональность сторон этих треугольников, т. е.

$$\frac{AB}{AK}=\frac{BC}{KL}=\frac{AC}{AL}.$$



Черт. 10.

Итак, стороны $\triangle AKL$ так же, как и стороны $\triangle A_1B_1C_1$, пропорциональны сторонам $\triangle ABC$; следовательно, они пропорциональны между собою:

$$\frac{A_1B_1}{AK}=\frac{B_1C_1}{KL}=\frac{A_1C_1}{AL}.$$

Но AK по построению равно A_1B_1, т. е. первое из полученных отношений равно 1; следовательно, и остальные два отношения, равные первому, равны 1; поэтому:

$$KL=B_1C_1 \text{ и } AL=A_1C_1,$$