

**Э. Мулен**

**Теория игр с примерами из  
математической экономики**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 50  
ББК 22  
Э1

- Э1      **Э. Мулен**  
Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен – М.: Книга по Требованию, 2021. – 198 с.

**ISBN 978-5-458-27111-0**

Книга французского математика, отражающая взаимосвязь между математической экономикой и теорией игр; в последующие годы на стыке этих двух наук получены интересные результаты. Изложение отличается методическими достоинствами - автор даёт возможность читателю самостоятельно разобраться в тщательно подобранных упражнениях. Для студентов и аспирантов, изучающих математическую экономику в теорию игр, а также для специалистов, работающих в этих областях.

**ISBN 978-5-458-27111-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



зовано предисловие к английскому изданию и опущена последняя глава французского издания, посвященная  $n$ -ядру и вектору Шепли, что позволило достичь большей цельности изложения, сосредоточенного теперь исключительно на стратегических концепциях.

*Н. С. Кукушкин*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория игр принадлежит к числу важнейших математических инструментов современных социально-экономических наук. Автор данной книги ставил перед собой две основные цели.

1) Предложить неспециалистам замкнутое изложение основных понятий теории стратегических игр. Определения и результаты с математической точки зрения являются совершенно строгими. Вместе с тем обсуждению и сравнению различных понятий равновесия уделено большее место, чем развитию методов их вычисления. Технические детали в большинстве случаев опускаются. Чтобы стимулировать читателей, предлагается более 75 упражнений и задач, некоторые из них достаточно трудны.

2) Обосновать полезность теоретико-игровых концепций для теоретического анализа социально-экономических ситуаций. Для этой цели были тщательно отобраны 39 ярких примеров. В основном они почерпнуты из микроэкономических проблем: приведены примеры, относящиеся к теории несовершенной конкуренции, теории общественных благ, рассмотрены модели голосования, методы дележа и т. д. Во многих задачах читателю предлагается развить интерпретацию игровой модели. Для этого было бы полезно некоторое знакомство с логикой экономических рассуждений.

Некоторые важные разделы современных теоретико-игровых исследований в данной книге не рассмотрены. Наибольший пробел — исследование игр с неполной информацией, поскольку, по моему мнению, результатам в этой области недостает завершенности и простоты, необходимой для учебника. Опушен также изложение аксиоматического подхода к решению игр в форме характеристической функции, поскольку я отнес бы их скорее к нестратегическому анализу общественного выбора (см. введение).

Исходным материалом для этой книги послужили лекции курса теории игр, прочитанного в Национальном институте статисти-

ки и экономического управления. Я особенно благодарен Полю Шамсору, который был инициатором этого курса.

Я глубоко признателен Центру математической теории принятия решений Парижского университета, где я начинал изучать теорию игр под руководством Жана-Пьера Обена и Ивара Экланда, а также лаборатории эконометрики Политехнической Школы, поддержка которой обеспечила выход этой монографии в свет, благодаря Вильме де Суза, Мартине Видони и Мари-Элен Понруа, очень хорошо напечатавших рукопись.

Я также благодарен Эндрю Шоттеру, убедившему меня подготовить английский вариант книги, и Институту математических исследований в социальных науках в Стэнфорде, гостеприимство которого позволило мне завершить работу.

*Эрве Мулен*

## ВВЕДЕНИЕ

Игра — это идеализированная математическая модель коллективного поведения: несколько индивидуумов (участников, игроков) влияют на ситуацию (исход игры), причем их интерес (их выигрыши при различных возможных ситуациях) различны. Антагонизм интересов рождает конфликт, в то время как совпадение интересов сводит игру к чистой координации, для осуществления которой единственным разумным поведением является кооперация. В большинстве игр, возникающих из анализа социально-экономических ситуаций, интересы не являются ни строго антагонистическими, ни точно совпадающими. Продавец и покупатель согласны, что в их общих интересах договориться о продаже, конечно, при условии, что сделка выгодна обоим. Однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах, определяющихся условиями взаимной выгоды сделки. Подобно этому рядовые избиратели, как правило, согласны отвести кандидатов, представляющих крайние точки зрения. Однако при избрании одного из двух кандидатов, предлагающих различные компромиссные решения, возникает ожесточенная борьба. Немного поразмыслив, читатель, наверное, согласится с тем, что большинство напоминающих игры ситуаций общественной жизни порождают как конфликтное, так и кооперативное поведение. По нашему мнению, теория игр является полезным логическим аппаратом для анализа мотивов поведения участников в подобных ситуациях. Она располагает целым арсеналом формализованных сценариев поведения, начиная с некооперативного поведения (гл. I) и до кооперативных соглашений с использованием взаимных угроз (гл. VI). Для каждой игры в нормальной форме использование различных кооперативных и некооперативных концепций равновесия, как правило, приводит к различным исходам. Их сравнение является основным принципом теоретико-игрового анализа и, по-видимому, источником строгих и вместе с тем содержательных рассуждений о побудительных мотивах поведения, вытекающих только из структуры игры в нормальной форме.



Во многих социальных науках имеется большое количество моделей, при анализе которых требуется изучать способы выбора стратегий. Приложения теории игр преимущественно развиваются в связи с исследованием экономики. Это соответствует установкам основоположников теории игр фон Неймана и Моргенштерна. Однако прочная репутация теоретико-игрового подхода утвердилась только после теоремы Дебре — Скарфа, позволяющей рассматривать конкурентное равновесие как результат кооперативных действий. С тех пор целые разделы экономической теории (такие, как теория несовершенной конкуренции или теория экономического стимулирования) развиваются в тесном контакте с теорией игр (см. обзор Шоттера и Шведнауэра [1980]).

Начиная с книги Фаркуарсона [1969], анализ процедур голосования, направленный на изучение стратегических возможностей, позволил переосмыслить некоторые традиционные направления политической теории. Хотя используемые при этом игровые модели по-прежнему вызывают споры, достаточно ясно, что потенциальные возможности теоретико-игрового подхода значительны. Отсылаем читателя к обзорной работе Брамса [1975] и к последним работам по стратегической реализуемости (Мулен [1981]).

Теоретико-игровой способ мышления является сейчас достаточно общим в социологии (см. Крозье [1977]). Ясно, что поиск равновесных концепций, являющихся идеализацией целого спектра некооперативных и кооперативных схем поведения, тесно связан с основами социологии. В частности, наша точка зрения на кооперацию как на необязательные соглашения (часть II), безусловно, восходит к идеям Руссо об эволюции от «естественной свободы» к «гражданской свободе» (см. Руссо [1755]). Тем не менее в современных социологических исследованиях формальные теоретико-игровые модели весьма редки и с математической точки зрения элементарны. И все-таки влияние теории игр кажется нам уже необратимым, по крайней мере на этапе обучения.

### *Обзор содержания книги*

В части I изучается некооперативное поведение изолированных игроков. Само задание игры в нормальной форме предполагает, что все переменные модели распределены между игроками, которые распоряжаются их выбором по собственному желанию (таким образом, все переменные модели становятся определенными после того, как каждый игрок зафиксирует свою стратегию). Вначале мы предполагаем, что обмен информацией между игроками невозможен. При этом выдвигается

несколько логически обоснованных способов выбора игроком стратегии, которой он «должен» придерживаться. К таким понятиям следует отнести доминирующие и осторожные стратегии, когда мы предполагаем, что игрок не знает предпочтений остальных игроков (гл. I), а также сложное поведение, когда мы считаем, что все предпочтения игроков известны каждому участнику игры (гл. II). Эти стратегии могут быть рассчитаны каждым игроком независимо от поведения других игроков. Указанные понятия являются статическими. К сожалению, сколько бы привлекательны ни были эти понятия, их математические свойства являются плохими (в частности, равновесие в доминирующих стратегиях и сложное равновесие, как правило, не существуют). Поэтому мы переходим к рассмотрению концепций некооперативного равновесия «второго уровня», а именно, равновесия по Нэшу, которое требует некоторых контактов между игроками хотя бы на уровне совместного наблюдения за происходящим (гл. III). Предлагается несколько сценариев поведения, обосновывающих определение равновесия по Нэшу; все они требуют перехода к динамике (хотя бы из двух периодов). В отличие от понятий «первого уровня», исходы игры, равновесные по Нэшу, обладают хорошими математическими свойствами. Если игроки используют независимые рандомизированные стратегии, то существование таких исходов можно гарантировать в весьма широких предположениях (гл. IV).

Основная причина перехода от понятий ч. I к понятиям ч. II (кооперативное поведение игроков) состоит в том, что индивидуальная свобода выбора стратегий наносит ущерб общественным интересам. Некооперативное равновесие (является ли оно следствием изолированного поведения, как в гл. I и II, или удовлетворяет условиям стабильности по Нэшу, как в гл. III и IV) может не быть оптимумом Парето. Свободный выбор игроком своей стратегии противоречит требованию эффективности коллективного выбора в том (и только том) случае, когда для каждого оптимального по Парето исхода найдется выгодное с точки зрения какого-либо игрока отклонение. В этом случае оптимальные по Парето исходы игры нельзя считать правдоподобными. Дилемма заключенного (пример I гл. I) является хорошо известным примером такого противоречия. Это простейший пример противоречия между стабильностью и эффективностью, которое мы считаем главным побудительным мотивом к кооперации. К сожалению, сами механизмы кооперации являются не столь наглядными.

Для того чтобы получить исходы, лучшие по Парето, чем некооперативное равновесие, мы предполагаем, что игроки заключают необязательные соглашения. Это такие сценарии поведения, которые не лишают игроков их неотъемлемого права

придерживаться любой стратегии, находящейся в их распоряжении. Эти соглашения автоматически выполняются благодаря свойству стабильности, которое аналогично свойству, введенному Нэшом: «Меня никто не принуждает следовать нашему соглашению, но до тех пор, пока вы, все остальные, ему верны, у меня нет причин его нарушать». На самом деле, понятие равновесия по Нэшу — это исторически первый существенный пример кооперативного соглашения такого типа. Концепции гл. V последовательно развивают различные стороны определения Нэша. «Мы сотрудничаем, потому что мы хотим этого, однако добровольная кооперация приводит к обязанностям для нас неожиданным» (Дюркгейм [1893]). Необязательные соглашения полностью признают право свободного выбора игроком своих стратегий. Однако реализуемость таких соглашений требует определенных ограничений на обмен информацией между игроками. Одна из возможностей — запретить по достижении соглашения дальнейшие переговоры с тем, чтобы участники не могли больше угрожать друг другу. Этот путь приводит к понятиям стабильности гл. V. Другая возможность состоит в том, чтобы любые отклонения от договоренности (в выборе стратегии) становились известными всем и потому можно было бы своевременно привести в исполнение взаимные угрозы. Это приводит к кооперативной точке зрения на предостережения, которым посвящена гл. VI.

Мы не касаемся обязательных соглашений, поскольку тут возникает целый круг вопросов, не связанных с выбором стратегий, а скорее относящихся к теории общественного выбора. Под обязательным соглашением мы понимаем договоренность игроков о некотором исходе игры, причем выполнение этой договоренности обеспечивается некоторым контролирующим органом. После подписания такого соглашения игроки фактически лишаются контроля над своими стратегиями. Следовательно, вопросы стабильности соглашений отпадают, поскольку никакие нарушения договоренности ни отдельным игроком, ни коалицией игроков больше не возможны. Таким образом, все сложные проблемы кооперации снимаются *после* того, как соглашение подписано, зато все они возникают *до* подписания. Другими словами, поскольку теперь нет смысла сравнивать соглашения с точки зрения их стабильности, приходится говорить об их большей или меньшей «справедливости». Таким образом, подход к кооперации из описательного (какие соглашения являются стабильными при той или иной информационной структуре?) превращается в нормативный (какие соглашения считать справедливыми при заданных соотношениях сил отдельных игроков и коалиций?). При этом главная аксиома состоит в том, что справедливость — это первичный побудитель-

ный мотив к кооперации, или, другими словами, несправедливость является решающей причиной разрушения кооперации.

Если хотя бы одному положению суждено остаться неизменным в будущем в теории стратегических игр, то это, по-видимому, будет утверждение о том, что данной игре адекватно несколько, не слишком много, равновесных концепций, в зависимости от условий обмена информацией и кооперации. И значит, игра в нормальной форме, наша основная математическая модель, действительно является богатым источником стратегических сценариев, проясняющих логические связи таких первичных понятий, как кооперативное и эгоистическое поведение, взаимные стратегические ожидания, тактическая неопределенность и ограничение информированности при кооперации, обмен угрозами и обещаниями. Критика предложенных концепций должна основываться на их приемлемости в приведенных примерах.

Изучение равновесных концепций приводит к ряду теорем существования, а также к некоторым контрпримерам. Однако пустоту, скажем,  $\alpha$ -ядра некоторой конкретной игры в нормальной форме не следует интерпретировать как логическое обоснование невозможности кооперации с помощью угроз в этой игре. Скорее это означает, что сценарий предостережений, который лежит в основе определения  $\alpha$ -ядра, не описывает полностью коалиционное поведение, и нужны другие, более сложные схемы (как правило, это двухшаговые концепции, см. гл. VI, разд. 2). Скромность создателя математических моделей требует избегать апокалиптических интерпретаций.

## ЛИТЕРАТУРА

Брамс (Brams S.)

[1975] Game theory and politics. London, Glencoe Free Press Collier Macmillan Pub.

Дюркгейм (Durkheim E.)

[1893] De la division du travail social. Paris.

Крозье, Фридберг (Crozier M., Friedberg F.)

[1977] L'acteur et le système. Paris, ed. Seuil.

Мулен (Moulin H.)

[1981] The strategy of social choice. Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, n° A229, Paris (1983, in advanced textbooks in Economics, North-Holland, Amsterdam).

Руссо (Rousseau J. J.)

[1755] Discours sur l'origine des inégalités.

Фаркварсон (Farquharson R.)

[1969] Theory of voting. New Haven Yale University Press.

Шоттер, Шведиауэр (Schotter A., Schwödiauer G.)

[1980] Economics and game theory: a survey. Journal of Economic Literature 18,2.

## ЧАСТЬ I

# Некооперативное поведение игроков

Основной моделью для анализа некооперативного поведения является игра в нормальной форме.

**Определение.** Пусть  $N$  — фиксированное конечное сообщество, скажем множество игроков (участников), для обозначения которых используется индекс  $i$ .

*Игрой в нормальной форме* называется совокупность, содержащая для каждого игрока  $i \in N$

— множество стратегий  $X_i$ , элементы которого обозначаются  $x_i$ ,  
— функцию выигрыша (функцию полезности)  $u_i$ , являющуюся отображением из  $X_N = \prod_{i \in N} X_i$  в  $\mathbb{R}^1$ . Элемент  $x = (x_i)_{i \in N}$  из множества  $X_N$  называется *исходом* игры.

Игрок  $i$  выбирает любую стратегию  $x_i \in X_i$ . После того как каждый игрок выбрал свою стратегию, определяются исход  $x$  и выигрыш  $i$ -го игрока  $u_i(x)$ . Отметим, что в описанной выше модели нет ни случайных ходов, ни игрока, который бы моделировал неопределенность, свойственную природе.

---

<sup>1)</sup> В книге без пояснений используются общепринятые обозначения, в частности,  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел. — *Прим. перев.*

## НЕКООПЕРАТИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ИГРОКОВ

Рассмотрим игру в нормальной форме  $(X_i, u_i; i \in N)$  и предположим, что игроки в этой игре действуют изолированно, т. е. каждый игрок выбирает свою стратегию независимо, не обращая внимания на то, какие стратегии выбирают другие участники. Игроки не обмениваются информацией. На выборы игроков не оказывает влияния прошлое (предыстория партии игры или начальная позиция). Напротив, все стратегии априори считаются эквивалентными, и их различие должно устанавливаться, исходя из внутренних принципов оптимальности.

На протяжении гл. I будем считать, что каждому игроку известна его собственная функция выигрыша; функций выигрыша остальных игроков он может не знать. В этих предположениях исследуем по очереди два не противоречащих друг другу сценария поведения изолированных игроков: сначала исключение доминируемых стратегий, а потом осторожное (максиминное) поведение.

### 1. ДОМИНИРУЮЩИЕ И НЕДОМИНИРУЕМЫЕ СТРАТЕГИИ

**Определение 1.** Стратегия  $x_i$  игрока  $i$  в игре в нормальной форме  $(X_i, u_i; i \in N)$  *доминирует* стратегию  $y_i$ , если

$$\forall x_i \in X_i \quad u_i(y_i, x_i) \leq u_i(x_i, x_i),$$

$$\exists x_i \in X_i \quad u_i(y_i, x_i) < u_i(x_i, x_i),$$

где  $X_i = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$  и  $(x_i, x_i) \in X_N$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}_i(u_i)$  множество всех *недоминируемых* стратегий  $i$ -го игрока:

$$y_i \in \mathcal{D}_i(u_i) \Leftrightarrow \nexists x_i \in X_i: x_i \text{ доминирует } y_i.$$

Стратегия  $i$ -го игрока  $x_i$  доминирует стратегию  $y_i$ , если независимо от поведения «остального мира»  $N \setminus \{i\}$  стратегия  $y_i$  для него не дает большего выигрыша, чем  $x_i$ , а для некоторого