

Д. Бобылев

**Прибавление к руководству
теоретической механики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Д11

Д11 **Д. Бобылев**
Прибавление к руководству теоретической механики / Д. Бобылев – М.:
Книга по Требованию, 2021. – 96 с.

ISBN 978-5-458-58192-9

ISBN 978-5-458-58192-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

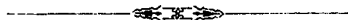
Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

поверхности можно рассматривать, какъ уравненія равновѣсія. Потерянная сила. Давленіе точки на поверхность	80
§ 25. Поверхность, не удерживающая съ одной стороны. Условіе равновѣсія матеріальной точки, находящейся на гладкой неударивающей поверхности	81
§ 26. Трѣніе. Условія равновѣсія матеріальной точки на негладкихъ поверхностяхъ удерживающихъ или неударивающихъ	82
§ 27. Дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки, остающейся на гладкой неподвижной кривой. Законъ живой силы	84
§ 28. Законъ сохраненія полной энергіи при движеніи матеріальной точки по гладкой неподвижной кривой, если приложенныя къ точкѣ силы имѣютъ потенциальную функцію	86
§ 29. Реакція кривой линіи и давленіе на нее. Центробѣжная сила	—
§ 30. Уравненія и условія равновѣсія матеріальной точки на неподвижной гладкой кривой линіи	88
§ 31. Дифференціальныя уравненія матеріальной точки по гладкой неподвижной кривой могутъ быть рассматриваемы какъ уравненія равновѣсія. Потерянная сила	89
§ 32. Рѣшенія вопросовъ о движеніи матеріальной точки по неподвижной ударивающей кривой и подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ потенциальную функцію	90



Прибавленіе къ руководству теоретической механики.

Именованныя величины и векторы, входящія въ формулы теоретической механики.

Въ курсѣ «Основъ механики» было объяснено значеніе почти всѣхъ количественно-измѣняемыхъ величинъ, встрѣчающихся въ механикѣ, а именно: промежутковъ времени, величины массы, объема, плотности, живой силы, работы, энергіи, длины, скорости, ускоренія, количества движенія, силы, момента силы, момента количества движенія, угловой скорости, углового ускоренія и др. Каждое изъ этихъ количествъ измѣряется единицею одного съ нимъ наименованія и величина его можетъ быть выражена произведеніемъ отвлеченнаго числа на величину избранной единицы, напримѣръ:

звѣздныя сутки = 86164,09 [секунда]

масса земнаго шара = $6,14 \cdot (10)^{27}$ [граммъ]

средній радіусъ земли = $6,3709 \cdot (10)^8$ [сантиметръ]

ускореніе силы тяжести
въ Парижѣ на уровнѣ моря } = $680,94 \frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2}$;

здѣсь: [секунда], [граммъ], [сантиметръ] суть символы величинъ основныхъ единицъ: секунды средняго времени, массы грамма и длины сантиметра; отношеніе: $\frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2}$ есть символъ величины ускоренія равноускореннаго движенія, при которомъ длина, проходимая въ первую секунду времени отъ положенія покоя равна половинѣ сантиметра ¹⁾.

Такимъ образомъ всѣ вышесказанныя количества можно разсматривать какъ величины именованныя, но для составленія графиковъ

¹⁾ См. Основы механики А. С. Домогарова, Введеніе стр. 42—47, Кинематика, стр. 21—23.

и чертежей всё эти количества могут быть представляемы или изображаемы въ видѣ длинъ или площадей, такъ, напримѣръ, при построении графика разстояній ¹⁾ величины промежутковъ времени t изображаются длинами, отложенными по оси времени отъ точки O ; при построении годографа ²⁾ скоростей величины скоростей изображаются радиусами векторами годографа; величина момента какого-либо вектора относительно точки O ³⁾ можетъ быть изображена удвоенною площадью треугольника (OAB) , имѣющаго вершиною точку O и основаніемъ векторъ, моментъ котораго опредѣляется.

Въ «Основахъ механики» были изложены начальные основанія ученія о векторахъ, такъ какъ оно имѣетъ важное приложеніе въ механикѣ. Дѣйствительно, изъ числа вышеупомянутыхъ понятій, нѣкоторыя представляются какъ векторы, т. е. какъ прямолинейныя длины имѣющія нѣкоторое направленіе; такъ, *скорость, ускореніе, силу, количество движенія, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движенія*, даже *угловую скорость и угловое ускореніе* мы представляемъ себѣ въ видѣ прямолинейныхъ отрезковъ, проведенныхъ изъ нѣкоторой точки въ нѣкоторомъ направленіи, такъ что вмѣстѣ съ представленіемъ о величинѣ каждаго такого понятія непременно сопряжено представленіе о его направленіи. Такія механическія величины мы будемъ называть *величинами векторіальными* или *векторами*. Къ числу векторовъ принадлежатъ радиусы векторы какой-либо кривой; началомъ радиусовъ векторовъ служить или начало координатъ или какая-нибудь другая точка, изъ которой всё радиусы векторы исходятъ. Длина какого-либо отрезка прямой, проведеннаго изъ какой-либо точки пространства въ какомъ-либо направленіи, служить основнымъ представленіемъ того, что собственно и называется векторомъ.

Съ механическими понятіями о *времени, массѣ, объемѣ, живой силѣ, работѣ, энергіи* соединяется представленіе только о величинахъ этихъ количествъ; представленіе о какомъ-либо направленіи не играетъ здѣсь никакой роли. Такія механическія величины можно назвать *невекторіальными*; къ числу ихъ можетъ быть причислена длина, рассматриваемая какъ разстояніе между двумя какими-либо

¹⁾ Основы механики, Кинематика, стр. 2-я.

²⁾ Тамъ же, стр. 27—28.

³⁾ Основы механики, Введеніе, стр. 28—29.

точками кривой или прямой линіи; на примѣръ, перемѣщеніе точки по траекторіи и длину пути приходится разсматривать какъ величины неекторіальныя.

При изложеніи курса теоретической механики можно воспользоваться всѣмъ тѣмъ, что изложено въ курсѣ «Основъ механики»; прежде всего составимъ выраженія разныхъ векторіальныхъ и неекторіальныхъ величинъ, упомянутыхъ выше и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлаемъ нѣкоторыя добавленія о предметахъ и обстоятельствахъ, не находящихся въ курсѣ «Основъ».

На стр. 15—17 курса «Основъ» изложено понятіе о геометрическомъ суммированіи и вычитаніи векторовъ. Равенство:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots + \vec{V}_n \dots \dots \dots (I)$$

выражающее, что векторъ $\vec{V}$ есть геометрическая сумма векторовъ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$, есть равенство символическое, оно замѣняетъ собою три слѣдующія алгебраическія равенства:

$$\left. \begin{aligned} V \cos(VX) &= V_1 \cos(V_1X) + V_2 \cos(V_2X) + \dots + V_n \cos(V_nX) \\ V \cos(VY) &= V_1 \cos(V_1Y) + V_2 \cos(V_2Y) + \dots + V_n \cos(V_nY) \\ V \cos(VZ) &= V_1 \cos(V_1Z) + V_2 \cos(V_2Z) + \dots + V_n \cos(V_nZ) \end{aligned} \right\} (II)$$

гдѣ X, Y, Z суть оси прямолинейныхъ координатъ, прямоугольныхъ или косоугольныхъ или же три какія-либо направленія проведенныя изъ одной точки и не находящіяся въ одной плоскости, причемъ направленія эти могутъ быть неизмѣнными или же могутъ измѣняться съ теченіемъ времени.

Такое же значеніе имѣетъ и символическое равенство:

$$\vec{W} = \vec{W}_1 - \vec{W}_2, \dots \dots \dots (III)$$

выражающее, что векторъ $\vec{W}$ есть геометрическая разность векторовъ $\vec{W}_1$ (уменьшаемаго) и $\vec{W}_2$ (вычитаемаго).

Символическими равенствами (I) и (III) выгодно пользоваться по ихъ краткости, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется выписывать трехъ алгебраическихъ равенствъ, ими замѣняемыхъ.

Если слагаемые или вычитаемые векторы параллельны плоскости XU , то всѣ косинусы угловъ, составляемые съ осью Z -овъ равны нулю и въ третьемъ изъ равенствъ (II) обѣ части равенства будутъ тождественно равны нулю.

А) Векторы: скорость, количество движѣнія, ускорѣніе, сила, линейный моментъ силы, линейный моментъ количества движѣнія.

Скорость и проекціи ея на оси координатъ.

Изъ курса «Основъ механики» извѣстно ¹⁾, что проекціи на оси прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ скорости v выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos(vX) = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} = f'_1(t) \\ v_y &= v \cos(vY) = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2(t)}{dt} = f'_2(t) \\ v_z &= v \cos(vZ) = z' = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3(t)}{dt} = f'_3(t) \end{aligned} \right\} . . (IV)$$

и что величина скорости поэтому равна:

$$v = + \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},$$

а косинусы угловъ направленія ея съ осями координатъ равны отношеніямъ $(x':v)$, $(y':v)$, $(z':v)$.

Здѣсь x, y, z ,—прямоугольныя прямолинейныя координаты точки, равны проекціямъ радіуса вектора r ея на оси координатъ, а измѣненіе координатъ съ теченіемъ времени выражается данными функциями отъ t :

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) (V)$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда окажется удобнѣе выразить положеніе точки на плоскости въ полярныхъ координатахъ, а положеніе въ пространствѣ въ цилиндрическо-полярныхъ координатахъ, нужно имѣть выраженія проекцій скорости на оси этихъ координатъ.

Осями полярныхъ координатъ на плоскости называются два взаимно-перпендикулярныя направленія, проведенныя изъ мѣста точки M на плоскости, а именно: положительная ось α —по продолженію радіуса вектора $\rho = OM$, проведеннаго изъ полюса O и положительная ось β , проведенная перпендикулярно къ оси α въ томъ направленіи, въ которомъ будетъ двигаться точка M , если уголъ θ , составляемый радіусомъ векторомъ OM съ полярною осью OX , бу-

¹⁾ „Основы механики“, Кинематика стр. 18.

дѣть увеличиваться, между тѣмъ какъ длина радіуса вектора OM будетъ оставаться постоянною. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, прямоугольныя координаты точки M выражаются въ полярныхъ такъ:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta,$$

а полярныя координаты въ прямоугольныхъ—такимъ образомъ:

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Ось α составляетъ съ осями X и Y углы θ и $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, ось β — съ тѣми же осями углы $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ и θ ; поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha X) &= \cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \cos(\alpha Y) = \sin \theta = \frac{y}{\rho}, \\ \cos(\beta X) &= -\sin \theta = -\frac{y}{\rho}, \quad \cos(\beta Y) = \cos \theta = \frac{x}{\rho} \end{aligned} \right\} . \quad (R).$$

Если точка M движется не выходя изъ плоскости XY , то проекціи скорости ея на направленія α и β выразятся (по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи) такъ:

$$v \cos(v\alpha) = v \cos(vX) \cos(\alpha X) + v \cos(vY) \cos(\alpha Y),$$

$$v \cos(v\beta) = v \cos(vX) \cos(\beta X) + v \cos(vY) \cos(\beta Y).$$

Замѣнивъ здѣсь проекціи скорости на оси X и Y и косинусы угловъ (αX) , (αY) , (βX) , (βY) выраженіями, приведенными выше, получимъ:

$$v \cos(v\alpha) = \frac{x'x + y'y}{\rho}$$

$$v \cos(v\beta) = \frac{xy' - yx'}{\rho}.$$

Возьмемъ теперь производныя по t отъ обѣихъ частей уравненій (VI), получимъ:

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = xx' + yy', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{x^2},$$

последнее равенство можно представить такъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{\rho^2}, \dots \dots \dots \text{(VIII)}$$

потому что $x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$.

Изъ (VII) и (VIII) слѣдуетъ, что составленные для $v \cos(v\alpha)$ и $v \cos(v\beta)$ выраженія приведутся къ слѣдующему виду:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) &= \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(IX)}$$

Такъ какъ оси α и β взаимно-ортогональны, то величина квадрата скорости выразится суммою квадратовъ ея проекцій на оси α и β :

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2 \dots \dots \dots \text{(X)}$$

Цилиндро-полярныя координаты точки M , находящейся въ плоскости XU , суть z и полярныя координаты проекціи M_{xy} точки на плоскость XU ; оси координатъ суть направленія α и β проведенныя изъ мѣста точки въ пространствѣ параллельно тѣмъ осямъ, которыя проведены въ плоскости XU изъ точки M_{xy} и обозначены тѣми же буквами. Третья ось, проведенная изъ точки M , параллельна положительной оси Z -овъ. Проекціи скорости v на эти оси (которыя взаимно-ортогональны) выражаются такъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v\alpha) &= \frac{d\rho}{dt} = \rho' \\ v \cos(v\beta) &= \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\theta' \\ v \cos(vZ) &= \frac{dz}{dt} = z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(XI)}$$

Такъ какъ оси взаимно-перпендикулярны, то величина квадрата скорости выразится такъ:

$$v^2 = (\rho')^2 + \rho^2 (\theta')^2 + (z')^2 \dots \dots \dots \text{(XII)}$$

Отъ этой координатной системы легко перейти къ *сферическимъ координатамъ* r , φ , θ , гдѣ r есть радіусъ векторъ OM точки, а φ —уголъ составляемый имъ съ положительною осью Z -овъ. Оче-

видно z равно проекціи OM на ось Z -овъ, а $\rho = OM_{xy}$ есть проекція OM на плоскость XY , такъ что $z = r \cos \varphi$, $\rho = r \sin \varphi$ и поэтому:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ (XIII)}$$

Осями координатъ служатъ три взаимно-ортогональныя направленія, проведенныя изъ точки M , а именно: ось α —по продолженію радіуса вектора r , ось β —перпендикулярно къ α въ плоскости ZOM и притомъ въ такую сторону, въ какую будетъ перемѣщаться точка M , если r и θ останутся постоянными, а уголь φ будетъ увеличиваться; наконецъ ось γ перпендикулярно къ α и β въ ту сторону, куда будетъ перемѣщаться точка M , если r и φ останутся постоянными, а уголь θ будетъ увеличиваться.

Такъ какъ $z = r \cos \varphi$ и $\rho = r \sin \varphi$, то, взявъ производныя отъ обѣихъ частей этихъ равенствъ по t , получимъ:

$$\begin{aligned} z' &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi', \\ \rho' &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi'; \end{aligned}$$

отсюда, по возвышеніи въ квадратъ обѣихъ частей этихъ равенствъ и по сложении, найдемъ:

$$(\rho')^2 + (z')^2 = (r')^2 + r^2 (\varphi')^2.$$

Стало быть, на основаніи равенства (XII), квадратъ скорости выразится въ сферическихъ координатахъ такъ:

$$v^2 = (r')^2 + r^2 (\varphi')^2 + r^2 \sin^2 \varphi (\theta')^2 . . . \text{ (XIV)}$$

Ось γ сферической системы координатъ очевидно совпадаетъ съ осью β цилиндро-полярной системы, поэтому $v \cos (v\gamma)$ по формуламъ (XI) равна $\rho\theta'$ или $r \sin \varphi \cdot \theta'$; величины же r' и $r \cdot \varphi'$ суть проекціи скорости на оси α и β сферической системы, въ чемъ нетрудно убѣдиться.

$$\left. \begin{aligned} v \cos (v\alpha) &= r' \\ v \cos (v\beta) &= r\varphi' \\ v \cos (v\gamma) &= r \sin \varphi \cdot \theta' \end{aligned} \right\} \text{ (XV).}$$

Количество движенія матеріальной точки и проекціи на его оси координатъ.

Количество движенія матеріальной точки массы m есть векторъ, имѣющій величину равную mv (гдѣ v скорость точки) и направленіе, совпадающее съ направленіемъ скорости. Поэтому проекціи количества движенія на оси координатъ X , Y , Z выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} mv \cos (vX) &= mx' \\ mv \cos (vY) &= my' \\ mv \cos (vZ) &= mz' \end{aligned} \right\} \text{(XVI)}$$

а если точка движется въ плоскости (XY) , то проекціи количества движенія на оси α и β полярной системы координатъ выразятся такъ:

$$\left. \begin{aligned} mv \cos (v\alpha) &= m\rho' \\ mv \cos (v\beta) &= m\rho\theta' \end{aligned} \right\} \text{(XVII)}$$

Единицею количества движенія служитъ количество движенія матеріальной точки, масса которой равна единицѣ массы, а скорость равна единицѣ скорости, такъ что символъ единицы количества движенія есть

$$\frac{[M] \cdot [L]}{[T]}.$$

Въ системѣ основныхъ единицъ *сантиметръ-граммъ-секунда*, единица количества движенія будетъ величина:

$$\frac{[\text{граммъ}] \cdot [\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]}.$$

Ускореніе и проекціи его на оси координатъ, на направленіе скорости и на главную нормаль траекторіи.

Въ курсѣ «Основъ механики», въ Кинематикѣ, на страницахъ 41 и 42 приведены выраженія проекцій ускоренія точки на оси прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ. Величина ускоренія тамъ обозначена буквою u , но такъ какъ въ составленномъ руководствѣ къ курсу теоретической механики этотъ знакъ имѣетъ иное значеніе, то здѣсь ускореніе будетъ обозначено, какъ это уже сдѣлано въ руководствѣ, знакомъ v .