Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки или арифметика для всех

Книга 3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Е11

Е. И. Игнатьев
Е11 В царстве смекалки или арифметика для всех: Книга 3 / Е. И. Игнатьев – М.: Книга по Требованию, 2021. – 326 с.

ISBN 978-5-458-27030-4

Книга для семьи и школы. Со многими рисунками и чертежами в тексте.

Е. И. Игнатьева по праву можно назвать классиком занимательного математического жанра. В своей книге, первое издание которой вышло в 1908 году. Он собрал большое количество разнообразных задач на сообразительность по арифметике и геометрии. Второе издание книги появилось в 1911 году. С тех пор эта книга не переиздавалась. Особенностью книги был ее литературный стиль, язык автора. Конечно, для настоящего издания некоторая трансформация задач и их условий была необходима. Однако, все же хотелось бы, чтобы классиков переиздавали более бережно иначе неизбежна утрата аромата времени.

ISBN 978-5-458-27030-4

© Издание на русском языке, оформление «YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка, «Книга по Требованию», 2021

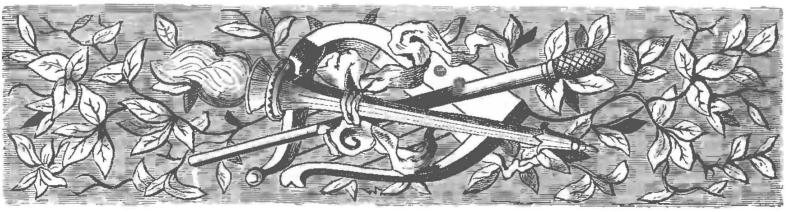
Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint



Нѣкоторыя историческія задачи.

Задача 1-я.

Одно изъ древнѣйшихъ математическихъ развлеченій.

Въ знаменитомъ Британскомъ музеѣ среди «коллекціи Ринда» находится египетскій папирусъ, который считается теперь чуть ли не самымъ древнимъ изъ извѣстныхъ нынѣ руководствъ по математикѣ. Папирусъ этотъ переведенъ Эйзенлоромъ на нѣмецкій языкъ въ 1877 г. Онъ написанъ египтяниномъ Ахмесомъ между 1700 и 2000 годами до Рождества Христова.

Подлинное заглавіе папируса таково:

«*Наставленіе къ пріобрѣтенію знанія всѣхъ тайныхъ вещей*».

Ахмесъ, въ свою очередь, упоминаетъ о томъ, что его книга написана на основаніи еще болѣе древнихъ сочиненій. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность судить о состояніи математическихъ знаній у древнихъ египтянъ, быть можетъ, за время не менѣе 5 000 лѣтъ до нашихъ дней. Почтенная давность!

«Египетская задача» и замѣтка «Начатки математики на Нилѣ», данныя во второй книгѣ «Въ царствѣ смекалки» (стр. 20 и 22), основаны именно на египетскомъ папирусѣ Ахмеса

изъ коллекціи Ринда. Но есть въ этомъ папирусѣ еще одно весьма любопытное мѣсто, надъ разгадкой котораго останавливалось не мало историковъ математики. Вотъ въ чемъ дѣло.

Ахмесъ даетъ **лѣстницу** такихъ 5-ти чиселъ:

7, 49, 343, 2401, 16807.

Рядомъ же съ этими числами стоятъ соотвѣтственно слова:

картина, кошка, мышь, ячмень, мѣра.

И все! Никакихъ дальнѣйшихъ поясненій, никакого ключа къ раскрытію смысла этой задачи папирусъ не даетъ. Что же это за задача?

Прежде всего замѣтимъ, что написанныя выше числа, составляющія *лѣстницу*, суть послѣдовательныя *степени* числа 7. Въ самомъ дѣлѣ, помножая послѣдовательно 7 само на себя одинъ, два, три, четыре и пять разъ и ставя рядомъ соотвѣтствующія слова, какъ въ рукописи Ахмеса, находимъ:

	7	. .	**картина**
$7 \times 7 = 7^2 =$	**49**	. .	**кошка**
$7 \times 7 \times 7 = 7^3 =$	**343**	. .	**мышь**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 =$	**2401**	. .	**ячмень**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 =$	**16807**	. .	**мѣра**

Основываясь на такомъ сопоставленіи чиселъ и словъ, а также на нѣкоторыхъ позднѣйшихъ математическихъ сочиненіяхъ, ученый оріенталистъ Родэ и извѣстный историкъ математики Канторъ съ весьма большой вѣроятностью рѣшаютъ, что данное мѣсто папируса Ахмеса представляетъ такую задачу:

У нѣкоторыхъ семи лицъ имѣется по семи кошекъ. Каждая кошка съѣдаетъ по семи мышей, каждая мышь съѣдаетъ по семи колосьевъ ячменя, изъ каждаго колоса можетъ вырости по семи мѣръ зерна. Сколько всего предметовъ?

Складывая числа, составляющія *лѣстницу*, получаемъ въ отвѣтъ на вопросъ задачи число *19607*. Число мѣръ зерна (16807), спасаемыхъ всего 49-ю кошками, также весьма велико. Если догадки названныхъ выше ученыхъ вѣрны, то не даромъ,

пожалуй, у египтянъ кошка, истребительница мышей, считалась священнымъ животнымъ.

Задачи подобнаго рода могли предлагаться для забавы и для развитія сметки. Слѣдовательно, можно думать, что исторія математическихъ развлеченій также имѣетъ за собой почтенную давность по меньшей мѣрѣ въ 50 вѣковъ.

Только что приведенная древняя задача повторяется въ различныхъ варіантахъ въ разныя времена и у разныхъ народовъ. Нѣкоторые изъ этихъ варіантовъ, замѣчательнѣйшіе въ историческомъ отношеніи, приводятся сейчасъ ниже.

Задача 2-я.

Семь старухъ.

Приблизительно черезъ 3 000 лѣтъ послѣ появленія папируса Ахмеса, а именно въ 1202 году послѣ Р. Х., Леонардъ изъ Пизы (онъ же *Фибоначчи*, или *Фибоначи*) издалъ на латинскомъ языкѣ сочиненіе *Liber abaci*, содержащее въ себѣ всю совокупность тогдашнихъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ знаній.

Въ этой книгѣ имѣется, между прочимъ, такая задача:

Семь старухъ отправляются въ Римъ. У каждой старухи по семи муловъ, каждый мулъ несетъ по семи мѣшковъ, въ каждомъ мѣшкѣ по семи хлѣбовъ, въ каждомъ хлѣбѣ по семи ножей, каждый ножъ въ семи ножнахъ. Сколько всего предметовъ?

Рѣшеніе.

Задача отличается отъ Ахмесовой только тѣмъ, что къ пяти числамъ *лѣстницы* Ахмеса надо прибавить еще шестое число, равное семи, повторенному множителемъ 6 разъ, т. е. $7^6=117\,649$.

Всего получится $7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6=137\,256$ предметовъ.

Задача 3-я.

По дорогѣ въ St.-Ives.

Въ 1801 году въ Соединенныхъ Штатахъ Америки вышло 1-е изданіе *Школьной ариѳметики* (Scholar's Arithmetic) Даніила Адамса, пользовавшейся тамъ большимъ распространеніемъ въ началѣ 19-го вѣка. Варіантъ Ахмесовой задачи изложенъ въ этой ариѳметикѣ уже въ такихъ англійскихъ стихахъ:

As I was going to St.-Ives,
I met seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits:
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St.-Ives?

Если попробовать это же передать «школьными стихами» по-русски, получимъ:

Въ Сентъ-Айвзъ какъ-то я шагалъ;
Я семь женщинъ повстрѣчалъ;
И у каждой семь мѣшковъ,
А въ мѣшкахъ по семь котовъ;
При котахъ по семь котятъ.
Сколько всѣхъ придти хотятъ
Въ Сентъ-Айвзъ: женщинъ и мѣшковъ,
И котятокъ, и котовъ?

Рѣшить задачу предоставляемъ читателю. Послѣ двухъ предыдущихъ задачъ рѣшеніе очевидно.

Задача 4-я.

Русская народная задача.

Для нашего читателя, быть можетъ, интересно будетъ узнать, что изъ мрака отдаленнѣйшихъ временъ оттолоски за-

дачи Ахмеса перешли также и въ русскій народный эпосъ. Существуетъ русская народная задача о нищихъ (или старцахъ), о которой упоминаетъ И. А. Износковъ въ своемъ докладѣ «о памятникахъ народной математики», прочитанномъ въ 1884 г. въ казанскомъ обществѣ естествоиспытателей. Задачу эту авторъ сообщенія слышалъ въ Казанской губ.

И. Ю. Тимченко въ своихъ примѣчаніяхъ къ русскому переводу «Исторіи элементарной математики» проф. Ф. Кэджори приводитъ эту задачу такъ, какъ она распространена среди населенія Орловской губ.:

Шли семь старцевъ.
У каждаго старца по семи костылей,
На всякомъ костылѣ по семи сучковъ,
На каждомъ сучкѣ по семи кошелей,
Въ каждомъ кошелѣ по семи пироговъ,
А въ каждомъ пирогѣ по семи воробьевъ.
Сколько всего?

Рѣшеніе.

Задача требуетъ опредѣленія числа всѣхъ предметовъ, т. е. старцевъ, костылей, сучковъ, кошелей, пироговъ и воробьевъ. Рѣшеніе, очевидно, дается числомъ $7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6$, приведеннымъ нами уже въ задачѣ 2-й (стр. 3).

Интересно отмѣтить, что во всѣхъ четырехъ предыдущихъ задачахъ главную роль играетъ число *семь*. Въ главѣ «о числовыхъ суевѣріяхъ» мы увидимъ, что число это имѣло у различныхъ народовъ особое символическое, священное значеніе. Быть можетъ, раньше, чѣмъ сдѣлаться предметомъ простого развлеченія или развитія народной смекалки, задачи подобнаго рода носили миѳологическій, астрологическій или религіозный характеръ.

Задача 5-я.

Жизнеописаніе Діофанта.

Прохожій! Подъ этимъ камнемъ покоится прахъ Діофанта, умершаго въ преклонныхъ годахъ. $^1/_6$ часть своей продолжительной жизни онъ провелъ въ дѣтствѣ, $^1/_{12}$—въ юности. Слѣдующую затѣмъ $^1/_7$ своей жизни онъ былъ холостымъ. Черезъ пять лѣтъ послѣ его женитьбы у него родился сынъ, дожившій до возраста вдвое меньшаго, чѣмъ лѣта его отца. Черезъ четыре года послѣ смерти сына умеръ и Діофантъ, оплакиваемый родными.—Скажи, если умѣешь считать, въ какомъ возрастѣ онъ умеръ?

Высчитать, что Діофантъ дожилъ до 84-хъ-лѣтняго возраста, не составляетъ особаго труда. Но задача эта имѣетъ спеціальный историческій интересъ. Существуютъ свидѣтельства, что она служила дѣйствительно надгробной эпитафіей надъ прахомъ одного изъ замѣчательнѣйшихъ математиковъ древности, о жизни котораго *только почти и имѣется свѣдѣній, что эта задача.*

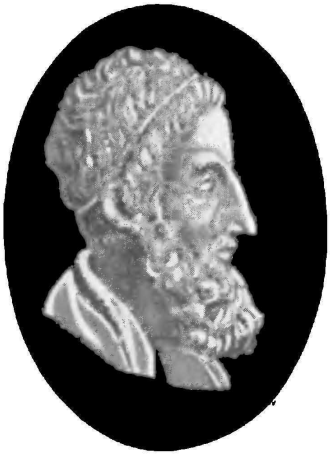
Діофантъ былъ совершенно исключительный математикъ послѣдняго періода знаменитой александрійской школы. О времени и мѣстѣ его рожденія, а также о его происхожденіи мы ничего не знаемъ. Предполагаютъ съ нѣкоторой долей вѣроятности, что онъ умеръ около 330 года по Р. Х. Другіе для времени его жизни даютъ дату 325—409 г. по Р. Х. Діофантъ считается родоначальникомъ современной алгебры и занимаетъ въ ряду великихъ греческихъ математиковъ совершенно исключительное мѣсто. Вотъ что говоритъ о немъ проф. Ф. Кэджори (Cajori) въ своей «Исторіи элементарной математики»: «Если бы сочиненія его не были написаны по-гречески, никто и не подозрѣвалъ бы, что они произведенія греческаго ума. Его главное, образцовое произведеніе, «Ариѳметика» | написанное, какъ

говорятъ, въ 13-ти книгахъ, изъ коихъ только шесть дошли до насъ] проникнуто духомъ, настолько отличнымъ отъ духа великихъ классическихъ сочиненій, написанныхъ во времена Эвклида, насколько чистая геометрія отличается отъ чистаго анализа. Между греками у Діофанта не было ни одного выдающагося предшественника, ни одного выдающагося послѣдователя. Не будь его сочиненій, намъ пришлось бы сказать, что греческій умъ не создалъ въ области алгебры ничего замѣчательнаго. До открытія папируса Ахмеса *Ариѳметика* Діофанта была древнѣйшимъ извѣстнымъ намъ трудомъ по Алгебрѣ».

Задача 6-я (Архимеда).

О числѣ песчинокъ (Псаммитъ).

Задача эта, предложенная и разрѣшенная Архимедомъ (287—212 до Р. Х.), изложена имъ въ формѣ обращенія къ Гелону, сыну Гіерона, тирану города Сиракузъ. Главнѣйшій интересъ ея состоитъ въ томъ, что знаменитый философъ древности показалъ, какъ расширить несовершенную греческую систему счисленія, распространивъ ее на сколь угодно большія числа. Вотъ какъ излагаетъ свою задачу Архимедъ:



Архимедъ.

Нѣкоторые люди, о царь Гелонъ, воображаютъ, что число песчинокъ безконечно велико. Я говорю не о пескѣ, находящемся въ Сиракузахъ или во всей Сациліи, но о пескѣ всей суши, какъ обитаемой, такъ и необитаемой. Другіе признаютъ это число, правда, не неограниченнымъ, но все же думаютъ, что оно больше всякаго

задуманнаго числа. Если бы эти люди представили себѣ кучу песку, величиною въ земной шаръ, при чемъ этимъ пескомъ были бы покрыты всѣ моря и всѣ углубленія до вершины высочайшихъ горъ, то, конечно, эти люди тѣмъ болѣе были бы склонны принять, что нѣтъ числа, превосходящаго число песчинокъ въ этой кучѣ.

Я, однако, приведу доказательства, съ которыми и ты согласишься, что я въ состояніи назвать нѣкоторыя числа, не только превосходящія число песчинокъ въ кучѣ, равной земному шару, но даже число песчинокъ въ кучѣ, равной всей вселенной.

Рѣшеніе.

Ты знаешь, конечно, что подъ *вселенной* большинство астрономовъ подразумѣваетъ шаръ, центръ котораго находится въ центрѣ Земли, а радіусъ образуется разстояніемъ между центрами Земли и Солнца. Въ своемъ сочиненіи противъ астрономовъ Аристархъ Самосскій пытается опровергнуть это и доказать, что вселенная составляетъ кратное этой величины. Онъ приходитъ къ выводу, что звѣзды и Солнце неподвижны, тогда какъ Земля вращается вокругъ Солнца по кругу, въ центрѣ котораго стоитъ Солнце [1]). Согласимся, что діаметръ сферы неподвижныхъ звѣздъ относится къ діаметру вселенной, понимаемой въ томъ смыслѣ, какъ это понимаетъ большинство астрономовъ, (т. е. солнечной системы), какъ этотъ послѣдній къ діаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиною въ Аристархову звѣздную сферу, то и въ этомъ случаѣ я могу привести число, даже превышающее число песчинокъ въ такой воображаемой сферѣ.

---

[1]) Аристархъ, родившійся въ Самосѣ около 270 г. до Р. Х., уже за $1\frac{1}{2}$ тысячи лѣтъ до Коперника, какъ это видно изъ только что приведенныхъ словъ Архимеда, совершенно ясно выразилъ основанія геліоцентрической системы. Изъ его сочиненій сохранилось только одно: «О величинахъ и разстояніяхъ Солнца и Луны».

Предполагаю слѣдующее:

1) *Окружность Земли менѣе 3 милліоновъ стадій* (стадія приблизительно равна нынѣшнимъ 185 метрамъ).

Какъ тебѣ извѣстно, были попытки доказать, что окружность Земли составляетъ около 300.000 стадій [1]); но я превзойду предшественниковъ и приму для нея въ десять разъ большее число.

2) *Солнце больше Земли, а Земля больше Луны.*

Въ этомъ я согласуюсь съ большинствомъ астрономовъ [2]).

3) *Поперечникъ Солнца не болѣе, чѣмъ въ 30 разъ, превышаетъ поперечникъ Луны* [3]).

4) *Діаметръ Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписаннаго въ наибольшій кругъ небесной сферы.*

Это я принимаю по Аристарху, который считаетъ, что видимые размѣры Солнца составляютъ $\frac{1}{720}$ размѣровъ задіакальнаго круга. Я самъ измѣрялъ уголъ, подъ которымъ видно Солнце, но точное измѣреніе этого угла не легко произвести, ибо ни глазъ, ни рука, ни измѣрительные приборы не достаточно надежны. Но здѣсь не мѣсто объ этомъ распространяться. Достаточно только знать, что этотъ уголъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{164}$, и больше, чѣмъ $\frac{1}{300}$ прямого угла [4]).

На основаніи допущеній 2) и 3) діаметръ Солнца меньше, чѣмъ 30 земныхъ діаметровъ. Поэтому, по допущенію 4, периметръ тысячеугольника, вписаннаго въ одинъ изъ наибольшихъ круговъ небесной сферы, меньше, чѣмъ 30 000 земныхъ діаметровъ. Но если это такъ, то діаметръ вселенной (т. е. согласно Аристарху солнечной системы) меньше 10 000 земныхъ

---

[1]) Эратосѳенъ (отъ 275—194 до Р. Х.), произведшій первое градусное измѣреніе, опредѣлилъ окружность Земли въ 250 000 стадій, однако, неизвѣстно, о какихъ стадіяхъ онъ писалъ—о греческихъ или египетскихъ.

[2]) Согласно вычисленію Аристарха, Солнце въ 7 000 разъ больше Земли, а Луна въ 27 разъ меньше.

[3]) Въ дѣйствительности діаметръ Солнца почти въ 400 разъ больше діаметра Луны.

[4]) Т.-е. заключается между 27′ и 33′; $\frac{1}{164}R = 33°$; $\frac{1}{200}R = 27°$; по измѣреніямъ помощью новѣйшихъ геліометровъ, средній видимый діаметръ Солнца составляетъ около 32′, что ближе къ высшему предѣлу, указываемому Архимедомъ.

діаметровъ; ибо только для правильнаго шестиугольника, діаметръ равенъ $\frac{1}{3}$ периметра, а для всякаго многоугольника діаметръ меньше $\frac{1}{3}$ периметра.

По первому предположенію, окружность Земли меньше 3 милл. стадій; стало быть, діаметръ меньше 1 милл. стадій, такъ какъ діаметръ окружности меньше $\frac{1}{3}$ длины ея. Стало быть, также и діаметръ вселенной меньше, чѣмъ 10 000 милліоновъ стадій.

Допустимъ теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 такихъ песчинокъ составляютъ лишь величину одного маковаго зерна. Я приму діаметръ маковаго зерна въ $\frac{1}{40}$ дюйма. Въ одномъ изъ моихъ опытовъ, уже 25 маковыхъ зеренъ, положенныхъ рядомъ по прямой, заняли дюймъ, но я желаю обезпечить свое доказательство противъ всякихъ возраженій.

У насъ (грековъ) существуютъ названія чиселъ лишь до миріады [1]) ($10\,000 = 10^4$). Считаемъ мы, однако, и до 10 000 миріадъ ($10^4 \cdot 10^4 = 10^8$). Чтобы пойти еще далѣе, примемъ 10 000 миріадъ (10^8) за единицу второго порядка и возьмемъ ее снова 10 000 миріадъ разъ, то получимъ $10^8 \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot 2}$, или единицу третьяго порядка. Точно также можемъ взять 10 000 миріадъ разъ полученную единицу третьяго порядка и получимъ единицу четвертаго порядка ($10^{8 \cdot 3}$) и т. д. $10^{56} = 10^{8 \cdot 7}$ будетъ представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица перваго порядка.

Теперь вычислимъ, сколько песчинокъ, миріада которыхъ занимаетъ объемъ маковаго зерна, помѣстится въ шарѣ съ діаметромъ, равнымъ дюйму? По нашему предположенію, діаметръ маковаго зерна равняется $\frac{1}{40}$ дюйма, но по извѣстному геометрическому положенію объемы шаровъ относятся, какъ кубы ихъ діаметровъ, стало быть, въ данномъ случаѣ, какъ $1^3 : 40^3 = 1 : 64\,000$. Итакъ, шаръ одного дюйма въ діаметрѣ содержитъ 64 000 маковыхъ зеренъ или 64 000 миріады песчинокъ, т. е. $64 \cdot 10^8$, что меньше, чѣмъ $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинокъ. Шаръ 100 дюймовъ въ діаметрѣ относится къ шару 1 дюйма

[1]) Въ дальнѣйшемъ мы будемъ примѣнять систему изображенія чиселъ при помощи 10 въ извѣстной степени, такъ какъ Архимедовъ способъ выраженія не такъ удобопонятенъ.