

С. Э. Фриш

Техника спектроскопии

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 37
ББК 74
С11

С11 **С. Э. Фриш**
Техника спектроскопии / С. Э. Фриш – М.: Книга по Требованию, 2013. –
188 с.

ISBN 978-5-458-25087-0

Настоящая книга представляет собою несколько расширенное содержание первой половины лекций, читанных автором для студентов-оптиков IV курса ЛГУ в 1934/35 учебном году. Вторая часть лекций посвящена изложению основных сведений по атомным и молекулярным спектрам и по ней имеется ряд появившихся за последнее время руководств. По первой же части технике спектроскопии до сих пор на русском языке не имелось подходящего руководства. Весьма неполные сведения об отдельных спектральных приборах и некоторых приемах изучения спектров разбросаны по отдельным книгам и журналам. Поэтому мне казалось целесообразным издать изложение основ техники спектроскопии в виде одной небольшой книги. Эта книга не отличается, конечно, той полнотой, которая характерна для немецких Handbuch'ов или для известного английского курса спектроскопии Baly, но автор старался включить в нее все существенное и надеюсь, что она окажется полезной не только для студентов ЛГУ, но и для всех лиц, которые приступают к работе со спектральными приборами.

ISBN 978-5-458-25087-0

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Часть I. Спектральные приборы.

Глава I. ПРИЗМЕННЫЙ СПЕКТРОГРАФ.

§ 1. Устройство простейшего призменного спектрографа

Простейший призменный спектрограф^{*} состоит из: 1) коллиматорной трубы (рис. 1) со щелью S и объективом O_1 ; 2) диспергирующей системы, состоящей в простейшем случае из одной (обычно 60°) призмы A ; 3) камеры C (или зрительной трубы).

Цель коллиматора давать параллельный пучок света, падающий на диспергирующую систему спектрографа; для этого щель S располагается в главной фокальной плоскости объектива коллиматора O_1 . Объектив берется по возможности ахроматический. Щель располагается параллельно преломляющему углу призмы.

Щель состоит из двух щек, края которых отполированы, как указано на рис. 2. В простейшем случае одна из щек неподвижна, другая же передвигается микрометренным винтом, что позволяет желаемым образом регулировать ширину щели. При



Рис. 2

таком устройстве, однако, середина щели смещается при изменении ее ширины, что ведет также к смещению середины изображения линий. Поэтому более совершенной является так называемая симметрическая щель, в которой обе щеки передвигаются навстречу друг другу, так что при изменении ширины щели ее средняя линия остается неподвижной.

В так называемых спектроскопах, т. е. приборах, предназначенных для визуальных наблюдений, за диспергирующей системой располагается зрительная труба, состоящая, как обычно, из объектива и окуляра. Чаще всего употребляется окуляр Рамсдена, который имеет то преимущество, что он помещается за главным фокусом объектива трубы, и в него одновременно со спектром можно видеть нити микрометра.

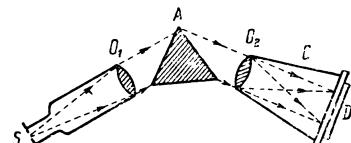


Рис. 1

В настоящее время значительно большим распространением пользуются спектрографы, т. е. приборы, предназначенные для фотографирования спектров. В спектрографах за диспергирующей системой располагается камера C с объективом O_2 (рис. 1), который дает действительное изображение спектра в том месте, где в кассете D той или иной конструкции располагается фотопластинка. Обычно кассета может передвигаться так, чтобы на одной пластинке можно было произвести ряд снимков спектров, расположенных один под другим.

На практике спектрографам придается весьма различная конструкция в зависимости от того, каким специальным целям они служат и для исследования какой области спектра они предназначаются. Некоторые из наиболее употребительных типов спектрографов описаны в § 10 настоящей главы.

§ 2. Угол наименьшего отклонения призмы

Падая на призму, луч испытывает два преломления и в результате отклоняется на угол D (рис. 3). Обозначим углы падения и преломления на первой грани через i и r , а на второй—через i' и r' .

При условии, что угол падения равен углу выхода, т. е. что

$$i = r', \quad (1)$$

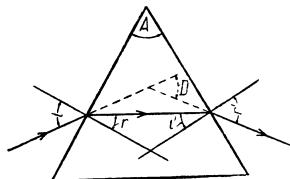


Рис. 3.

имеем, что луч внутри призмы идет параллельно основанию призмы и что

$$r = i'. \quad (1a)$$

При этом угол отклонения D достигает минимального значения:

$$D = D_{\min}.$$

В самом деле, рассматривая D как функцию угла r , напишем условие минимума:

$$\frac{dD}{dr} = 0; \quad \frac{d^2D}{dr^2} > 0. \quad (2)$$

Из чертежа имеем

$$D = (i + r') - (i' + r) = i + r' - A, \quad (3)$$

где A —преломляющий угол призмы.

В силу закона преломления:

$$\sin i = \mu \sin r; \quad \sin r' = \mu \sin i' = \mu \sin (A - r),$$

где μ —коэффициент преломления призмы. Отсюда:

$$i = \arcsin (\mu \sin r),$$

$$r' = \arcsin [\mu \sin (A - r)].$$

Подставляя эти значения i и r' в (3), получим:

$$D = \arcsin (\mu \sin r) + \arcsin [\mu \sin (A - r)] - A,$$

откуда

$$\frac{dD}{dr} = \frac{d}{dr} \left\{ \arcsin (\mu \sin r) \right\} + \frac{d}{dr} \left\{ \arcsin [\mu \sin (A-r)] \right\},$$

или

$$\frac{dD}{dr} = \frac{\mu \cos r}{[1 - \mu^2 \sin^2 r]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mu \cos (A-r)}{[1 - \mu^2 \sin^2 (A-r)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Но при $i = r'$ в силу соотношений:

$$\begin{aligned} i' + r &= A, \\ i' &= r, \end{aligned}$$

имеем

$$r = \frac{A}{2}.$$

Откуда по (4)

$$\frac{dD}{dr} = 0,$$

т. е. первое из условий (2) выполнено.

Дифференцируя выражение (4), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2D}{dr^2} &= -\frac{\mu \sin r}{[1 - \mu^2 \sin^2 r]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu^3 \cdot \sin r \cdot \cos^2 r}{[1 - \mu^2 \sin^2 r]^{\frac{3}{2}}} - \\ &- \frac{\mu \sin (A-r)}{[1 - \mu^2 \sin^2 (A-r)]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu^3 \cdot \sin (A-r) \cos^2 (A-r)}{[1 - \mu^2 \sin^2 (A-r)]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

при

$$r = \frac{A}{2}:$$

$$\frac{d^2D}{dr^2} = -\frac{2\mu \sin \frac{A}{2}}{\left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\mu^3 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{\left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]^{\frac{3}{2}}},$$

или

$$\frac{d^2D}{dr^2} = \frac{2\mu^3 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2} - 2\mu \sin \frac{A}{2} \left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right] \left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Заменяя $\left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]$ через $\left[1 - \mu^2 + \mu^2 \cos^2 \frac{A}{2}\right]$ и производя сокращения, получим:

$$\frac{d^2D}{dr^2} = \frac{2\mu \sin \frac{A}{2} \cdot (\mu^2 - 1)}{\left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right] \left[1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

При $\mu > 1$ числитель положителен, так как $A < 180^\circ$, откуда $\frac{A}{2} < 90^\circ$ и

$$\sin \frac{A}{2} > 0.$$

Чтобы знаменатель был вещественный, должно быть: $1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2} > 0$, откуда $\frac{d^2 D}{dr^2} > 0$, т. е. выполнено и второе из условий (2).

При положении призмы в минимуме отклонения:

$$D_{\min} = i + r' - A = 2i - A,$$

откуда:

$$i = \frac{A + D_{\min}}{2}.$$

После чего, принимая во внимание равенство $r = \frac{A}{2}$ и пользуясь законом преломления: $\mu = \frac{\sin i}{\sin r}$, получаем:

$$\mu = \frac{\sin \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (5)$$

т. е. известное соотношение, связывающее коэффициент преломления μ с углами A и D_{\min} .

Под углом наименьшего отклонения проходят лишь лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной к преломляющему ребру призмы. Лучи, идущие под углом к этой плоскости, отклоняются сильнее, что ведет обычно в спектрографах к искривлению линий.

§ 3. Дисперсия призмы

Под дисперсией призмы подразумевается величина, указывающая, как изменяется угол отклонения с изменением длины волны, т. е. выражение:

$$\frac{dD}{d\lambda}. \quad (1)$$

Так как D непосредственно зависит (при данном угле падения) от μ , а только μ зависит от λ , то

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{\delta D}{\delta \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}. \quad (1a)$$

По формуле (5) § 2

$$\mu = \frac{\sin \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

откуда

$$\frac{\delta \mu}{\delta D_{\min}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

или

$$\frac{\delta D_{\min}}{\delta \mu} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A + D_{\min}}{2}},$$

или так как (см. стр. 10)

$$D_{\min} = 2i - A$$

или

$$\frac{A + D_{\min}}{2} = i,$$

то

$$\frac{\delta D_{\min}}{\delta \mu} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos i} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}.$$

Но, пользуясь законом преломления, по которому $\sin i = \mu \sin r$ и соотношением $r = \frac{A}{2}$,

получаем:

$$\sin i = \mu \sin \frac{A}{2},$$

откуда

$$\frac{\delta D_{\min}}{\delta \mu} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}}. \quad (2)$$

Например, для призмы с $A = 60^\circ$ и $\mu = 1,500$ имеем по (2) вблизи угла наименьшего отклонения:

$$\frac{\delta D_{\min}}{\delta \mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1,500)^2}{4}}} = 1,512,$$

т. е. при изменении μ от значения $\mu = 1,500$ до значения $\mu = 1,501$ угол D увеличивается на $\delta D = 0,001 \cdot 1,512 = 0,001512 = 5'15''$.

Пользуясь формулой (2), получаем выражение для дисперсии призмы вблизи угла наименьшего отклонения:

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}; \quad (3)$$

как видно, дисперсия призмы не зависит от ее размеров, а лишь от преломляющего угла A и от материала, из которого сделана призма. Формулы (2) и (3), выведенные для угла наименьшего отклонения, практически применимы в довольно широких пределах. Формула (2) может быть использована для определения углового расстояния между краями широких участков спектра (например всего видимого спектра).

В этом случае, полагая коэффициенты преломления крайних лучей равными μ_1 и μ_2 , приближенно получим:

$$\Delta D = (\mu_1 - \mu_2) \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}{4}}}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}.$$

Эта формула дает ΔD с точностью до нескольких минут вплоть до углов в 9° .

Пример. Для призмы с $A = 60^\circ$, $\mu_1 = 1,500$ (для 6553 \AA), $\mu_2 = 1,550$ (для 3969 \AA) имеем:

$$\Delta D = 0,050 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1,525^2}{4}}} = 0,050 \cdot 1,512 \text{ или}$$

$$\Delta D = 0,0756 = 4^\circ 22'.$$

В формулу для дисперсии призмы

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$$

кроме μ и A входит еще дисперсия вещества призмы $\frac{d\mu}{d\lambda}$.

Дисперсия вещества $\frac{d\mu}{d\lambda}$ обычно определяется по интерполяционной формуле, дающей зависимость коэффициента преломления μ от длины волны λ . Для стекол μ как функция λ хорошо представляется интерполяционной формулой Гартманна:

$$\mu = \mu_0 + \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^a}, \quad (5)$$

где μ_0 , c , λ_0 и a — эмпирические константы. Для большинства стекол $a \approx 1$ и можно пользоваться формулой Гартманна лишь с тремя постоянными:

$$\mu = \mu_0 + \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)}. \quad (5-a)$$

В этом случае дисперсия стекла равна

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = - \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^2}. \quad (6)$$

Постоянные μ_0 , λ_0 и c определяются по трем известным значениям μ . В качестве примера разберем сорт стекла, для которого μ имеет следующие значения:

$$\mu = 1,48350 \text{ для } \lambda = 7,682 \cdot 10^{-5} \text{ см};$$

$$\mu = 1,49070 \text{, } \lambda = 5,270 \cdot 10^{-5} \text{ см};$$

$$\mu = 1,49961 \text{, } \lambda = 4,046 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Составляя по этим данным три уравнения типа

$$\mu = \mu_0 + \frac{c}{\lambda - \lambda_0}$$

и решая их относительно трех неизвестных: μ_0 , c и λ_0 , получим: $\mu_0 = 1,47225$; $\lambda_0 = 1,5070 \cdot 10^{-5}$; $c = 6,944 \cdot 10^{-7}$.

Насколько хорошо формула Гартманна для данного случая дает μ , видно из следующей таблицы:

λ в \AA	μ набл.	μ вычисл.
7066	1,48475	1,48474
6708	1,48562	1,48560
6563	1,48601	1,48598
5893	1,48810	1,48808
5607	1,48919	1,48919
5461	1,48982	1,48981
4861	1,49291	1,49295
4678	1,49411	1,49415
4415	1,49609	1,49613
4341	1,49673	1,49675

Определив для данного сорта стекла постоянные в формуле Гартманна, находим по формуле (6) дисперсию вещества. Для рассматриваемого случая для $\lambda = 4861 \text{ \AA}$:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{6,944 \cdot 10^{-7}}{(4,861 \cdot 10^{-5} - 1,507 \cdot 10^{-5})^2} = -617,3,$$

т. е. малому изменению λ вблизи $4,861 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ соответствует изменение μ по величине в 617 раз большее и обратное по знаку.

Для выражения μ как функции от λ можно также пользоваться интерполяционной формулой Коши:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

Практически для не слишком больших интервалов достаточно двух первых членов:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

В этом случае дисперсия равна:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

Для призмы из стекла разобранного выше сорта с преломляющим углом $A = 60^\circ$ найдем угловую дисперсию $\frac{dD}{d\lambda}$ вблизи D -линий ($\lambda = 5893 \text{ \AA}$).

По формуле (3) настоящего параграфа имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\lambda} &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1,4881)^2}{4}} \cdot \left(-\frac{6,944 \cdot 10^{-7}}{(5,893 \cdot 10^{-5} - 1,507 \cdot 10^{-5})^2} \right) = \\ &= 1,4967 \cdot (-361,0) = -540,3. \end{aligned}$$

Отсюда можно определить угловое расстояние между D -линиями натрия ($\Delta\lambda = 6 \cdot 10^{-8}$ см):

$$|\Delta D| = 540,3 \cdot 6 \cdot 10^{-8} = 0,0000324 \approx 7''.$$

§ 4. Линейная дисперсия спектрографа

Линейной дисперсией спектрографа называется величина

$$\frac{dl}{d\lambda},$$

где dl — линейное расстояние на фотопластинке лучей с длинами волн λ и $\lambda + d\lambda$.

При фокусном расстоянии камеры спектрографа F очевидно:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{dD}{d\lambda} \cdot F. \quad (1)$$

Подставляя вместо угловой дисперсии $\frac{dD}{d\lambda}$ ее значение по формуле (3) (стр. 11), имеем:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{du}{d\lambda} \cdot F. \quad (2)$$

Эта формула, как и формула (3) (стр. 11), справедлива вблизи угла наименьшего отклонения.

Беря призму, рассмотренную в предыдущем параграфе, и полагая, что фокусное расстояние объектива камеры равно $F = 50$ см, и выражая λ в \AA , а остальные длины в миллиметрах, получим:

$$\left| \frac{dl}{d\lambda} \right| = 540,3 \cdot 10^{-8} \cdot 500 = 0,0027 \text{ мм/}\text{\AA}.$$

Отсюда расстояние между D -линиями натрия ($\Delta\lambda = 6 \text{ \AA}$) равно

$$\Delta l = \left| \frac{dl}{d\lambda} \right| \cdot \Delta\lambda = 0,0027 \cdot 6 = 0,016 \text{ мм.}$$

Вместо линейной дисперсии $\frac{dl}{d\lambda}$ часто употребляют для характеристики спектрографа величину ей обратную:

$$\frac{d\lambda}{dl},$$

которую выражают обычно в $\text{\AA}/\text{мм}$. Для предыдущего примера вблизи D -линий

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{1}{0,0027} = 370 \text{ \AA}/\text{мм.}$$

Из формул (1) и (2) видно, что линейная дисперсия при данной призме тем больше, чем больше фокусное расстояние камеры. Отсюда

с точки зрения геометрической оптики представляется возможным, взяв достаточно большое F и достаточно узкую щель, разрешить два луча, сколь угодно мало различающихся друг от друга по длине волны. Однако это не соответствует действительности, так как изображение щели (и бесконечно-узкой) оказывается расширенным благодаря дифракции. Дифракция пучка, проходящего сквозь призму, ограничивает разрешающую силу спектрографа.

§ 5. Решающая сила призмы

Для выяснения роли дифракции рассмотрим параллельный пучок лучей, проходящий сквозь щель шириной x_0 , и бесконечно-длинную в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа (рис. 4).

Уравнение колебания, исходящего от элемента dx на расстоянии x от края щели, может быть в комплексном виде записано:

$$dS = a \cdot e^{i(\gamma t + \frac{\gamma x}{\lambda})} dx,$$

где

$$\gamma = 2\pi \sin \varphi.$$

Суммарное колебание в фокальной плоскости линзы равно

$$S = \int_0^{x_0} a \cdot e^{i(\gamma t + \frac{\gamma x}{\lambda})} dx = \\ = \frac{a\lambda}{\gamma i} \left\{ e^{i(\gamma t + \frac{\gamma x_0}{\lambda})} - e^{i\gamma t} \right\}$$

или

$$S = \frac{a\lambda}{\gamma i} \left\{ e^{i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} \cdot e^{i\gamma t}.$$

Множитель

$$\xi = \frac{a\lambda}{\gamma i} \left\{ e^{i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\}$$

представляет собою комплексную амплитуду колебания S . Интенсивность колебания S (равная квадрату вещественной амплитуды) равна:

$$I = \xi \cdot \xi^*,$$

где ξ^* — выражение, сопряженное с ξ . Таким образом

$$I = \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left\{ e^{i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} \cdot \left\{ e^{-i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} - 1 \right\} = \\ = 2 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} + e^{-i \frac{\gamma x_0}{\lambda}} \right) \right\},$$

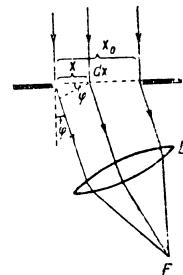


Рис. 4

или:

$$I = 2 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \left[1 - \cos \left(\frac{\gamma x_0}{\lambda} \right) \right] = \\ = 4 \left(\frac{a\lambda}{\gamma} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\gamma x_0}{2\lambda} \right).$$

Подставляя вместо γ его значение $2\pi \sin \varphi$ и умножая и деля найденное выражение на x_0 , получим:

$$I = (ax_0)^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi x_0 \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi x_0 \sin \varphi}{\lambda} \right)} \right]^2. \quad (3)$$

Обозначая

$$ax_0 = A,$$

$$\pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda} = u,$$

перепишем формулу (3):

$$I = A^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}. \quad (3a)$$

Выражение $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ имеет:

- 1) максимум $I_{\max} = 1$ при $u = 0$,
- 2) ряд эквидистантных минимумов $I_{\min} = 0$ при

$$u = \pm k\pi, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots$$

- 3) вторичные максимумы при u_k , являющихся корнями уравнения

$$u = \operatorname{tg} u.$$

Это уравнение получается из условия:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} \right) = \frac{\sin u}{u} \left(\operatorname{ctg} u - \frac{1}{u} \right) = 0,$$

откуда, либо $\frac{\sin u}{u} = 0$, что ведет к условию минимумов, либо $u = \operatorname{tg} u$.

Корни этого последнего уравнения могут быть найдены графически, как точки пересечения прямой $x = u$ с тангенсоидой $x = \operatorname{tg} u$. Эти корни лежат между двумя соседними минимумами, располагаясь при возрастании u и ближе к середине между ними. Два первых максимума лежат при $u = \pm 2,86 \frac{\pi}{2}$ и $u = \pm 4,92 \frac{\pi}{2}$ и имеют значения 0,0472 и 0,0165. При больших k приближенно $u_k = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ Численное значение этих максимумов при больших k приблизительно равно $\frac{4}{(2k+1)^2 \cdot \pi^2}$.