С.И. Зетель

Новая геометрия треугольника

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.И. Зетель
С11 Новая геометрия треугольника / С.И. Зетель – М.: Книга по Требованию, 2021. – 96 с.

ISBN 978-5-458-26171-5

XIX в. в элементарной геометрии на плоскости было проведено много интересных исследований. Они привели к установлению ряда соотношений в треугольнике; к известным классическим замечательным точкам, прямым и окружностям было присоединено много новых точек, прямых и окружностей. Изложение результатов этих исследований составляет большой отдел планиметрии, известный под названием "Новой геометрии треугольника». На иностранных языках существует ряд сочинений, в которых систематически излагаются результаты исследований в области геометрии треугольника. На русском языке в 1903 г. бьпо выпушено обстоятельное сочинение Д. Ефремова «Новая геометрия треугольника , ныне представляюшее библиографическую редкость.Цель настоящей книги дать читатепям учителям средней школы, студентам педвуза, любознательным учащимся старших классов средней школы основные сведения по «Новой геометрии треугольника».

ISBN 978-5-458-26171-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

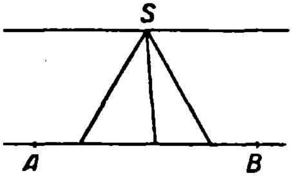
Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Можно было бы ввести несобственную точку на прямой, исходя из других соображений. Пусть дана прямая AB и точка S вне ее (черт. 5). Проведем из S пучок прямых; тогда каждая из этих прямых пересечет прямую AB в некоторой точке. Каждой прямой, проведенной из точки S и не параллельной прямой AB, соответствует на AB единственная точка — точка пересечения AB с проведенной прямой. Прямой, параллельной AB и проходящей через точку S, не найдется соответственной точки. Условно будем говорить, что точкой пересечения прямой с параллельными ей прямыми служит несобственная точка этой прямой.



Черт. 5.

Если прямая, проведенная через S, вращается вокруг S, приближаясь к положению прямой, параллельной к AB, то точка ее пересечения с AB все более и более удаляется от точек A и B. Это дает основание называть введенную таким образом несобственную точку прямой AB бесконечно-удаленной точкой этой прямой.

ГЛАВА I.

ПРЯМЫЕ ЧЕВЫ.

4. **Теорема Чевы.** *Если прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами треугольника ABC, пересекают его стороны AB, BC, CA соответственно в точках C', A', B', то* (черт. 6)

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1.$$

Проведем $AP \parallel BB'$ и $CF \parallel BB'$. Так как $AP \parallel BB'$, то

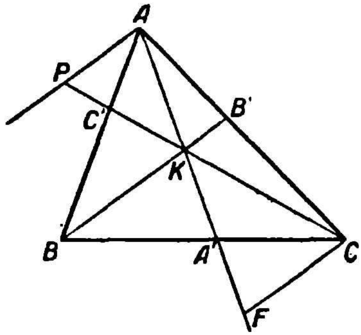
$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{PK}{KC}.$$

Из подобия треугольников AKP и FKC имеем:

$$\frac{PK}{KC}=\frac{AP}{CF}.$$

Следовательно,

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{AP}{CF}. \qquad (1)$$



Черт. 6.

Из подобия треугольников $CA'F$ и $BA'K$

$$\frac{CA'}{A'B}=\frac{CF}{KB}. \qquad (2)$$

Из подобия треугольников $AC'P$ и $BC'K$

$$\frac{BC'}{C'A}=\frac{KB}{AP}. \qquad (3)$$

Перемножив равенства (1), (2), (3), получим окончательно:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1.$$

Теорема Чевы может быть записана так:

$$\frac{AB'}{CB'}\cdot\frac{CA'}{BA'}\cdot\frac{BC'}{AC'}=-1,$$

или

$$(ACB')(CBA')(BAC')=-1,$$

или

$$(ABC')(BCA')(CAB')=-1.$$

Теорема Чевы остается справедливой и в том случае, если точка K — точка пересечения прямых, исходящих из вершин треугольника,— находится вне треугольника.

5. Легко может быть доказана обратная теорема:

Если точки C', A', B' расположены соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC или на их продолжениях так, что

$$(ABC')(BCA')(CAB')=-1,$$

то прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Предположим, что прямая CC' не проходит через точку K — точку пересечения прямых AA' и BB'. Пусть прямая CK пересечет сторону AB в точке D. Тогда имеем:

$$(ABD)(BCA')(CAB')=-1.$$

Следовательно,

$$(ABC')=(ABD),$$

и точка C' должна совпадать с точкой D.

Французский математик Пулен (Poulain) предложил называть прямые, исходящие из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке, *прямыми Чевы*, или *чевианами*. Теорема Чевы была опубликована в 1678 г.

6. Из обратной теоремы Чевы получаются как следствия известные теоремы:

1) *Медианы треугольника пересекаются в одной точке.* Доказательство очевидно.

2) *Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.*

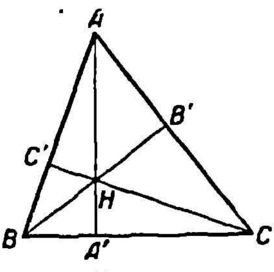
Пусть AA', BB', CC' (черт. 6) — биссектрисы внутренних углов треугольника:

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{c}{a};\quad\frac{CA'}{A'B}=\frac{b}{c};\quad\frac{BC'}{C'A}=\frac{a}{b}.$$

Отсюда

$$\frac{AB'\cdot CA'\cdot BC'}{B'C\cdot A'B\cdot C'A}=1.$$

3) *Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром треугольника* (черт. 7).



Черт. 7.

Имеем:

$$AC'=b\cos A,\ C'B=a\cos B,$$
$$BA'=c\cos B,\ A'C=b\cos C,$$
$$CB'=a\cos C,\ B'A=c\cos A.$$

Следовательно,

$$\frac{AC'\cdot BA'CB'}{C'B\cdot A'C\cdot B'A}=1.$$

4) *Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного круга, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.*

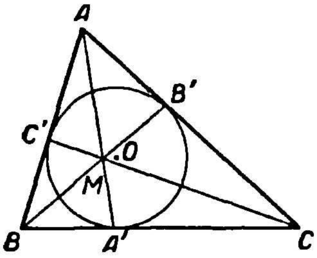
Пусть A', B', C' точки касания вписанного круга (черт. 8). Тогда

$$AB' = C'A, \ CA' = CB', \ C'B = A'B.$$

Следовательно,

$$\frac{AB' \cdot CA' \cdot BC'}{C'A \cdot B'C \cdot A'B} = 1.$$

Теорема доказана.



Черт. 8.

Задача. Доказать, что биссектрисы двух внешних углов треугольника пересекаются на биссектрисе внутреннего угла при третьей вершине треугольника.

Задача. Найти внутри треугольника такую точку O, чтобы произведение $AB' \cdot BC' \cdot CA'$ имело наибольшую величину (A', B', C' — точки пересечения прямых AO, BO, CO со сторонами BC, CA, AB).

Проведем медианы AM, BN, CP треугольника ABC, пересекающиеся в точке G. Так как средняя геометрическая двух величин не больше их средней арифметической, то

$$\sqrt{AB' \cdot B'C} \leqslant AN, \ \sqrt{CA' \cdot A'B} \leqslant CM, \ \sqrt{BC' \cdot C'A} \leqslant BP.$$

Возводя в квадрат каждое из полученных неравенств и перемножая, получим:

$$AB' \cdot B'C \cdot CA' \cdot A'B \cdot BC' \cdot C'A \leqslant (AN \cdot CM \cdot BP)^2.$$

На основании теоремы Чевы имеем:

$$AB' \cdot CA' \cdot BC' = B'C \cdot A'B \cdot C'A.$$

Следовательно,

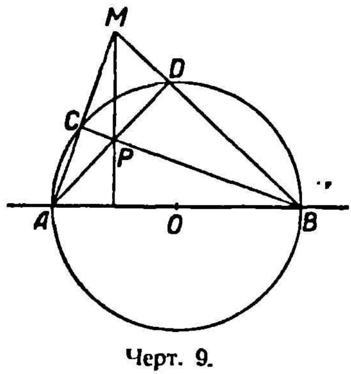
$$(AB' \cdot CA' \cdot BC')^2 \leqslant (AN \cdot CM \cdot BP)^2.$$

Неравенство обращается в равенство в случае совпадения оснований прямых Чевы с серединами соответствующих сторон, следовательно, в этом случае произведение $AB' \cdot BC' \cdot CA'$ имеет наибольшую величину, равную $\frac{abc}{8}$, где a, b, c стороны треугольника.

Итак, искомой точкой является точка пересечения медиан треугольника.

Задача. Опустить при помощи одной линейки из точки, находящейся вне или внутри круга, перпендикуляр на диаметр.

Пусть из точки M (черт. 9) на диаметр AB требуется опустить перпендикуляр.



Черт. 9.

Соединим точку M с концами диаметра. Точку C — точку пересечения AM с окружностью соединяем с концом диаметра B, а точку D — точку пересечения BM с окружностью соединяем с концом диаметра A. Прямые BC и AD пересекаются в точке P. Прямая MP проходит через точку пересечения двух высот и через вершину треугольника AMB и потому перпендикулярна AB.

7. Теорема Коатпона (Coatpont). *Прямые, выходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны пропорционально прилежащим углам, пересекаются в одной точке* (черт. 10).

Имеем:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{\angle A}{\angle C},\ \frac{CF}{FB}=\frac{\angle C}{\angle B},\ \frac{BE}{EA}=\frac{\angle B}{\angle A};$$

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}=1.$$

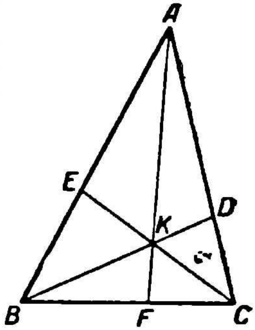
Теорема доказана.

Теорема Коатпона может быть обобщена следующим образом:

Прямые, выходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны пропорционально одним и тем же функциям прилежащих углов, пересекаются в одной точке:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{f(A)}{f(C)},\ \frac{CF}{FB}=\frac{f(C)}{f(B)},\ \frac{BE}{EA}=\frac{f(B)}{f(A)};$$

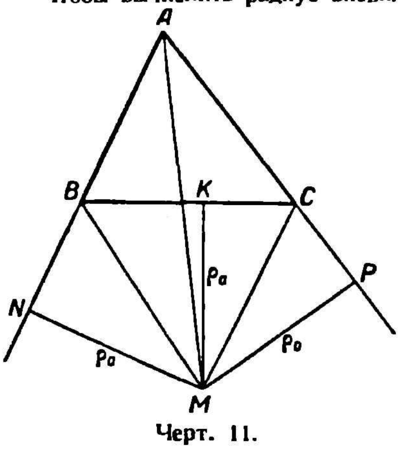
$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}=1.$$



Черт. 10.

8. Вневписанные окружности. Биссектрисы внешних углов при двух вершинах треугольника пересекаются на биссектрисе внутреннего угла при третьей его вершине (см. задачу в § 6). Точка пересечения двух биссектрис внешних углов и биссектрисы внутреннего угла при третьей вершине есть центр окружности, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (черт. 11). Эта окружность называется *вневписанной окружностью.*

Чтобы вычислить радиус вневписанной окружности, рассмотрим площади треугольников ABC, ABM, ACM, BCM.



Черт. 11.

Обозначим радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a, через ρ_a. Тогда

$$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}-S_{BCM}=$$

$$=\frac{c\rho_a}{2}+\frac{b\rho_a}{2}-\frac{a\rho_a}{2}=$$

$$=\frac{\rho_a(b+c-a)}{2}=\rho_a(p-a),$$

где p — полупериметр треугольника ABC. Следовательно,

$$\rho_a=\frac{S}{p-a}.$$

Аналогично

$$\rho_b=\frac{S}{p-b},\quad \rho_c=\frac{S}{p-c}.$$

9. Выражение площади треугольника через радиусы вписанного круга и полупериметр (черт. 12).

$$S_{ABC} = S_{BIA} + S_{AIC} + S_{CIB} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = pr.$$

Выражение площади треугольника через радиусы вневписанных и вписанных окружностей:

$$S = pr,\quad S = \rho_a(p-a),\quad S = \rho_b(p-b),\quad S = \rho_c(p-c);$$

$$S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)\, r\rho_a\rho_b\rho_c = S^2 r\rho_a\rho_b\rho_c;$$

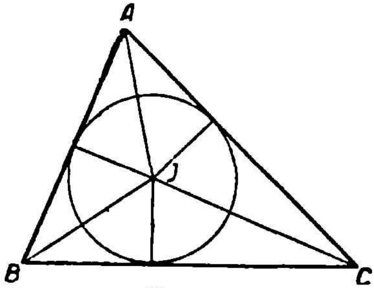
$$S = \sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c}.$$

Квадрат площади треугольника равен произведению радиусов вневписанных окружностей и радиуса вписанной.

10. Зависимость между радиусом вписанной окружности и радиусами вневписанных окружностей:

$$S = pr,\quad S = (p-a)\rho_a,$$

$$S = (p-b)\rho_b,\quad S = (p-c)\rho_c.$$



Черт. 12.

Отсюда $\frac{1}{r} = \frac{p}{S}$, $\frac{1}{\rho_a} = \frac{p-a}{S}$, $\frac{1}{\rho_b} = \frac{p-b}{S}$, $\frac{1}{\rho_c} = \frac{p-c}{S}$.

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}.$$

Сумма обратных величин радиусов вневписанных окружностей равна обратной величине радиуса вписанной окружности.

Задача. *Доказать, что сумма обратных величин высот треугольника равна обратной величине радиуса вписанного круга, т. е.*

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

11. Определение длины отрезков от вершины треугольника до точек касания вневписанного круга (черт. 11).

$$AN = AB + BN = c + BK,$$
$$AP = AC + CP = b + KC.$$

Так как

$AN = AP$, то $2AN = b + c + BK + KC = b + c + a = 2p$; $AN = p$.

Отрезок от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности, расположенной на продолжении стороны, равен полупериметру.

Задача. *Дан угол ABC и точка* (точка может быть расположена внутри угла, вне угла и на стороне угла). *Через эту точку провести прямую так, чтобы она образовала со сторонами угла треугольник данного периметра.*

Задача. *Доказать, что* $\rho_a\rho_b - r\rho_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

Так как

$$\rho_a = \frac{S}{p-a},\quad \rho_b = \frac{S}{p-b},\quad r = \frac{S}{p},\quad \rho_c = \frac{S}{p-c},$$

то

$$\rho_a\rho_b - r\rho_c = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} - \frac{S^2}{p(p-c)} = p^2 - pc - p^2 + ap + bp - ab =$$

$$= p(a+b-c) - ab = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2} - ab =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} - ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Задача. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c

$$\rho_c = r + \rho_a + \rho_b.$$

Задача. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c

$$r = \frac{\rho_a\rho_b}{\rho_c}.$$

Задача. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ρ_a *и* ρ_b *являются корнями квадратного уравнения*

$$x^2 + (r - \rho_c)x + r\rho_c = 0,$$

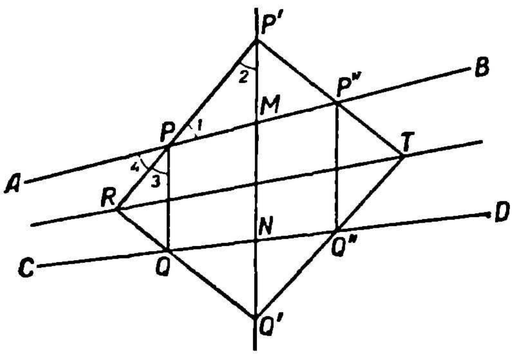
или корнями уравнения

$$x^2 - cx + \frac{ab}{2} = 0.$$

Задача. Доказать, что во всяком треугольнике

$$S = \frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b + \rho_c}.$$

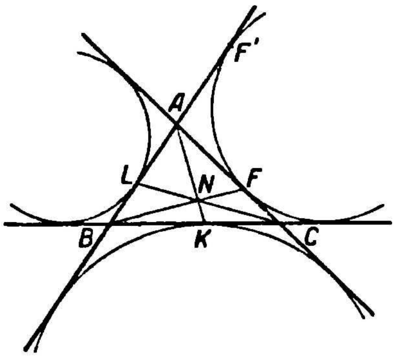
12. Деление пополам угла с недоступной вершиной. Требуется разделить пополам угол между прямыми AB и CD, точка пересечения которых недоступна (черт. 13).



Черт. 13.

Виттингом было предложено следующее построение. Пересекаем стороны угла двумя произвольными параллельными прямыми PQ и MN. Откладываем $MP' = MP'' = MP$ и $NQ' = NQ'' = NQ$. Пусть прямые PP' и QQ' пересекаются в точке R, а прямые $P'P''$ и $Q'Q''$ пересекаются в точке T. Прямая RT — искомая.

Доказательство. Обозначим недоступную вершину угла буквой F. Легко видеть, что PP' и QQ' — биссектрисы внутренних углов при двух вершинах треугольника PQF (действительно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 2$, следовательно, $\angle 3 = \angle 1$). Точка их пересечения R лежит на искомой биссектрисе. Прямая $PP' \perp P'P''$ и прямая $QQ' \perp Q'Q''$. В треугольнике $P''Q''F$ прямые $P'T$ и $Q'T$, будучи перпендикулярными к биссектрисам внутренних углов треугольника, являются биссектрисами внешних углов, следовательно, их точка пересечения T лежит на искомой биссектрисе. Прямая RT — искомая.



Черт. 14.

13. Точка Нагеля. *Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания соответственных вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля* (черт. 14).

Доказательство:

$AF = AF' = BF' - BA = p - c$, $CK = p - b$, $BL = p - a$, $FC = p - a$, $KB = p - c$, $LA = p - b$;

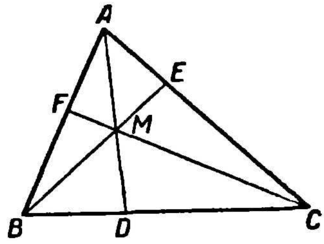
$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1.$$

Следовательно, прямые AK, BF, CL пересекаются в одной точке.

Свойства прямых Чевы.

14. Теорема Ван-Обеля. *Для каждой из прямых Чевы, пересекающихся внутри треугольника, существует соотношение* (черт. 15):

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$



Черт. 15.

Действительно, рассматривая площади треугольников AMC, AMB и BMC, найдем:

$$\frac{\text{площ. } AMC}{\text{площ. } BMC} = \frac{AF}{FB}, \quad \frac{\text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AE}{EC}$$

(AF и FB пропорциональны высотам, опущенным из A и B на основание MC). Следовательно,

$$\frac{\text{площ. } AMC + \text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}. \qquad (1)$$

Из рассмотрения треугольников AMC и CMD, AMB и BMD заключаем:

$$\frac{\text{площ. } AMC}{\text{площ. } CMD} = \frac{\text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMD} = \frac{AM}{MD};$$

$$\frac{\text{площ. } AMC + \text{площ. } AMB}{\text{площ. } CMD + \text{площ. } BMD} = \frac{AM}{MD};$$

$$\frac{\text{площ. } AMC + \text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AM}{MD}. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получим:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}.$$

Итак, теорема Ван-Обеля доказана.

Интересные частные случаи этой теоремы:

a) Прямые AD, BE, CF — медианы. В этом случае $AF = FB$, $AE = EC$, и

$$\frac{AM}{MD}=1+1=2.$$

То-есть *медиана делится точкой пересечения медиан в отношении* $2:1$, *считая от вершины*.

b) Прямые AD, BE, CF — биссектрисы внутренних углов; M — центр вписанного круга:

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a};\ \frac{AE}{EC}=\frac{c}{a};\ \frac{AM}{MD}=\frac{b+c}{a}.$$

c) M — точка пересечения чевиан — есть точка Жергона (см. § 6), т. е. тогда

$$\frac{AF}{FB}=\frac{p-a}{p-b},\ \frac{AE}{EC}=\frac{p-a}{p-c},$$

Поэтому

$$\frac{AM}{MD}=\frac{p-a}{p-b}+\frac{p-a}{p-c}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

d) M — точка Нагеля (см. § 13); тогда

$$\frac{AF}{FB}=\frac{p-b}{p-a},\ \frac{AE}{EC}=\frac{p-c}{p-a};$$

$$\frac{AM}{MD}=\frac{p-b}{p-a}+\frac{p-c}{p-a}=\frac{a}{p-a}.$$

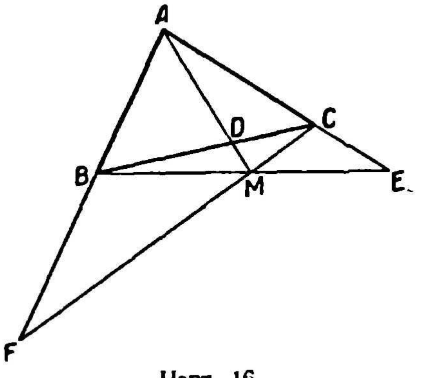
15. Дальнейшее развитие теоремы Ван-Обеля. По теореме Ван-Обеля (черт. 15)

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC},\ \text{или}\ \frac{AM}{DM}=\frac{AF}{BF}+\frac{AE}{CE}.$$

Каждая из дробей, входящих в последнее равенство, может рассматриваться, как отношение трех точек. Эти отношения в данном случае все отрицательны, а потому свойство прямой Чевы, о котором говорит теорема Ван-Обеля, может быть записано так:

$$(ADM)=(ABF)+(ACE).$$

Покажем, что в таком виде теорема Ван-Обеля может быть распространена на прямые Чевы, пересекающиеся вне треугольника.



Черт. 16.

Пусть в треугольнике ABC проведены прямые AD, BE, CF, пересекающиеся в точке M вне треугольника (черт. 16). В данном случае из трех прямых Чевы две (BE и CF) в точке пересечения делятся внутренним образом, а третья (AD) — внешним образом. В связи с этим проведем отдельно доказательство для прямой AD и, скажем, для прямой BE.

Докажем, что

$$(ADM) = (ABF) + (ACE).$$

Рассматривая площади треугольников AMC, AMB, BMC, получим:

$$\frac{\text{площ. } AMC}{\text{площ. } BMC} = \frac{AF}{BF}, \quad \frac{\text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AE}{CE};$$

$$\frac{\text{площ. } AMC + \text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE}. \qquad (1)$$

Из рассмотрения треугольников AMC и CMD, AMB и BMD заключаем:

$$\frac{\text{площ. } AMC}{\text{площ. } CMD} = \frac{\text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMD} = \frac{AM}{DM};$$

$$\frac{\text{площ. } AMC + \text{площ. } AMB}{\text{площ. } BMC} = \frac{AM}{DM}. \qquad (2)$$

Из сравнения равенства (1) и (2) заключаем

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE},$$

или

$$(ADM) = (ABF) + (ACE). \qquad (3)$$

Покажем, что и для BE это соотношение справедливо. Доказательство аналогично проведенному выше:

$$\frac{\text{площ. } ABM}{\text{площ. } ACM} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{\text{площ. } BCM}{\text{площ. } ACM} = \frac{BF}{AF};$$

$$\frac{\text{площ. } ABM - \text{площ. } BCM}{\text{площ. } ACM} = \frac{BD}{DC} - \frac{BF}{AF}.$$

$$\frac{\text{площ. } BCM}{\text{площ. } CME} = \frac{BM}{ME}, \quad \frac{\text{площ. } ABM}{\text{площ. } AME} = \frac{BM}{ME};$$

$$\frac{\text{площ. } ABM - \text{площ. } BCM}{\text{площ. } AMC} = \frac{BM}{ME}.$$

Следовательно,

$$\frac{BM}{ME} = \frac{BD}{DC} - \frac{BF}{AF}. \qquad (4)$$

Изменяя направления отрезков ME и DC на противоположные, мы тем самым изменим знаки отношений $\frac{BM}{ME}$ и $\frac{BD}{DC}$, и получим

$$-\frac{BM}{EM} = -\frac{BD}{CD} - \frac{BF}{AF}, \text{ или } \frac{BM}{EM} = \frac{BD}{CD} + \frac{BF}{AF},$$

а это и есть искомое равенство

$$(BEM) = (BCD) + (BAF).$$

Теорема доказана.

16. Назовем отношение трех точек, лежащих на прямой Чевы, *отношением Чевы*. Например, отношение (ADM) (черт. 15 и 16) есть отношение Чевы.

Теорема. *Разность между суммой трех отношений Чевы и их произведением есть величина постоянная, равная 2:*

$$(ADM) + (BEM) + (CFM) - (ADM)(BEM)(CFM) = 2.$$

Докажем эту теорему, основываясь на теореме Ван-Обеля. Пусть

$$(ABF) = \lambda_c, \quad (BCD) = \lambda_a, \quad (CAE) = \lambda_b.$$

По теореме Ван-Обеля

$$(ADM) = (ABF) + (ACE) = \lambda_c + \frac{1}{\lambda_b},$$

$$(BEM) = (BCD) + (BAF) = \lambda_a + \frac{1}{\lambda_c},$$

$$(CFM) = (CAE) + (CBD) = \lambda_b + \frac{1}{\lambda_a}.$$

Обозначим через T сумму отношений Чевы, а через Π — произведение этих отношений:

$$T = (ADM) + (BEM) + (CFM) = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c},$$

$$\Pi = \left(\lambda_a + \frac{1}{\lambda_c}\right)\left(\lambda_b + \frac{1}{\lambda_a}\right)\left(\lambda_c + \frac{1}{\lambda_b}\right) =$$

$$= \lambda_a \lambda_b \lambda_c + \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c} + \frac{1}{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}.$$

Так как по теореме Чевы $\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{1}{\lambda_a \lambda_b \lambda_c} = -1$, то $T - \Pi = 2$.

Теорема доказана.

Если точка M лежит внутри треугольника, то T и Π оба отрицательны, причем Π по абсолютной величине больше T. Поэтому, если $|T|$ и $|\Pi|$ обозначают абсолютную величину T и Π соответственно, то $|\Pi| - |T| \;\; 2$.

В таком виде доказанная теорема представляет теорему Эйлера, касающуюся свойств прямых Чевы, проходящих через одну точку внутри треугольника.

Выражение для Π можно преобразовать следующим образом:

$$\Pi = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda_b \lambda_c - \lambda_c \lambda_a - \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_b \lambda_c - 1 =$$

$$= (1 - \lambda_c)\lambda_a + (1 - \lambda_c)\lambda_b - (1 - \lambda_c) - \lambda_a \lambda_b (1 - \lambda_c) =$$

$$= (1 - \lambda_c)(\lambda_a + \lambda_b - 1 - \lambda_a \lambda_b) = -(1 - \lambda_a)(1 - \lambda_b)(1 - \lambda_c).$$

Подсчитаем для частных случаев значение Π.

1) Пусть прямые Чевы — медианы. Тогда $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = -1$, и $\Pi = -8$.

2) Пусть прямые Чевы — биссектрисы внутренних углов. Тогда

$$\lambda_a = -\frac{c}{b}, \quad \lambda_b = -\frac{a}{c}, \quad \lambda_c = -\frac{b}{a};$$

$$\Pi = -\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right) = -\frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{abc}.$$