**В.А. Ильин**

# Математический анализ

## Начальный курс. 2-е издание

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

**В.А. Ильин**
В11 Математический анализ: Начальный курс. 2-е издание / В.А. Ильин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 660 с.

**ISBN 978-5-458-28464-6**

Учебник представляет собой первую часть трёхтомного курса математического анализа для высших учебных заведений СССР, Болгарии и Венгрии, написанного в соответствии с соглашением о сотрудничестве между Московским, Софийским и Будапештским университетами. Книга включает в себя теорию вещественных чисел, теорию пределов, теорию непрерывности функций, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной и их приложения, дифференциальное исчисление функций многих переменных и теорию неявных функций.

**ISBN 978-5-458-28464-6**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

## ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время прогресс в математике в большой степени связан с развитием электронно-вычислительных средств. Математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Все это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний, и ставит новые задачи в изучении самой математики. В связи с этим возникает потребность в написании учебника по математическому анализу, учитывающего указанные закономерности.

То обстоятельство, что решение математических задач реализуется на ЭВМ с помощью вычислительных алгоритмов, предъявляет повышенные требования к четкости алгоритмического уровня изложения математических дисциплин. Однако такое изложение должно базироваться на классических концепциях математики и не должно их затемнять.

Эти общие принципы вместе с задачей четкого, ясного и доступного изложения и положены в основу написания предлагаемой читателю книги. Книга написана с учетом согласованной между Московским и Софийским университетами программы преподавания первой части математического анализа.

В предлагаемом учебнике уделено большое внимание вопросам оптимизации, играющим в математике и ее приложениях большую роль. В частности, в книге впервые в учебной литературе в законченном виде излагается алгоритм отыскания как внутреннего, так и краевого экстремума функции. В учебнике уделено значительное внимание изучению вопроса об исходной информации, доступной при решении задачи. Так, например, для отыскания экстремума функции одной переменной авторы предлагают алгоритм, базирующийся на информации только о значениях функции в точках области ее задания. Предлагаемое решение не опирается на знание значений производной в точках области задания и пригодно для отыскания экстремума недифференцируемых функций. Такая постановка типична при решении задач об оптимизации производственных процессов.

При выборе метода изложения авторы отправляются от того, что выбор алгоритма решения задачи зависит от того, какая информация из постановки этой задачи может быть использована. Так, например, при введении понятия определенного интеграла

Римана авторы отправляются от концепции изложения, базирующейся на использовании значений функции в точках сегмента.

Эта концепция, несомненно, является более предпочтительной по сравнению с концепцией введения определенного интеграла Римана с помощью первообразной, ибо она отвечает идее численных методов вычисления определенного интеграла, используемых на ЭВМ.

В заключение хочу высказать уверенность, что предлагаемая книга будет способствовать повышению математической культуры читателей с различными запросами к объему математических знаний.

*А. Тихонов*

Москва,
сентябрь 1978 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга подверглась существенной переработке и сокращению в целях максимального приближения ее материала к тому курсу, который реально может быть прочитан студентам первого года обучения.

Особенно существенной переработке были подвергнуты разделы, посвященные теории вещественных чисел, теории множеств и теории метрических, топологических и нормированных пространств.

В книге сохранены три уровня изложения (облегченный, основной и повышенный).

Так же, как и в первом издании, текст повышенного уровня выделен в книге двумя вертикальными чертами, текст основного уровня — одной вертикальной чертой, а остальной текст книги относится к облегченному уровню изложения.

Проведенные во втором издании переработки улучшили возможности использования книги на указанных трех различных уровнях изложения.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ и сотрудникам кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ за критические замечания по первому изданию этой книги. Авторы благодарят также В. М. Говорова, В. Н. Денисова, И. С. Ломова и В. В. Тихомирова за помощь при подготовке второго издания этой книги. Особую благодарность авторы приносят А. И. Прилепко, прочитавшему рукопись второго издания и сделавшему критические замечания, способствующие ее улучшению.

Москва,
февраль 1985 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга является учебником по математическому анализу по согласованной между Московским и Софийским университетами единой программе первого года обучения. Она полностью охватывает материал первого года обучения, предусмотренный программой для студентов университетов СССР и НРБ, обучающихся по специальностям «математика», «механика» и «прикладная математика».

Особенностью этой книги является то, что она содержит три четко отделяемых друг от друга уровня изложения: облегченный, основной и повышенный, причем для понимания материала облегченного уровня не требуется чтения материалов основного и повышенного уровней, а для понимания материала основного уровня не требуется чтения материала повышенного уровня.

Облегченный уровень отвечает программе технических вузов СССР с углубленным изучением математического анализа; основной уровень изложения отвечает программе специальностей «прикладная математика» и «физика» университетов СССР; материал повышенного уровня дополняет материал основного уровня разделами, обычно излагаемыми на механико-математических факультетах университетов.

Текст, выделенный в книге двумя вертикальными чертами, относится к повышенному уровню изложения; текст, выделенный одной вертикальной чертой, — к основному уровню изложения; остальной текст книги составляет содержание облегченного уровня изложения.

Книга содержит вводную главу, разъясняющую возникновение основных понятий математического анализа и облегчающую восприятие последующего материала.

В книге нашла отражение возросшая роль вычислительных методов и содержится ряд примеров применения аппарата математического анализа для вычисления элементарных функций, интегралов и отыскания корней уравнений и точек экстремума.

В настоящее время в СССР и НРБ имеется целый ряд учебников по математическому анализу, среди которых особенно удачными, по нашему мнению, являются учебники, написанные Л. Д. Кудрявцевым и С. М. Никольским в СССР и Я. Тагамлицким в НРБ.

Авторы настоящей книги, несомненно, испытали влияние этих прекрасных учебников.

При написании этой книги авторы использовали часть материала книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», а также опыт преподавания математического анализа в университетах.

Авторы выражают глубокую благодарность титульному редактору этой книги академику А. Н. Тихонову за большое количество ценных советов и замечаний.

Авторы благодарят также Л. Д. Кудрявцева, И. И. Ляшко, В. Л. Макарова, Д. Б. Дойчинова и Т. Боянова, критические замечания которых способствовали улучшению этой книги.

Особой благодарностью авторы отмечают труд В. М. Говорова и Г. Христова, который намного превзошел рамки обычного редактирования.

София,
март 1978 г.

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В настоящей главе, не претендуя на точность формулировок и отправляясь от простейших задач механики, мы постараемся обрисовать основной круг понятий и проблем математического анализа.

**1.** Начнем наше рассмотрение с выяснения тех математических понятий, которые неизбежно возникают при описании самого простейшего вида движения — движения материальной точки вдоль прямой линии.

Если материальная точка движется вдоль оси $Oy$, а $x$ обозначает время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то для описания указанного движения необходимо знать правило, посредством которого каждому значению времени $x$ ставится в соответствие координата $y$ движущейся точки в момент времени $x$.

В механике такое правило называют законом движения. Абстрагируясь от конкретного механического смысла переменных $x$ и $y$ и рассматривая в качестве $x$ и $y$ две совершенно произвольные переменные величины, мы придем к понятию функции, являющемуся одним из важнейших понятий математического анализа.

*Если известно правило, посредством которого каждому значению одной переменной $x$ ставится в соответствие определенное значение другой переменной $y$, то говорят, что переменная $y$ является функцией переменной $x$, и пишут $y=y(x)$ или $y=f(x)$.*

При этом переменную $x$ называют аргументом или независимой переменной, а переменную $y$ — функцией аргумента $x$.

Букву $f$ в записи $y=f(x)$ обычно называют характеристикой рассматриваемой функции, а значение $y=f(x)$ называют частным значением функции в точке $x$. Совокупность всех частных значений функции принято называть областью изменения этой функции.

Отметим сразу же, что приведенная формулировка понятия функции требует уточнения, ибо в этой формулировке ничего не говорится о том, из какого множества берутся значения независимой переменной $x$.

Множество, состоящее из тех и только тех чисел, которые являются значениями независимой переменной $x$, обычно называют области задания функции. Описание областей задания функции требует развития теории числовых множеств.

Отметим еще, что понятие функции (так же, как и понятие числа, множества и переменной величины) естественно считать начальным понятием (т. е. таким понятием, которое можно описать, но нельзя строго определить, ибо любая попытка дать строгое определение указанного понятия неизбежно сведется к замене определяемого понятия ему эквивалентным). Таким образом, вместо термина «определение функции» естественнее употреблять термин «понятие функции».

Отметим, наконец, что для обозначения аргумента функции и ее характеристики могут употребляться различные буквы. Так, например, запись $x=\varphi(t)$ обозначает, что переменная $x$ является функцией аргумента $t$, причем характеристика этой функции обозначена через $\varphi$. При одновременном рассмотрении нескольких функций одного аргумента $t$ для обозначения характеристик этих функций необходимо употреблять различные символы.

2. Часто приходится рассматривать такую функцию $y=f(x)$, аргумент $x$ которой сам является функцией вида $x=\varphi(t)$ некоторой новой переменной $t$. В таком случае говорят, что переменная $y$ представляет собой сложную функцию аргумента $t$, а переменную $x$ называют промежуточным аргументом. Указанную сложную функцию называют также суперпозицией функций $f$ и $\varphi$. Для обозначения указанной сложной функции естественно использовать символ $y=f[\varphi(t)]$.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий возникновение понятия сложной функции. Предположим, что материальная точка $M$ равномерно с постоянной угловой скоростью $\omega$ вращается по окружности радиуса $R$. Найдем закон движения проекции $M'$ точки $M$ на некоторую ось $Oy$, проходящую через центр $O$ окружности и лежащую в ее плоскости (рис. 1.1). При этом естественно предположить, что в начальный момент времени $t=0$ движущаяся точка $M$ находилась в точке $M_0$ пересечения окружности с осью $Oy$. Обозначим через $y$ координату проекции $M'$ точки $M$ на ось $Oy$, а через $x$ угол $M_0OM$, на который повернется точка $M$ за время $t$. Очевидно, что $y=R\cos x$, $x=\omega t$, и мы получим, что координата $y$ проекции $M'$ представляет собой сложную функцию времени $t$ вида $y=R\cos x$, где $x=\omega t$. Эту сложную функцию можно записать в виде $y=R\cos\omega t$. Отметим, что движение по закону $y=R\cos\omega t$ в механике принято называть гармоническим колебанием.

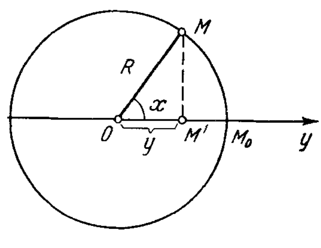


Рис. 1.1

3. Из курса физики известно, что важной характеристикой движения материальной точки является ее мгновенная скорость в каждый момент времени $x$. Если материальная точка движется вдоль оси $Oy$ по закону $y=f(x)$, то, фиксировав произвольный момент времени $x$ и какое угодно приращение времени $\Delta x$, мы можем утверждать, что в момент времени $x$ движущаяся точка имеет координату $f(x)$, а в момент времени $x+\Delta x$ — координату $f(x+\Delta x)$.

Таким образом, число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ представляет собой путь, пройденный движущейся точкой за промежуток времени от $x$ до $x+\Delta x$.

Отсюда вытекает, что отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

обычно называемое разностным отношением, представляет собой среднюю скорость движущейся точки за промежуток времени от $x$ до $x+\Delta x$.

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) движущейся точки называется предел, к которому стремится средняя скорость (1.1) при стремлении к нулю промежутка времени $\Delta x$.

Если использовать известный из курса средней школы символ предела, то можно записать следующее соотношение для мгновенной скорости $v(x)$ в момент времени $x$:

$$v(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Физическое понятие мгновенной скорости приводит к фундаментальному математическому понятию производной. Абстрагируясь от механического смысла рассмотренной выше функции $y=f(x)$, мы *назовем производной произвольной функции* $y=f(x)$ в *данной фиксированной точке* $x$ *предел, стоящий в правой части* (1.2) (*при условии, конечно, что этот предел существует*).

Используя для обозначения производной функции $y=f(x)$ в точке $x$ символ $f'(x)$ или $y'(x)$, мы можем по определению записать следующее равенство:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операцию нахождения производной договоримся называть дифференцированием.

Наше рассмотрение показывает, что при вычислении производной фундаментальную роль играет понятие предела функции.

Предварительное представление о понятии предела функции (да и о самом понятии производной) дается в курсе средней школы. Однако строгое и последовательное изучение понятия предела возможно лишь на базе строгой теории вещественных чисел. Так, например, без строгой теории вещественных чисел невозможно установить существование двух следующих важных пределов:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \text{ и } \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t},$$

неизбежно возникающих, как мы увидим ниже, при вычислении производных функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$.

Итак, проведенное нами рассмотрение показывает, что вопрос о существовании и вычислении производной упирается в необходимость развития строгой теории вещественных чисел и на ее базе теории пределов.

**4.** Займемся теперь вычислением производных двух конкретных элементарных функций $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ и выясним, какие математические проблемы неизбежно возникают при этом.

Сначала вычислим производную функцию $y=\sin x$ в любой фиксированной точке $x$. Для этой функции разностное отношение (1.1), очевидно, имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Таким образом, производная функции $y=\sin x$ в точке $x$ по определению равна пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right\} \tag{1.3}$$

(при условии, что этот предел существует).

Можно ожидать, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x. \tag{1.4}$$

Заметим, однако, что не для всякой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta x\to 0}f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=f(x). \tag{1.5}$$

*Функция $f(x)$, для которой в данной точке $x$ справедливо равенство* (1.5), *называется* ***непрерывной*** *(в точке $x$)*. Понятие непрерывности функции является одним из важнейших математических понятий и будет основательно изучаться в систематическом курсе математического анализа. В частности, в систематическом курсе будет доказано, что функция $y=\cos x$ является непрерывной в каждой точке $x$, т. е. в каждой точке $x$ справедливо равенство (1.4).

Заметим теперь, что для вычисления предела (1.3) недостаточно доказать справедливость соотношения (1.4). Для этого необходимо еще вычислить следующий предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\quad\left(t=\frac{\Delta x}{2}\right). \tag{1.6}$$

В систематическом курсе анализа будет строго доказано, что предел (1.6), часто называемый **первым замечательным пределом**, существует и равен единице.

Только после того, как будет установлена непрерывность функции $y=\cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и вычислен первый замечательный предел (1.6), мы сможем, опираясь еще на то, что предел произведения равен произведению пределов сомножителей, строго утверждать, что предел (1.3) существует и равен $\cos x$ или, что то же самое, производная функции $y=\sin x$ существует и равна $\cos x$.

Перейдем теперь к вычислению производной функции $y=\log_a x$, считая, что $0<a\neq 1$, и фиксировав произвольную точку $x>0$. Для этой функции разностное отношение (1.1) имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$ и выбирается так, что $x+\Delta x>0$). Таким образом, производная функции $y=\log_a x$ в любой точке $x>0$ по определению равна пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} \tag{1.7}$$

(при условии, что этот предел существует). Преобразуем дробь, стоящую в (1.7), проделав следующие операции: 1) заменим разность логарифмов логарифмом частного; 2) произведем умножение и деление на одну и ту же величину $x>0$; 3) внесем множитель, стоящий перед логарифмом, под знак логарифма, сделав его показателем степени. В результате получим, что предел (1.7) равен

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=$$