Н. Рыбкин

Прямолинейная тригонометрия

12-е издание

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н. Рыбкин
Н11 Прямолинейная тригонометрия: 12-е издание / Н. Рыбкин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 104 с.

ISBN 978-5-458-35698-5

Учебник "Прямолинейная тригонометрия" Н. Рябкина, издаваемый теперь двенадцатым изданием, всегда пользовался большой популярностью благодаря систематичности изложения, выдержанности плана, краткости и точности языка, строгости и научности содержания. Несмотря на некоторую сухость изложения, этот учебник вполне применим в старших группах советской школы, помогая учащимся закреплять и повторять материал, проработанный с преподавателем.В этом издании общий характер и система учебника сохранены; внесены только частичные изменения в отдельных местах: исправлено изложение неясных мест; проредактирован текст; некоторые доказательства заменены более простыми; опущены параграфы, не имеющие значения. В согласии с последней программой ФЗС приведены примеры решения треугольников с помощью четырёхзначных таблиц. Введён небольшой исторический очерк.

ISBN 978-5-458-35698-5

современный алгебраический характер. Соединение тригонометрии с алгеброй и анализом дало новый толчок к развитию всей математики, неразрывно связанной со всем техническим прогрессом. Из других ученых работали по тригонометрии Виет (изобретатель алгебры), Романус, Непер (изобретатель натуральных логарифмов), Снеллиус (автор триангуляционной съемки), Потентот и гениальный математик Эйлер; последнему принадлежит введение тригонометрических функций с помощью тригонометрического круга.

§ 2. Понятие о функции. Существуют переменные величины, связанные между собою так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой. Таковы, например, переменные величины y и x в следующих равенствах: $y = a + x$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ и т. д.; таковы же: сторона квадрата и его площадь, радиус шара и его объем и т. д.

Переменная величина, значения которой соответствуют значениям другой переменной величины, называется ее функцией. Так, например, можно сказать, что площадь круга есть функция его радиуса: действительно, с изменением длины радиуса изменяется и площадь круга, и при этом каждому значению радиуса соответствует определенное значение площади круга (и наоборот: радиус круга мы назовем функцией его площади, если будем назначать площадь и по ней определять радиус).

Та величина, в зависимости от которой изменяется функция, называется аргументом функции. Так, если равенство $y = x^3$ служит для определения y по данному x, то x есть аргумент, а y — функция; также в равенстве $y = \lg N$ имеем: N есть аргумент, y — значение функции, $\lg$ — обозначение взятой функции. (Вообще: аргумент — независимое переменное, функция — переменное зависимое.)

§ 3. Измерение дуг и углов. Как известно из геометрии, углы определяются с помощью дуг.

Если дуга служит для определения угла, то ее выражают или в частях окружности или в частях радиуса[1].

Первый способ дает для дуги и угла градусное выражение, известное из геометрии.

Второй способ состоит в том, что дугу выражают отвлеченным числом, показывающим ее отношение к радиусу;

[1]) Первый способ нагляднее и применяется в практических измерениях (на угломерных инструментах), второй предпочитают в теоретических вопросах.

если, например, сказано «величина дуги равна 2,43», то это значит, что выпрямленная дуга содержит 2,43 радиуса; полуокружность по этому способу выразится отношением $\pi R : R$, т. е. числом π, а, следовательно, четверть окружности — числом $\frac{\pi}{2}$ и т. п. Такое выражение дуги мы будем называть отвлеченным, или радианным.

Чтобы при этом способе центральный угол выразился тем же числом, что и его дуга, надо, чтобы угловая единица соответствовала дуге длиною в радиус. Такой угол называется радианом. Таким образом мы можем сказать: отвлеченное выражение угла есть его отношение к радиану; например, выражение «угол $\frac{3}{2}\pi$» понимается как «угол $\frac{3}{2}\pi$ радианов».

Так как в длине окружности радиус содержится 2π раз, то градусная величина радиана (и дуги, равной радиусу) есть $\frac{360^\circ}{2\pi}$, что равно $57^\circ 17' 44'',8$ (с точностью до $0,05''$).

Полезно запомнить еще следующее. Отвлеченное выражение всей окружности есть $2\pi R : R$, т. е. число 2π, а ее градусное выражение есть 360°; отсюда получаются следующие соответствия:

360°	180°	90°	270°	60°	45°	30°	18°
2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

Выведем теперь такие формулы для перехода от градусного выражения на радианное и обратно.

Обозначим градусное выражение какой-нибудь дуги или угла через α, а отвлеченное — через a. Так как для полной окружности градусное выражение есть 360°, а отвлеченное — 2π, то получим пропорцию:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{a}{2\pi}, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{a}{\pi};$$

отсюда:

$$a = \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} \tag{1}$$

и

$$\alpha = 180^\circ \cdot \frac{a}{\pi}. \tag{2}$$

Пример. Найти отвлечённое выражение угла 67°30'.

По формуле (1), заменяя α через 67°30', найдем:

$$x = \pi \cdot \frac{67°30'}{180°} = \frac{3}{8}\pi;$$

если же подставить сюда приближенное значение π, то получим $x = 1{,}17810$ с точностью до половины одной стотысячной.

(Без применения формулы можно получить x постепенно из следующих равенств:

$$360° \ldots 2\pi;\ 1° \ldots \frac{2\pi}{360};\ 67°30' = 67\frac{1°}{2} \ldots \frac{2\pi}{360} \cdot 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi.)$$

§ 3а. Длина дуги. Если обозначить через r радиус окружности, через l — длину дуги, а через a — радианное измерение соответствующего центрального угла, то согласно определению радианного измерения получим:

$$a = \frac{l}{r},$$

откуда

$$l = ar,$$

т. е. *длина дуги равна радиусу, умноженному на радианное измерение дуги.*

Эта формула часто употребляется в физике и технике.

Для вычислений, связанных с радианной мерой, следует пользоваться таблицами для перевода градусов в радианы и обратно. (В таблицах Брадиса это таблица VII, в таблицах Пржевальского — XI.)

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.

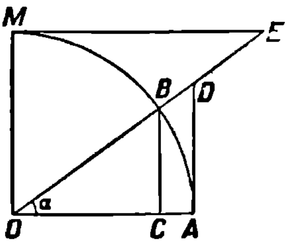
(Гониометрия.)

I. Тригонометрические функции острого угла.

§ 4. Названия и обозначения. Тригонометрические функции угла следующие: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

Они имеют следующие обозначения: sin, cos, tg, ctg, sec, cosec; при этом угол записывается рядом с названием функции, так что, например, синус угла α пишется: $\sin\alpha$.

§ 5. Определение тригонометрических функций острого угла. Возьмем какой-нибудь острый угол α и сделаем его центральным, описав из его вершины дугу произвольным радиусом, длину которого обозначим через R. Чтобы различить между собой радиусы, образующие угол, будем представлять себе, что при изменении угла α (черт. 1) радиус OA сохраняет свое положение, а радиус OB вращается; в этом смысле будем называть радиус OB подвижным радиусом угла, а радиус OA неподвижным. Обращаясь теперь к определениям тригонометрических функций, скажем сначала вообще, что они представляют собою отношения к радиусу особых линий в круге, проводимых для данного угла как для центрального. Для построения этих линий, кроме дуги AB, пользуются еще ее продолжением и радиусом OM, проведенным под прямым углом к OA.



Черт. 1.

Определения отдельных тригонометрических линий и функций для острого угла суть следующие:

1) Перпендикуляр (BC), опущенный из конца подвижного радиуса на неподвижный, называется линией синуса, а отношение этой линии к радиусу есть синус данного угла $\left(\sin\alpha = \frac{BC}{R}\right)$.

2) Расстояние (OC) от центра до линии синуса называется линией косинуса, а отношение этой линии к радиусу есть косинус данного угла $\left(\cos\alpha = \frac{OC}{R}\right)$.

3) Касательная (AD), проведенная из конца неподвижного радиуса до встречи с продолженным подвижным радиусом, называется линией тангенса, а ее отношение к радиусу есть тангенс данного угла $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{R}\right)$.

4) Касательная (ME), проведенная из конца радиуса перпендикулярного к неподвижному до встречи с продолженным подвижным радиусом, называется линией котангенса, а ее отношение к радиусу есть котангенс данного угла $\left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ME}{R}\right)$.

5) Расстояние (OD) от центра до конца линии тангенса называется линией секанса, а отношение этой линии к радиусу есть секанс данного угла $\left(\sec\alpha = \frac{OD}{R}\right)$.

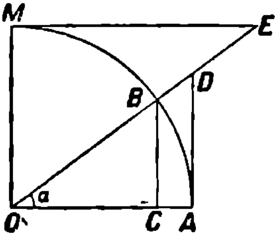
6) Расстояние (OE) от центра до конца линии котангенса называется **линией косеканса**, а отношение этой линии к радиусу есть **косеканс** данного угла $\left(\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OE}{R}\right)$.

Следствие. Тригонометрические функции, представляя собою величину **отношений** между линиями, суть **отвлеченные числа**.

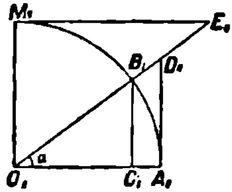
Так, например, если радиус равен 9 *см*, а линия синуса равна 6 *см*, то для **синуса** получим отвлеченное число $\frac{2}{3}$.

§ 6. ***Теорема.*** *Тригонометрические функции данного угла не зависят от длины радиуса.*

Пусть на чертежах 2 и 3 углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны данному углу α, а радиусы дуг не равны. Значения тригонометрических функций при радиусе R обозначим через sin, cos ..., а при радиусе R_1 через $\sin_1$, $\cos_1$ ...; требуется доказать, что $\sin_1 \alpha = \sin \alpha$, $\cos_1 \alpha = \cos \alpha$ и т. д.



Черт. 2.



Черт. 3.

Доказательство. Треугольники $O_1B_1C_1$, $O_1D_1A_1$ и $O_1M_1E_1$ соответственно подобны треугольникам OBC, ODA и OME (вообще: чертеж 3 подобен чертежу 2); поэтому:

$$\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R}, \quad \frac{O_1C_1}{R_1} = \frac{OC}{R}, \quad \frac{A_1D_1}{R_1} = \frac{AD}{R}.$$

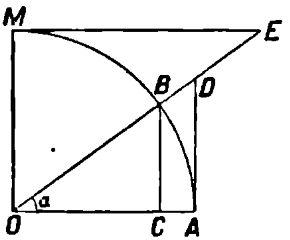
и т. д., т. е. $\sin_1 \alpha = \sin \alpha$, $\cos_1 \alpha = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}_1 \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ и т. д.

Итак, для одного и того же угла тригонометрическая функция при всяком радиусе имеет одно и то же значение.

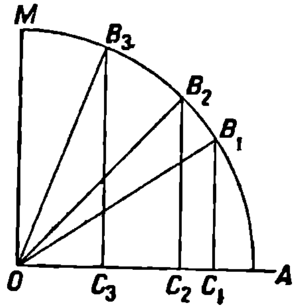
§ 7. В предыдущем параграфе было доказано, что с изменением длины радиуса тригонометрические функции данного угла не меняются; но если мы изменим величину угла, то, как видно по чертежу, каждая из тригонометрических функций изменит свое значение. Отсюда тригонометрические числа и получили свое название тригонометрических **функций** угла.

§ 8. Так как центральный угол и его дуга выражаются одним и тем же числом, то тригонометрические функции угла суть в то же самое время и тригонометрические функции дуги, понимая под словом **дуга** ее градусное или отвлеченное выражение. Ввиду этого мы будем иногда, для удобства, вместо углов пользоваться дугами, иногда же будем рассматривать угол и дугу под общим названием **аргумент**.

§ 9. **Изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0° до 90°.** Если на чертеже 4 угол α будет постепенно возрастать, то отношения: $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ будут увеличиваться, а отношения: $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ будут уменьшаться (черт. 5);



Черт. 4.



Черт. 5.

таким образом, с возрастанием острого угла его синус, тангенс и секанс возрастают, а косинус, котангенс и косеканс убывают. Когда угол α достигает 90°, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 1, $\frac{OC}{R}$ — в 0, $\frac{AD}{R}$ — в ∞, $\frac{ME}{R}$ — в 0, $\frac{OD}{R}$ — в ∞ и $\frac{OE}{R}$ — в 1; таким образом: $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90° = \infty$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$, $\sec 90° = \infty$ и $\operatorname{cosec} 90° = 1$.

При обратном переходе $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ убывают, а $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ возрастают. Если угол α обращается в нуль, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 0, $\frac{OC}{R}$ — в 1, $\frac{AD}{R}$ — в 0, $\frac{ME}{R}$ — в ∞, $\frac{OD}{R}$ — в 1 и $\frac{OE}{R}$ — в ∞; таким образом: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0 = \infty$, $\sec C = 1$ и $\operatorname{cosec} 0 = \infty$.

Итак, если α возрастает от 0 до 90°, то:

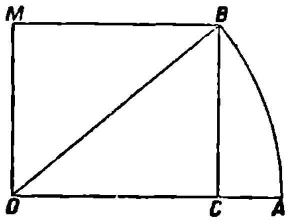
$\sin\alpha$ возрастает от 0 до 1;
$\cos\alpha$ убывает от 1 до 0;
$\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от 0 до ∞;
$\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от ∞ до 0;
$\sec\alpha$ возрастает от 1 до ∞;
$\operatorname{cosec}\alpha$ убывает от ∞ до 1.

Так как 0 и 90° суть крайние значения острого угла, то полученный вывод показывает также, какие значения вообще способна принимать каждая из тригонометрических функций острого угла; так, например, мы видим, что число 3 может быть тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом, но не может быть ни синусом, ни косинусом.

Равенства, содержащие ∞, надо понимать условно: так, выражение $\operatorname{tg} 90° = \infty$ имеет лишь тот смысл, что с приближением угла к 90° его тангенс неограниченно возрастает.

§ 10. Построение острого угла по данной тригонометрической функции. Из § 6 и 9 видно, что каждому значению угла α соответствует свое особое значение каждой из тригонометрических функций. Займемся теперь обратным вопросом, т. е. нахождением угла по данной его функции. Воспользуемся для этого примерами построения.

Пример 1. Построить угол, зная, что его синус равен $\frac{2}{3}$ (черт. 6).

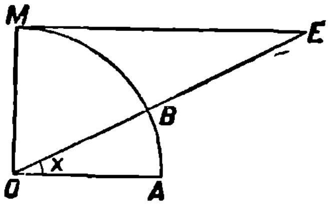


Черт. 6.

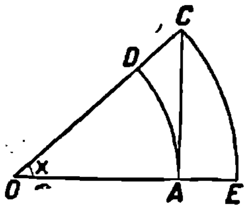
Решение. Проведя произвольную прямую OA, примем точку O за центр дуги, а OA — за неподвижный радиус искомого угла и опишем этим радиусом дугу. Чтобы синус был равен $\frac{2}{3}$, конец дуги должен быть удален от OA на расстояние, которое относилось бы к радиусу, как 2 : 3. Поэтому поступаем так: восставив перпендикуляр OM, равный $\frac{2}{3}\,OA$, проведем из точки M параллель к OA, и в точку ее пересечения с дугой проведем радиус; угол AOB есть искомый, т. е. $\sin AOB = \frac{2}{3}$. Заметим, что этот угол не зависит от длины радиуса, так как при всяком другом радиусе мы получим треугольник, подобный треугольнику OBC и, следовательно, с углами такой же величины.

Пример 2. Построить угол, если известно, что его котангенс равен 2 (черт. 7).

Решение. Возьмем центральный прямой угол AOM, из точки M проведем касательную ME, равную двум радиусам, и точку E соединим с центром; угол AOB есть искомый, так как $\operatorname{ctg} AOB = \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2$. Изменив длину радиуса, мы получим треугольник, подобный треугольнику MOE, поэтому угол MEO, а следовательно, и угол AOB сохранят свою величину.



Черт. 7.



Черт. 8.

Пример 3. Построить угол, секанс которого равен $\frac{4}{3}$.

Решение. Опишем какую-нибудь дугу и, приняв один из радиусов (OA) за неподвижный, проведем из его конца касательную. Так как секанс равен $\frac{4}{3}$, то конец касательной должен отстоять от центра на $\frac{4}{3}$ радиуса. Чтобы достигнуть этого, возьмем отрезок OE, равный $\frac{4}{3}$ OA, и конец его перенесем на касательную; угол AOD будет искомый. Как и в двух предыдущих примерах, результат не зависит от длины радиуса (черт. 8).

Предлагаем теперь самому учащемуся сделать построение в остальных случаях, пользуясь, например, следующими числами: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{4}{7}$ и $\operatorname{cosec} x = 2$.

§ 11. Итак, для каждого значения тригонометрической функции получается определенный острый угол, независимо от длины радиуса; а раньше мы видели, что каждому углу соответствует определенное значение тригонометрической функции, также независимо от длины радиуса; таким образом можно сказать, что *острый угол и тригонометрическая функция вполне определяют друг друга.*

§ 12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Между тригонометрическими функциями одного и того же угла легко обнаружить весьма простую зависимость (черт. 9).

1) Из прямоугольного треугольника OBC имеем $BC^2 + OC^2 = OB^2$. Разделив здесь обе части на R^2, получим:

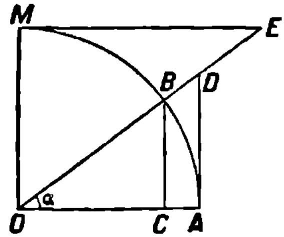
$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2,$$

или

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{(I)}$$

2) Из подобия треугольников ODA и OBC имеем: $\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OC}$; отсюда, заменяя OA через R и разделив на R оба члена второго отношения, найдем $\frac{AD}{R} = \frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$, или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad \text{(II)}$$



Черт. 9.

3) Из подобия треугольников EOM и OBC находим: $\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}$, откуда $\frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$, или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \text{(III)}$$

4) Из подобия треугольников ODA и OBC находим: $\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{OC}$; отсюда $\frac{OD}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$, или $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, откуда

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1. \qquad \text{(IV)}$$

5) Из подобия треугольников EOM и OBC имеем $\frac{OE}{OM} = \frac{OB}{BC}$; отсюда $\frac{OE}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$, или $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, откуда

$$\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha = 1. \qquad \text{(V)}$$

§ 13. Между тригонометрическими функциями одного угла существует только пять различных соотношений. Чтобы убедиться в этом, начнем с построения.

Действительно, достаточно одной функции, чтобы построить угол (§ 10); а полученный угол определит собой остальные пять функций; таким образом, если известна одна функция, то по ней можно найти остальные пять. Но для определения пяти неизвестных мы должны иметь и пять уравнений, независимых друг от друга. Если бы таких уравнений было шесть, то для всех шести функций получились бы определенные значения, между тем как они изменяются вместе с углом.

§ 14. Кроме пяти основных формул, полученных в § 12, полезно запомнить еще следующие три, которые можно уже вывести из основных.

1) Перемножая соответственные части равенств II и III, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad \text{(VI)}$$

2) Деля равенство I на $\cos^2\alpha$ и применяя формулы II и IV, получим (если переставим слагаемые первой части):

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha. \qquad \text{(VII)}$$

3) Деля равенство I на $\sin^2\alpha$ и применяя формулы III и V, найдем:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha. \qquad \text{(VIII)}$$

Замечание 1. Самостоятельно формула VI получается из подобия треугольников, а формулы VII и VIII—при помощи теоремы Пифагора.

Замечание 2. Заметим для памяти, что в обычном ряде функции sin, cos, tg, ctg, sec, cosec, равно удаленные от концов, дают в произведении единицу (см. формулы IV, V и VI).

Основными функциями мы будем считать sin, cos и tg (из них простейшие — sin и cos), а остальные три суть количества, обратные к ним: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

§ 15. С помощью формул, полученных в § 12 и 14, легко по одной функции найти все остальные. Так, например, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, то будем иметь последовательно:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3};$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \sec^2\alpha = \frac{25}{16}; \quad \sec\alpha = \frac{5}{4};$$

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}; \quad \cos\alpha = \frac{4}{5};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha; \quad \sin\alpha = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha = 1; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}.$$