

**Механика в СССР за 50 лет**  
**Том 2. Механика жидкости и газа**

Москва  
«Книга по Требованию»

УДК 53  
ББК 22.3  
М55

М55      Механика в СССР за 50 лет: Том 2. Механика жидкости и газа / – М.: Книга по Требованию, 2021. – 880 с.

**ISBN 978-5-458-50768-4**

**ISBN 978-5-458-50768-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



# ТЕОРИЯ СТРУЙ

М. И. ГУРЕВИЧ

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Предварительные замечания . . . . .                                                                           | 5  |
| § 2. Обтекание криволинейных препятствий с отрывом струй. Существование и единственность решений . . . . .         | 7  |
| § 3. Задачи обтекания препятствий, связанные с произволом выбора точек схода свободных поверхностей . . . . .      | 9  |
| § 4. Нелинейные теории глиссирования и подводного крыла . . . . .                                                  | 10 |
| § 5. Линеаризованная теория глиссирования . . . . .                                                                | 11 |
| § 6. Линеаризованная теория движения тел под поверхностью жидкости . . . . .                                       | 13 |
| § 7. Теория развитых кавитационных течений . . . . .                                                               | 15 |
| § 8. Обтекание препятствий ограниченными потоками, течение в каналах, решетки и другие задачи . . . . .            | 17 |
| § 9. Струйные течения, содержащие внутри себя вихри и неподвижные полости. Аппараты на воздушной подушке . . . . . | 20 |
| § 10. Неустановившиеся течения . . . . .                                                                           | 21 |
| § 11. Пространственные течения . . . . .                                                                           | 23 |
| § 12. Установившиеся струйные течения тяжелой жидкости. Капиллярные силы . . . . .                                 | 25 |
| § 13. Удар тела о поверхность несжимаемой жидкости . . . . .                                                       | 29 |
| § 14. Газовые струи . . . . .                                                                                      | 33 |

## § 1. Предварительные замечания

Теория струй идеальной жидкости посвящена изучению течений, ограниченных частично твердыми стенками и частично свободными поверхностями, на которых давление  $p$  постоянно.

К 1917 г. теория струй насчитывала почти пятьдесят лет своего существования. Она была создана трудами крупнейших гидродинамиков — в первую очередь Г. Гельмгольца, Г. Кирхгофа, Дж. В. Стретта (лорда Рейли), Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, Т. Леви-Чивиты, А. Вилля и др.

Теория струй содержала красивые математические решения широкого класса гидродинамических задач, однако считалось (например, В. Томсоном, Г. Ламбом), что единственно реальными приложениями теории струй являются решения задач об истечениях жидкости из сосудов. В подтверждение такого рода возражений против теории приводились некоторые экспериментальные данные, показывающие несовпадение теоретических расчетов с опытами.

Основную причину несовпадения результатов теории струй с опытами видели в неустойчивости свободных поверхностей, приводящей к запол-

нению образующихся за телами зон «мертвой воды» вихрями. Только в тридцатых и сороковых годах, в значительной мере благодаря работам советских ученых по глиссированию и кавитации, было установлено, что свободные поверхности *практически* устойчивы и теория струй дает хорошие результаты в том случае, когда отношение плотности неподвижной среды за телом  $\rho'$  к плотности обтекающей тело жидкости  $\rho$  мало \*) (число  $\rho'/\rho$  в упомянутых целях было введено А. Бетцем и Э. Петерсоном в 1931 г.). Впрочем, одновременно выяснилось, что существуют и случаи, когда  $\rho'/\rho$  не мало, а теория струй все же сообщает ценную информацию (см., например, § 3 и 4).

В классической теории струй рассматриваются плоские, установившиеся течения невесомой, несжимаемой жидкости. Задачи решаются в параметрической форме. Комплексный потенциал  $w = \varphi + i\psi$  и комплексная скорость  $dw/dz$  ( $z = x + iy$  — комплексное переменное области течения) или ее логарифм (функция Жуковского) ищутся в функции параметрического комплексного переменного (назовем это переменное  $u$ ), которое изменяется в некоторой простой канонической области (например, полукруг, полуплоскость, прямоугольник, кольцо и т. п.). Зная  $w$  и  $dw/dz$  в функции от  $u$ , можно рассчитать все силовые, кинематические и геометрические характеристики течения.

Так как границы области течения состоят из линий тока  $\text{Im } w = \psi = \text{const}$ , то функция  $w(u)$  обычно находится легко.

Условие постоянства давления, согласно интегралу Бернулли, равносильно условию постоянства модуля скорости. Отсюда нетрудно заключить, что если обтекаемое препятствие или стенки сосуда состоят из прямолинейных отрезков, то на частях границы области течения попеременно постоянны действительная или мнимая части функции Жуковского и последняя тоже может быть в явном виде найдена с помощью известных методов теории функций комплексного переменного.

В случае, если обтекаемое препятствие представляет собой криволинейную дугу заданной формы, нахождение функции Жуковского оказывается значительно более сложной задачей. А. Вилля свел ее (в 1911 г.) к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Однако до начала двадцатых годов методы решения уравнения Вилля разработаны не были.

В период, предшествующий обозреваемому, были сделаны некоторые шаги по снятию ограничений классической теории струй.

В отношении учета влияния на течение сил тяжести и поверхностного натяжения к 1917 г. было известно всего несколько точных решений (Н. Е. Жуковский, Н. В. Берви) случайных частных задач, таких, например, как течение тяжелой жидкости по дну непростой формы, волна с бесконечной прямолинейной границей, подтекающая под бесконечную наклонную стенку, или обтекание невесомой жидкостью газового пузыря с учетом сил поверхностного натяжения. По пространственным струйным течениям было известно принадлежащее Э. Трефтцу приближенное решение всего одной задачи об истечении осесимметричной струи из круглого отверстия в плоскости.

\*) Во избежание недоразумений нужно отметить, что здесь речь идет не об устойчивости в обычном смысле слова, состоящей в том, что любые малые возмущения свободных поверхностей при  $\rho'/\rho \approx 0$  должны затухать. Немногочисленные теоретические исследования пока что не подтвердили существования такого рода устойчивости. Речь идет только о том, что обе жидкости при  $\rho'/\rho \approx 0$  практически не смешиваются и мертвая зона вихрями не заполняется.

Решений задач о неустановившихся струйных течениях вовсе не существовало.

Вопрос о струйных течениях газа, выходящий за рамки настоящего обзора, посвященного в основном несжимаемой жидкости, освещен в § 11. Заметим здесь только, что основополагающая работа С. А. Чаплыгина «О газовых струях» была опубликована в 1902 г.

## § 2. Обтекание криволинейных препятствий с отрывом струй. Существование и единственность решений

Первую задачу об обтекании с отрывом струй криволинейной дуги заданной формы — задачу об обтекании неограниченным потоком идеальной, невесомой, несжимаемой жидкости дуги окружности произвольного радиуса  $R$  (рис. 1) — решил А. И. Некрасов (1922). Он свел нахождение функции Жуковского к решению следующего интегрального уравнения, заменяющего интегро-дифференциальное уравнение Вилля:

$$h(\theta) = -\frac{\lambda}{4} \int_0^{\pi/2} e^{-h(\varepsilon)} (1 + 2 \sin \varepsilon - \cos 2\varepsilon) \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon - \theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon + \theta}{2}} \right| d\varepsilon. \quad (2.1)$$

Здесь  $h(\theta)$  — некоторая вспомогательная функция, зная которую, можно эффективно найти функцию Жуковского, причем  $\theta$  — аргумент параметрического переменного  $u$  в точках полуокружности, на которую отображается обтекаемая дуга (вся область течения отображается на верхний полукруг единичного радиуса, см. рис. 1 и 2). В уравнение (2.1) входит

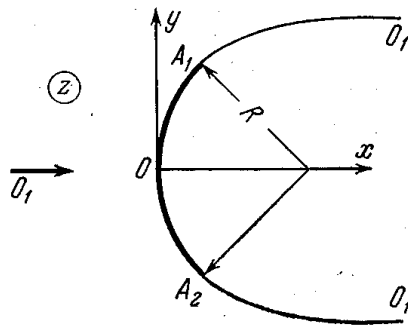


Рис. 1.

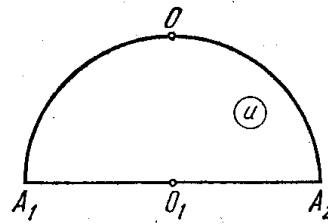


Рис. 2.

еще постоянный параметр  $\lambda$ , пропорциональный центральному углу дуги. При  $\lambda = 0$  дуга превращается в плоскую пластинку, функция  $h(\theta)$  обращается в нуль и функция Жуковского приобретает элементарный вид. Некрасов доказал, что при достаточно малых  $\lambda$  уравнение (2.1) может быть решено методом последовательных приближений, причем решение его единственно. Для первого приближения Некрасов подробно рассчитал все характеристики течения.

В дальнейшем, под влиянием А. И. Некрасова, появился ряд работ, посвященных продолжению и обобщению его исследования (Н. С. Аржанников, Я. И. Секерж-Зенькович, Н. А. Слезкин, П. В. Мясников, С. В. Калинин). В этих работах были решены задачи об обтекании дуг второго порядка, серии дуг кривых Рибокура и дуг с малой кривизной, удовлетворяющей условиям Коши — Липшица. Особо следует отметить, что для дуг, кривизна которых мала и является аналитической функцией,

Я. И. Секерж-Зенькович (1937) доказал существование и единственность решения основного интегро-дифференциального уравнения задачи путем разложения решения в ряд по параметру, что оказалось несколько более эффективным, чем метод последовательных приближений.

Отмеченные результаты были обобщены и в другом направлении: Л. И. Седов (1938) вывел основную систему интегро-дифференциальных уравнений для случая произвольного числа криволинейных дуг.

Дальнейший важный шаг в исследовании струйных обтеканий криволинейных препятствий был сделан Ж. Лере, привлечшим к исследованию вопроса функциональный анализ. В дальнейшем группа французских

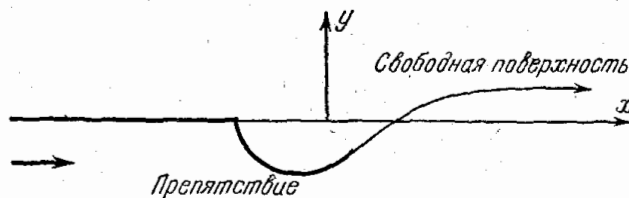


Рис. 3.

ученых, учеников Лере, провела много интересных и трудных исследований вопросов существования и единственности решений задач теории струй. В настоящее время методы функционального анализа широко проникли и в работы советских ученых, исследующих раз-

личные схемы струйных течений. Этими вопросами занимаются в первую очередь казанские и сибирские ученые (П. П. Куфарев, 1952; А. В. Кузнецов, 1957—1959; В. А. Штанько, 1962—1966; В. Н. Монахов, 1964).

Основанием другому оригинальному направлению исследования вопросов существования и единственности решений задач теории струй послужила работа М. А. Лаврентьева о некоторых свойствах однолистных функций (1938) (см. также его работы за тот же год в «Докладах» Академии наук СССР), основанная на развитых им вариационных принципах (1934). Лаврентьевым были изучены функции, реализующие конформное отображение полуплоскости на области с одной бесконечно удаленной граничной точкой, и далее были даны приложения математических результатов к теории струй. Были доказаны существование и единственность решения струйной задачи об обтекании неограниченным потоком дужки, симметричной относительно оси  $x$ . При этом рассматривалась только одна половина течения. В качестве естественного обобщения исследовалась задача о срыве струи с препятствием для полуплоскости (рис. 3). Эта задача отличается от задачи о симметричном обтекании дужки только тем, что на струи не накладывается более условие, запрещающее им проникать в верхнюю полуплоскость. Кроме того, в задаче о симметричном обтекании рассматривается случай, когда струи соединяются на конечном расстоянии за дужкой. Относительно дужки требуется, чтобы она состояла из конечного числа дужек ограниченной кривизны, и предполагается, что любая прямая, перпендикулярная к оси абсцисс, пересекает обтекаемую дужку не более чем в двух точках или по вертикальному отрезку.

С помощью вариационных принципов М. А. Лаврентьевым был получен и ряд новых качественных результатов. Вариационные методы Лаврентьева были использованы в ряде зарубежных исследований по теории струй.

Казанскими гидромеханиками была поставлена так называемая обратная задача теории струй: скорость  $v$  на дуге задана в виде известной функции от дуговой абсциссы  $s$ , требуется найти струйное обтекание дуги и форму последней. Обратным задачам гидромеханики и, в частности, теории струй посвящены обстоятельная монография Г. Г. Тумашева

и М. Т. Нужи́на и четыре выпуска трудов специального семинара в Казанском университете (1964—1967). Отдельные обратные задачи теории струй решены в работах Г. Н. Пыхте́ева (1955—1956).

Работы С. А. Чаплы́гина (1935), Я. Р. Бермана (1949), И. М. Раппопорта (1950), Г. Н. Пыхте́ева (1956), Л. И. Мальцева (1964—1966) также посвящены струйному обтеканию криволинейных препятствий неограниченным потоком или в канале. Основной целью авторов этих работ было развитие методов расчета сил и геометрических характеристик течения. В частности, Чаплыгин (1935) указывает на красивый результат, полученный им еще в 1910 г. При струйном обтекании препятствия по схеме Кирхгофа при наличии конечного сопротивления поверхности струй асимптотически приближаются к параболе, причем сопротивление обтекаемого препятствия  $X$  очень просто выражается через параметр асимптотической параболы:

$$X = \frac{\pi \rho v_\infty^2}{2} p, \quad (2.2)$$

где  $v_\infty$  — скорость набегающего потока в бесконечности.

В курсе теории крыла В. В. Голубева (1949) исследована картина течения в бесконечности при струйном обтекании препятствия.

### § 3. Задачи обтекания препятствий, связанные с произволом выбора точек схода свободных поверхностей

С математической точки зрения задача об обтекании контура с отрывом струй неоднозначна даже в случае простейшей схемы течения. На рис. 4 в качестве примера изображены различные возможные картины обтекания с отрывом струй круглого цилиндра.

Прежде всего, как показал еще С. А. Чаплыгин в 1899 г., любую критическую точку (например, точку  $O$  на рис. 4) можно заменить зоной постоянного давления. Постоянную скорость на границе этой зоны, а следовательно, и размеры зоны, можно в некоторых пределах задавать произвольно.

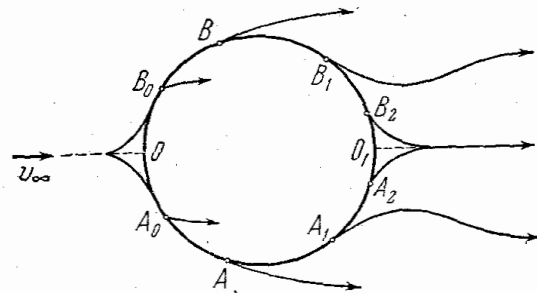


Рис. 4.

Предположим теперь, что точка  $O$  является обычной критической точкой. Произвол картины обтекания этим еще не исчерпывается. На контуре обтекаемой окружности можно выбрать две (даже несимметричные) точки  $A$  и  $B$  и предположить, что поверхности струй отделяются от контура именно в этих точках. Со времени известной работы М. Бриллюена (1911) различают задачу об обтекании *контура*, когда сошедшие с концов дуги струи не пересекают контура (на рис. 4 дуги  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ), от задачи об обтекании *дуги* контура, когда струи, сошедшие с концов дуги, пересекают контур (дуга  $A_0B_0$  на рис. 4) и его за дугой пристроить нельзя. Очевидно, что ставить вопрос о единственности или неединственности решения имеет смысл только после того, как заданы либо точки отрыва, либо какие-то условия, определяющие их. Сам Бриллюен на основе физических соображений выдвинул требование, чтобы скорость внутри жидкости и на обтекаемой дуге была всюду меньше постоянной скорости на

свободной поверхности \*). В задаче об обтекании контура окружности этому условию на рис. 4 соответствует единственная дуга  $AB$ .

В тридцатых годах была опубликована группа работ (С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева, Я. И. Секерж-Зеньковича, В. М. Абрамова, Н. И. Ахизера, И. М. Беленького и И. Е. Зеленского), посвященных обтеканию пластинок и решеток из пластинок при различных положениях точек отрыва струй. Несмотря на то, что при обтекании препятствий воздухом течение в следе за ним существенно отличается от того, которое предполагается в теории струй ( $\rho'/\rho = 1$  — см. § 1), в работах С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева и Я. И. Секерж-Зеньковича имеются интересные приложения к задаче о расчете сил, действующих на плоское крыло в воздухе.

Сведения о некоторых других работах по различным приложениям схем с отрывом струй в произвольных точках можно найти в книге М. И. Гуревича (1961).

#### § 4. Нелинейные теории глиссирования и подводного крыла

Физические вопросы глиссирования и движения подводного крыла рассматриваются в этом томе в статье Г. В. Логвиновича и Л. А. Эпштейна (стр. 50—54), а линеаризованным теориям глиссирования и подводного крыла посвящены следующие два параграфа настоящего обзора. Здесь будут рассмотрены только приложения теории струй невесомой жидкости к исследованию указанных вопросов.

Глиссированием называется такое движение тела по поверхности воды, при котором основной поддерживающей силой является гидродинамическая сила реакции отбрасываемой вниз воды. Принцип глиссирования используется при движении высокоскоростных судов сравнительно малого тоннажа и при взлете и посадке гидросамолетов.

Смоченная часть днища глиссирующего судна при движении представляет собой слабоискривленную поверхность, наклоненную к горизонту под малым углом  $\alpha$ . Глиссирующая поверхность отбрасывает вперед и частично в стороны струи жидкости. Вязкость существенна в тонком пограничном слое и сказывается только на сопротивлении. Первой задачей теории глиссирования было определение величины и точки приложения нормальной к плоской пластинке силы при большой скорости движения, когда силой тяжести можно пренебречь (в последнем случае не обязательно предполагать, что  $\alpha$  мало). Задача о глиссирующей поверхности является классическим примером случая, когда плотность  $\rho'$  среды в зоне «мертвой воды» (воздух) много меньше плотности  $\rho$  в основном течении жидкости (вода). Обе среды не смешиваются, граничные условия на свободных поверхностях выполняются, и результаты, полученные с помощью теории струй, оказываются корректными.

Близкие группы задач были почти одновременно рассмотрены за рубежом Г. Вагнером и А. Э. Грином и, по идее Л. А. Люстерника и С. А. Чаплыгина, группой советских ученых.

На рис. 5 изображена схема обтекания глиссирующей пластинки бесконечно глубоким потоком невесомой жидкости. За смоченную длину условно принимается отрезок  $AB$  (прямая  $CB$  касается свободной поверх-

\*) Этому условию можно придать несколько эквивалентных форм (например, свободная поверхность должна быть всегда выпукла в сторону текущей жидкости). В § 5, посвященном кавитации, мы еще вернемся к условию Бриллюэна.

ности). Задача плоская, что соответствует пластинке бесконечной ширины. М. И. Гуревичем и А. Р. Янпольским (1933), М. И. Гуревичем (1935) и Н. К. Калинин (1938) были найдены равнодействующая нормального гидродинамического давления на пластинку и точка ее приложения при любом угле атаки.

В работах М. И. Гуревича и А. Р. Янпольского (1933) и Ю. С. Чаплыгина (1941) рассмотрена задача о глиссировании пластинки по поверхности жидкости конечной глубины. Фактически в этих работах была рассмотрена схема несколько более общая, чем схема рис. 5 (см. рис. 6).

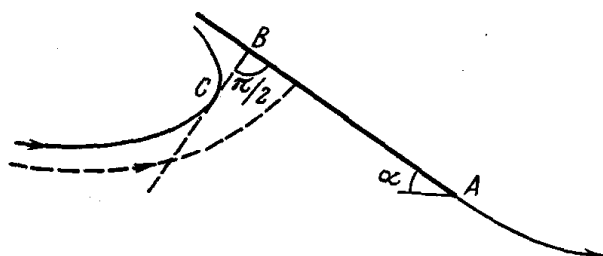


Рис. 5.

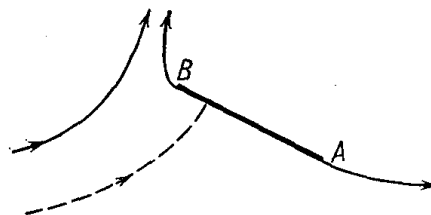


Рис. 6.

В соответствии со схемой рис. 6 длина пластинки задается совершенно произвольно. Схему эту можно рассматривать как модель обтекания подводного крыла при нулевом числе кавитации (см. § 5). Е. А. Федоров (1967) исследовал по этой схеме движение под свободной поверхностью произвольного полигонального контура.

М. И. Гуревич (1935) дал общее решение задачи о двух глиссирующих пластинках «тандем».

Интересная схема подводного крыла (рис. 7) была рассмотрена Л. А. Эпштейном, Г. П. Черепановым и А. В. Кузнецовым (1963) и Т. Г. Спиридоновой (1964). Задача о крыле, расположенном в струе конечной толщины, решена А. В. Галаниным (1967). М. И. Гуревичем (1963, 1965) показано, что если приближенно заменить крыло точечным вихрем с циркуляцией  $\Gamma$ , то крыло без полного нарушения картины обтекания не может подойти к свободной поверхности ближе, чем на расстояние  $h_{\min} = \Gamma / (2\pi v_\infty)$ , где  $v_\infty$  — скорость потока в бесконечности.



Рис. 7.

## § 5. Линеаризованная теория глиссирования

В линеаризованной теории глиссирования все граничные условия сносятся на плоскость, совпадающую с невозмущенным уровнем жидкости. Наиболее существенные погрешности решения возникают при этом в малых областях у передних кромок глиссирующих поверхностей, где в действительности имеются тонкие брызговые струи. В линеаризованной теории последним соответствуют бесконечные скорости.

Согласно линеаризованной теории в области течения (нижнее полупространство) существует потенциал скоростей  $\phi$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа. На глиссирующей поверхности известна нормальная или, что эквивалентно, вертикальная скорость. В случае больших чисел Фруда, когда силой веса можно пренебречь, на горизонтальной поверхности перед глиссером  $\phi = 0$ . За глиссером равна нулю частная производная потенциала скорости по времени  $\partial\phi/\partial t$ . Если в случае установившегося движения продолжить течение в верхнее полупространство, то окажется, что течение во всем пространстве представляет собой течение вокруг тонкого крыла. При этом подъемная сила глиссирующей поверхности равна половине подъемной силы тонкого крыла, а точки приложения этих сил совпадают. Поправка на конечный размах, вводимая в теории тонкого крыла, полностью переносится и на подъемную силу глиссирующей поверхности (Л. И. Седов, 1937). Вообще всякое решение задачи

об установившемся обтекании тонкого крыла является одновременно решением задачи о глissирующей поверхности. Например, известная работа Н. Е. Кочина (1940) о крыле круговой формы в плане одновременно решает задачу и о круглой глissирующей пластинке.

В случае неустановившегося движения положение осложняется. Крыло самолета имеет постоянную длину, а смоченная поверхность глissера при неустановившемся движении меняется. Однако методы решения обеих задач и общий вид этих решений и в случае неустановившегося движения остаются близкими.

Поэтому, говоря о неустановившемся глissировании, следует отметить работы о неустановившемся движении крыла М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (1935)

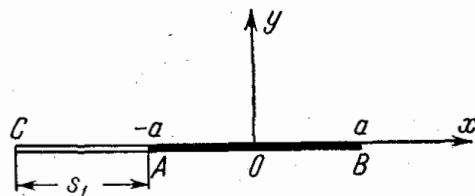


Рис. 8.

и Л. И. Седова (1935), а также немецкие работы В. Бирнбаума и Г. Вагнера, которые оказали несомненное влияние на развитие теории неустановившегося глissирования. Подробное изложение вопроса и библиографию можно найти в монографии Л. И. Седова (1950 и 1966). Задача о колебаниях глissирующей поверхности с переменной смоченной длиной была подробно исследована Л. И. Седовым (1935, 1936).

Линеаризованная плоская задача о движении глissирующей поверхности после продолжения течения в верхнюю полуплоскость сводится к следующей. Вдоль действительной оси плоскости  $z$  имеется разрез от  $z = -a - s_1$  до  $z = a$  (рис. 8). Требуется найти комплексный потенциал течения  $w(z)$  всюду вне разреза  $CB$ . Вдоль части разреза  $AB$  от  $-a$  до  $a$ , соответствующей крылу (глissирующей поверхности), известна нормальная скорость  $v_n \approx v_y$ . Если обозначить через  $u_2$  и  $u_1$  горизонтальные составляющие скорости на верхнем и нижнем берегах разреза соответственно, то  $u_2(s) = u_1(s)$ , где  $s$  — расстояние от точки  $C$ , в которой задняя кромка глissирующей поверхности (крыла) находилась в начальный момент движения. Если вдоль части разреза  $CA$  (вихревой след за крылом) известна горизонтальная скорость  $u_2(x)$ , то решение задачи имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \left[ \int_{-a}^a \frac{v_n(\xi, t) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}}{\xi-z} d\xi + \int_0^{s_1} \frac{u_2(s)}{\xi-z} \sqrt{\frac{\xi-a}{\xi+a}} ds \right], \quad (5.1)$$

где  $\xi = s - s_1 - a$ . Различие между крылом и глissирующей поверхностью состоит только в том, что для крыла  $a = \text{const}$ , а для глissирующей поверхности величина  $a$ , равная половине длины смоченной поверхности, зависит от времени. Скорость  $u_2(s)$  находится из решения интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода, получающегося из условия постоянства циркуляции вокруг разреза  $CB$ . В случае глissирующей поверхности вводятся дополнительные гипотезы о длине ее смоченной поверхности (см. Л. И. Седов, 1936; в этой работе, помимо задачи о колебаниях глissирующей пластинки, решена задача о посадке на воду наклонной пластинки — редана).

Новое исследование задачи о глissировании и движении профиля со сбегающими вихрями дано в недавно опубликованной статье В. А. Ерошина (1967).

Задача о движении нескольких глissирующих поверхностей, идущих одна за другой («тандем»), решена Л. И. Седовым (1937). Тогда же им дано решение задачи о движении глissирующих поверхностей и крыльев при наличии в жидкости особенностей (вихрей, источников, мультиполей). Соответствующая задача о колебаниях крыльев «тандем» была решена М. Д. Хаскиндом (1958).

Математический аппарат, развитый для решения линеаризованной задачи о глissировании, имеет широкое применение при решении плоских задач гидро- и аэродинамики. Речь идет об эффективном решении смешанной задачи для различных областей, когда на частях границы заданы попеременно действительная и мнимая части функции комплексного переменного. Для полуплоскости это решение дается формулой Келдыша — Седова (1937). К решению задачи для полуплоскости можно, с помощью конформного отображения, свести решение смешанной краевой задачи для любой односвязной области. Для непосредственного решения имеются эффективные формулы в случаях полосы, полуполосы и в двусвязной области для кольца (см. монографию Л. И. Седова, 1950 и 1966). Имеются обобщения этих формул и для случаев периодических (Л. И. Седов, 1938) и двоякопериодических решеток (Л. И. Седов, 1950 и 1966).

Возвращаясь к теории глissирования, нужно в первую очередь указать, что линеаризация граничных условий позволила решить плоскую задачу о глissировании

по поверхности тяжелой жидкости. В случае тяжелой жидкости линеаризованное граничное условие на свободной поверхности имеет вид

$$\operatorname{Re} \left( \frac{dw}{dz} + i v w \right) = 0, \quad (5.2)$$

где  $w$  — комплексный потенциал абсолютного движения жидкости,  $v = ga/v_0^2$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $a$  — половина длины глассирующей поверхности и  $v_0$  — скорость ее движения. Граничное условие в виде (5.2) было получено М. В. Келдышем (1935), которому принадлежит и введение самой функции

$$f(z) = \frac{dw}{dz} + i v w. \quad (5.3)$$

Линеаризованная задача о глассировании по поверхности тяжелой жидкости была впервые правильно поставлена и решена Л. И. Седовым (1937). Им дан метод решения плоской задачи о глассировании для любых чисел Фруда. Для больших значений числа Фруда получены асимптотические формулы для формы свободной поверхности и для гидродинамических сил, причем показано, что для больших чисел Фруда влияние весомости жидкости несущественно. Особенностью решения задач с тяжелой жидкостью является то обстоятельство, что в соответствии с граничным условием (5.2) в верхнюю полуплоскость можно путем зеркального отображения продолжить функцию Келдыша  $f(z)$ . Комплексный потенциал  $w(z)$  продолжается в верхнюю полуплоскость более сложным путем, и поэтому задача о глассировании по поверхности тяжелой жидкости больше не сводится к задаче о крыле. Числовые расчеты по методу Л. И. Седова были выполнены Ю. С. Чаплыгиным (1940). Методом Л. И. Седова был решен также частный пример о глассировании дужки круга (М. И. Гуревич, 1937). В дальнейшем задача о глассировании по поверхности тяжелой жидкости была решена методом Фурье Л. Н. Сретенским (1940) \*) и методом решения интегрального уравнения путем разложения решения по малому параметру Н. Е. Кочкиным (1938). Задачу о глассировании по поверхности тяжелой жидкости конечной глубины рассмотрел М. Д. Хаскинд (1943).

Близким по методу к группе работ по глассированию является исследование М. Д. Хаскинда (1942) о колебаниях пластинки на поверхности тяжелой жидкости. Однако его нельзя непосредственно рассматривать как работу о глассирующей пластинке, так как горизонтальная скорость пластинки предполагается малой, а смоченная длина при колебаниях постоянной. В последующей работе М. Д. Хаскинда (1955) скорость уже не является малой, но смоченная длина при колебаниях продолжает считаться постоянной.

Линеаризованная задача о стационарном глассировании несущей поверхности произвольной формы по поверхности тяжелой жидкости была рассмотрена А. Н. Панченковым (1965).

В случае узких глассирующих поверхностей линеаризация перестает быть законной и приходится учитывать величины второго порядка по малому углу атаки. Картина течения в первом приближении имеет следующий вид. У передней кромки происходит «удар» о воду. На всей остальной части пластинки обтекание складывается из продольного невозмущенного течения и чисто поперечного возмущенного течения. Задача эта была рассмотрена в Германии Г. Вагнером и в СССР Г. Е. Павленко (1932), а затем заново проанализирована М. И. Гуревичем (1940).

В заключение параграфа следует отметить, что хотя в последние годы появление новых работ по теории глассирования стало редкостью, но не все вопросы теории глассирования можно считать изученными. Прежде всего это относится к определению смоченной длины, особенно при неустановившемся глассировании. Нельзя считать достаточно исследованным и глассирование произвольной поверхности конечного размаха для случая тяжелой жидкости.

## § 6. Линеаризованная теория движения тел под поверхностью жидкости

Первая теоретическая попытка изучения волнового сопротивления тел, движущихся под поверхностью жидкости, принадлежит Г. Ламбу, рассмотревшему задачи о движении под водой круглого цилиндра и шара путем замены их диполями.

Основы линеаризованной теории подводного крыла были заложены в работах М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (1937) и Н. Е. Кочина (1937).

\*) Без учета брызговых струй задача рассматривалась Л. Н. Сретенским в 1933 г.

Келдыш и Лаврентьев рассмотрели плоскую задачу о подводном крыле для случая потока тяжелой жидкости неограниченной глубины, взяв граничное условие на свободной поверхности в линеаризованном виде (5.2). Граничное условие на крыле как всегда состояло в том, что на поверхности крыла нормальная скорость жидкости равна известной нормальной скорости соответствующего элемента поверхности. Ввиду линейности решение краевой задачи получалось путем суперпозиции комплексных потенциалов вихрей и источников.

Задача об обтекании вихря под свободной поверхностью тяжелой жидкости была решена Л. Н. Сретенским в 1933 г. и опубликована им в 1936 г. Однако М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев воспользовались принадлежащими Келдышу (1935) более простыми решениями задач о движущихся под поверхностью воды особенностях. Ими было получено основное интегральное уравнение для тонкого крыла, решение которого отыскивалось путем разложения в ряд по малому параметру  $2a/h$ , где  $2a$  — длина хорды крыла, а  $h$  — его погружение. Были получены также общие формулы для сил, действующих на крыло, и решены частные задачи о плоской пластинке, дужке круга и вытянутом эллипсе.

Метод Келдыша — Лаврентьева был применен А. И. Тихоновым для решения задачи о подводном крыле, движущемся в жидкости конечной глубины (1940).

В фундаментальной работе Н. Е. Кочина (1937) были изучены как плоская, так и пространственная задачи о движении подводных тел. Силы, действующие на тело, Н. Е. Кочин выразил через вспомогательные функции  $H$ . В плоском случае

$$H(\lambda) = \int_{C_1} e^{-i\lambda z} \frac{dw}{dz} dz, \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  — переменный параметр,  $C_1$  — контур, окружающий крыло, и  $dw/dz$  — комплексная скорость течения. При определении  $dw/dz$ , помимо удовлетворения граничных условий, требуется удовлетворить и условию конечности скорости на задней кромке крыла. Это последнее требование привело Кочина к сложному уравнению для определения циркуляции вокруг крыла.

В пространственном случае  $H$  является функцией двух параметров и выражается через интеграл по поверхности, окружающей подводное тело. Подынтегральная функция является известной функцией потенциала скоростей течения  $\phi$  и его нормальной производной.

Определение  $dw/dz$  в плоском и  $\phi$  в пространственном случае производится с помощью решения интегрального уравнения. Хорошее первое приближение в плоском и пространственном случаях получается, если при определении  $H$  взять потенциал скоростей обтекания того же тела неограниченным потоком.

Кочинным были рассмотрены примеры плоской пластинки при произвольном угле атаки, сферы и эллипсоида.

Идеи Н. Е. Кочина были использованы М. Д. Хаскиндом (1945) для решения задачи о движении тела под поверхностью жидкости конечной глубины как для плоского, так и для пространственного случая. Выразив силы, действующие на подводное тело, через функции  $H$ , Хаскинд решил в качестве примеров в первом приближении Кочина задачи о круглом и эллиптическом цилиндре и о сфере. В 1956 г. Хаскинд рассмотрел подводное крыло конечного размаха в виде несущей линии, изогнутой в плоскости, перпендикулярной к набегающему потоку.

За последние годы суда на подводных крыльях получили широкое распространение как у нас, так и за границей. Естественно, что это обстоятельство вызвало новый интерес и к теории подводных крыльев. Теорией подводного крыла в течение последних десяти лет в СССР занимаются главным образом киевские и ленинградские гидромеханики.

По установившемуся движению подводного крыла можно отметить работы Г. А. Гошева (1962), Н. В. Курдюмовой (1961, 1962), А. Н. Панченкова (1961—1965), А. И. Юхименко (1965) и М. И. Френкеля (1960).

Здесь следует подчеркнуть, что наиболее практически и теоретически интересной задачей является задача о движении подводного крыла вблизи свободной поверхности. Задачу эту сейчас еще нельзя считать окончательно разрешенной, и главная трудность, стоящая перед исследователями, очевидна: при приближении крыла к свободной поверхности линеаризация последней делается все более и более неточной и решение краевой задачи приходится проводить для области, форма которой заранее неизвестна.

Исследованию неустановившегося движения подводного крыла должно предшествовать изучение движения под поверхностью воды источника переменной интенсивности. Решение задачи о движении подводного пульсирующего источника было получено Л. Н. Сретенским (1949) и М. Д. Хаскиндом (1947).