

Н.А. Шапошников

Учебник алгебры

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.А. Шапошников**
Учебник алгебры: Часть 2 / Н.А. Шапошников – М.: Книга по Требованию, 2022. – 183 с.

ISBN 978-5-458-27779-2

Для курсов старших классов гимназий и училищ.

ISBN 978-5-458-27779-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Ирраціональныя числа. Дѣйствія съ ними.

§ 1. Раздѣленіе чиселъ. Числа раздѣляются по свойству ихъ абсолютныхъ вѣличій на соизмѣримыя и несоизмѣримыя.

Соизмѣримыми числами называются тѣ, которыя можно точно выразить или въ цѣлыхъ единицахъ, или въ доляхъ единицы.

Соизмѣримыя числа могутъ быть цѣлыя или дробныя.

Несоизмѣримыми числами называются тѣ, которыя не могутъ быть точно выражены ни въ единицахъ, ни въ какихъ доляхъ единицы.

Понятіе о простѣйшихъ несоизмѣримыхъ числахъ получается при разсматриваніи дѣйствія извлеченія корня.

Тѣ несоизмѣримыя числа, которыя получаются при извлеченіи корня, имѣютъ еще особое названіе ирраціональныхъ чиселъ.

§ 2. Полученіе ирраціональныхъ чиселъ. Теорема 1. Корень изъ цѣлаго числа, не представляющаго полную соответствующую показателю корня степень, есть число ирраціональное.

Положимъ, что A есть цѣлое число, не представляющее полной n -й степени. Значитъ, $\sqrt[n]{A}$ не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ.

Допустимъ, что $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{b}$, гдѣ $\frac{a}{b}$ есть несократимая дробь. Тогда, по опредѣленію корня и по правилу возведенія дробей въ степень, получимъ $A = \frac{a^n}{b^n}$.

Это равенство невозможно, потому что первая часть его есть цѣлое число, а вторая—несократимая дробь. Значитъ, допущеніе наше неправильно.

Если же разсматриваемый корень не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ, то онъ есть число несоизмѣримое—ирраціональное.

Таковы, напр., числа $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[5]{11}$.

Теорема 2. Корень изъ несократимой дроби, которой числитель или знаменатель, или оба вмѣстѣ не представляютъ полныхъ соответствующихъ показателю корня степеней, есть число ирраціональное.

Положимъ, что $\frac{A}{B}$ есть несократимая дробь, въ которой хотя одинъ изъ членовъ не представляетъ полной n -й степени. Очевидно, что $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ, потому что n -я степень всякаго цѣлаго числа есть число цѣлое.

Допустимъ, что $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{c}{d}$, гдѣ $\frac{c}{d}$ есть несократимая дробь. Тогда, по опредѣленію корня и по правилу возведенія дробей въ степень, получимъ $\frac{A}{B} = \frac{c^n}{d^n}$.

Это равенство невозможно, потому что обѣ части его суть несократимыя дроби, которыя могутъ быть равны только въполнѣ тождественно, т.-е. такъ, что $A=c^n$ и $B=d^n$, а послѣднія равенства противорѣчатъ условію, что или A , или B , или оба вмѣстѣ не суть полныя n -я степени.

Если же разсматриваемый корень не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ, то онъ есть число несоизмѣримое—ирраціональное.

Таковы, напр., числа $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{11}}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{16}}$, $\sqrt[5]{\frac{36}{12}}$.

§ 3. Вычисленіе ирраціональныхъ чиселъ. Хотя ирраціональныя числа суть числа несоизмѣримыя, т.-е. они не могутъ быть выражены въполнѣ точно ни въ единицахъ, ни въ какихъ-либо доляхъ единицы, однако всякое ирраціональное число можно вычислить съ какою угодно степенью точности.

Вычислить несоизмѣримое число съ точностью до $\frac{1}{k}$ значитъ подыскать такое соизмѣримое число, которое отличается отъ даннаго несоизмѣримаго меньше, чѣмъ на $\frac{1}{k}$.

Вычисленіе корней изъ цѣлыхъ чиселъ. Возьмемъ $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A есть цѣлое число, не представляющее полной n -й степени, и положимъ, что истинное значеніе этого корня есть неизвѣстное число X , ирраціональное. Выбравъ произвольно какое-нибудь цѣлое число k , допустимъ, что наше неизвѣстное можно представить въ формѣ $X = \frac{k^n \sqrt[n]{A}}{k}$ и затѣмъ въ формѣ $X = \frac{\sqrt[n]{A k^n}}{k}$, что согласуется съ теоремами о сокращеніи дроби и объ извлеченіи корня изъ произведенія.

Разсматривая отдѣльно числителя полученнаго дробнаго выраженія, замѣтимъ, что его можно вычислить съ точностью

до единицы. Для этого возводимъ числа $k, k+1, k+2, \dots$ одно за другимъ въ степень n до тѣхъ поръ, пока не получимъ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, положимъ a и $a+1$, такихъ, что $a^n < Ak^n$, но $(a+1)^n > Ak^n$.

Тогда придется принять, что $a < \sqrt[n]{Ak^n} < a+1$, а вслѣдствіе этого также $\frac{a}{k} < X < \frac{a+1}{k}$. Но, такъ какъ въ предыдущихъ неравенствахъ разность между наибольшимъ числомъ и наименьшимъ есть $\frac{1}{k}$, то на основаніи этихъ неравенствъ каждое изъ чиселъ $\frac{a}{k}$ и $\frac{a+1}{k}$ отличается отъ неизвѣстнаго X меньше, чѣмъ на $\frac{1}{k}$, при чемъ $\frac{a}{k}$ есть меньшее приближеніе, а $\frac{a+1}{k}$ — большее.

Примѣръ. Чтобы вычислить $\sqrt[5]{3}$ съ точностью до $\frac{1}{5}$, извлечемъ съ точностью до единицы корень $\sqrt[5]{3.5^5}$ или $\sqrt[5]{9375}$. При этомъ найдемъ, что $6^5 = 7776$, а $7^5 = 16807$, откуда видно, что $\sqrt[5]{3}$ заключается между $\frac{6}{5}$ и $\frac{7}{5}$.

Вычисленіе корней изъ дробей. Вычисленіе корня изъ дроби сводится на объясненное сейчасъ извлеченіе изъ цѣлаго числа. Возьмемъ $X = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, гдѣ $\frac{A}{B}$ есть несократимая дробь, въ которой хотя одинъ изъ членовъ не представляетъ полной n -й степени.

Можно всегда найти такого множителя для обоихъ членовъ дроби, который обратитъ знаменателя въ полную n -ю степень. Въ самомъ невыгодномъ случаѣ такой множитель будетъ B^{n-1} .

Допустимъ, что $X = \sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B^n}}$, а затѣмъ, что $X = \sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B}}$, что согласно съ теоремами о сокращеніи дроби и объ извлеченіи корня изъ дроби. Этимъ мы приведемъ вопросъ къ извлеченію корня $\sqrt[n]{AB^{n-1}}$ изъ цѣлаго числа.

По предыдущему, каковъ бы ни былъ такой корень и каково бы ни было цѣлое число k , можно найти такія цѣлыя числа a и $a+1$, что какъ $\frac{a}{k}$, такъ и $\frac{a+1}{k}$ отличаются отъ рассматриваемаго корня меньше, чѣмъ на $\frac{1}{k}$, и при этомъ первая дробь меньше корня, а вторая больше.

Но изъ неравенствъ $\frac{a}{k} < \sqrt[n]{AB^{n-1}} < \frac{a+1}{k}$ слѣдуютъ неравенства $\frac{a}{Bk} < X < \frac{a+1}{Bk}$, которыя показываютъ, что искомое X вычислено не только съ точностью до $\frac{1}{k}$, но еще точнѣе, и также найдены для него два приближенія—меньшее и большее.

П р и м ѣ р ы. Чтобы вычислить $\sqrt[5]{\frac{5}{3}}$ съ точностью до $\frac{1}{6}$, образуемъ данный корень къ виду $\sqrt[5]{\frac{20}{32}}$ или $\frac{\sqrt[5]{20}}{2}$ и извлечемъ изъ числителя корень съ точностью до $\frac{1}{6}$.

При этомъ найдемъ по предыдущему, что $\sqrt[5]{20.6^5}$ заключается между 10 и 11, поэтому $\sqrt[5]{20}$ между $\frac{10}{6}$ и $\frac{11}{6}$, а слѣдовательно $\sqrt[5]{\frac{5}{8}}$ между $\frac{10}{12}$ и $\frac{11}{12}$, т.-е. вычислимъ заданный корень съ точностью до $\frac{1}{12}$.

§ 4. Понятіе о предѣлѣ. Разсужденія о вычисленіи ирраціональных чиселъ доказываютъ, что ирраціональныя числа нужно считать возможными, или, иначе, существующими.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ предыдущихъ разсужденіяхъ число k могло считаться произвольно большимъ, то вообразимъ, что это число увеличивается постоянно. Тогда, сообразно съ каждымъ выборомъ числа k , будутъ измѣняться, также увеличиваясь, числа a и $a+1$. При этомъ мы представимъ себѣ мысленно рядъ значеній для чиселъ $\frac{a}{k}$ и $\frac{a+1}{k}$, которыя съ каждымъ новымъ выборомъ k будутъ попарно облизаться между собой все больше и больше, не выходя изъ начальныхъ границъ, но такъ, что разность между ними, т.-е. дробь $\frac{1}{k}$ будетъ становиться произвольно малой. Очевидно, вслѣдствіе этого, что то истинное значеніе, къ которому обѣ дроби приближаются, существуетъ какъ постоянное, единственное для каждаго даннаго случая и опредѣленное число.

Тѣ же разсужденія о вычисленіи ирраціональных чиселъ устанавливаютъ особый взглядъ на эти числа, какъ на неизмѣнныя предѣлы, къ которымъ безконечно приближаются переменныя соизмѣримыя числа соответствующихъ видовъ.

Понятіе о предѣлѣ принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ математическихъ понятій и вообще опредѣляется такъ:

Предѣломъ переменнаго числа называется то постоянное число, къ которому переменное приближается такимъ образомъ, что разность между ними можетъ сдѣлаться и остается меньше всякаго произвольно малаго числа.

Съ понятіемъ о предѣлѣ связано понятіе о такъ называемомъ бесконечно-маломъ числѣ.

Бесконечно-малымъ числомъ называется такое переменное число, которое можетъ сдѣлаться и остается меньше всякаго произвольно малаго постоянного числа.

Разность между всякимъ переменнымъ числомъ и его предѣломъ есть число бесконечно-малое.

Предѣлъ бесконечно-малаго есть нуль.

Примѣры приближенія чиселъ къ предѣламъ встрѣчаются еще въ ариметикѣ. Напр., рядъ десятичныхъ дробей 0,9, 0,99, 0,999,.... имѣетъ предѣломъ 1, потому что такова величина бесконечной періодической дроби 0,9999....

Рядъ чиселъ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots$ имѣетъ также предѣлъ 1, потому что первое число отличается отъ единицы на $\frac{1}{2}$, второе на $\frac{1}{4}$, третье на $\frac{1}{8}$ и т. д., такъ что разность между единицей и данными числами есть переменное бесконечно-малое число.

Всякое ирраціональное число есть предѣлъ бесконечнаго ряда соответствующихъ ему соизмѣримыхъ чиселъ. Такъ $\sqrt[n]{A}$ есть предѣлъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыя получаются изъ формъ $\frac{\sqrt[n]{A \cdot 2^n}}{2}, \frac{\sqrt[n]{A \cdot 3^n}}{3}, \frac{\sqrt[n]{A \cdot 4^n}}{4}, \dots$, когда числители вычисляются съ точностью до единицы.

Такимъ же образомъ $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ есть предѣлъ соизмѣримыхъ чиселъ, получаемыхъ изъ формъ $\frac{\sqrt[n]{A \cdot B^{n-1} \cdot 2^n}}{2B}, \frac{\sqrt[n]{A \cdot B^{n-1} \cdot 3^n}}{3B}, \frac{\sqrt[n]{A \cdot B^{n-1} \cdot 4^n}}{4B}, \dots$, при подобномъ же вычисленіи числителей.

Примѣръ. Извлекая извѣстнымъ способомъ $\sqrt{3}$, находимъ для него приближенія 1, 1,7, 1,73, 1,732,.... Истинное значеніе $\sqrt{3}$ есть предѣлъ, къ которому постоянно приближаются эти приближенія.

Примѣчаніе. Ирраціональныя числа суть только частные виды несоизмѣримыхъ. Подобно рассмотрѣннымъ, и всякія дру-

гія несоизмѣримыхъ числа должны разсматриваться, какъ предѣлы соизмѣримыхъ, лишь только будутъ найдены способы для произвольно точнаго вычисленія ихъ.

● § 5. **Принципъ теоріи предѣловъ.** Въ теоріи предѣловъ наиболѣе важно слѣдующее положеніе, которое служитъ основнымъ началомъ или принципомъ для многихъ выводовъ.

Если два переменныхъ числа равны между собою при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, то равны и предѣлы ихъ.

Это положеніе можно считать очевиднымъ, потому что, если два переменныхъ числа равны между собою при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, то они выражаютъ одну и ту же величину, которая, отличаясь отъ своего предѣла бесконечно мало, не можетъ въ слѣдствіе этого стремиться къ двумъ разнымъ предѣламъ.

Указанный принципъ ведетъ къ распространенію на несоизмѣримыя числа всѣхъ теоремъ о дѣйствіяхъ, доказанныхъ прежде для несоизмѣримыхъ чиселъ.

§ 6. **Дѣйствія съ ирраціональными числами.** Въмѣстѣ съ установленіемъ понятія объ ирраціональныхъ числахъ, какъ предѣлахъ, устанавливается особое понятіе и о дѣйствіяхъ съ ними.

Каждое дѣйствіе съ ирраціональными числами разсматривается, какъ предѣльное относительно ряда однородныхъ дѣйствій, которымъ подвергаются соизмѣримыя приближенія къ даннымъ ирраціональнымъ числамъ.

Такимъ образомъ, сумма двухъ ирраціональныхъ чиселъ есть предѣлъ суммы двухъ измѣняющихся приближеній къ даннымъ числамъ.

Точно также, произведеніе двухъ ирраціональныхъ чиселъ есть предѣлъ произведенія двухъ измѣняющихся приближеній къ даннымъ числамъ.

Всѣ прежде разсмотрѣнныя свойства дѣйствій распространяются на ирраціональныя числа безъ измѣненія.

Для доказательства этого нужно знать, кромѣ опредѣлений дѣйствій и указанного въ предыдущемъ параграфѣ положенія, только то, что разсматриваемыя свойства доказаны для соизмѣримыхъ чиселъ, и что ирраціональныя числа суть предѣлы соизмѣримыхъ. Приведемъ для примѣра два рассужденія:

1. Требуется доказать, что сложеніе двухъ ирраціональныхъ чиселъ X и Y обладаетъ свойствомъ перемѣстительности, т.-е., что

$$X + Y = Y + X.$$

Замѣнимъ данныя числа ихъ приближеніями, которыя будутъ, положимъ, $\frac{a}{k}$ и $\frac{b}{l}$ и вообразимъ, что k и l постоянно увеличиваются, при чемъ a и b также соотвѣтственно измѣняются.

Такъ какъ оба приближенія будутъ при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ оставаться соизмѣримыми, то рассматриваемая формула будетъ для нихъ справедлива.

Такъ какъ предѣлы $\frac{a}{k} = X$ и предѣлы $\frac{b}{l} = Y$, то по опредѣленію сложения предѣлы $\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l}\right) = X + Y$ и предѣлы $\left(\frac{b}{l} + \frac{a}{k}\right) = Y + X$.

Такъ какъ перемѣнныя числа $\frac{a}{k} + \frac{b}{l}$ и $\frac{b}{l} + \frac{a}{k}$ равны при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, то и предѣлы ихъ $X + Y$ и $Y + X$ также равны.

2. Требуется доказать, что умноженіе трехъ ирраціональныхъ чиселъ X , Y и Z обладаетъ свойствомъ сочетательности, т.-е., что

$$(XY)Z = X(YZ).$$

Замѣнимъ данныя числа ихъ приближеніями $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{l}$ и $\frac{c}{m}$ и вообразимъ, что k , l и m постоянно увеличиваются, при чемъ a , b и c измѣняются соотвѣтственно.

Такъ какъ эти приближенія соизмѣримы, то выписанная формула будетъ для нихъ справедлива.

Такъ какъ предѣлы $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{l}$ и $\frac{c}{m}$ суть, соотвѣтственно, X , Y и Z , то по опредѣленію умноженія предѣлы $\left(\frac{a}{k} \cdot \frac{b}{l}\right) \cdot \frac{c}{m} = (XY)Z$ и пред. $\frac{a}{k} \cdot \left(\frac{b}{l} \cdot \frac{c}{m}\right) = X(YZ)$.

Такъ какъ перемѣнныя числа $\left(\frac{a}{k} \cdot \frac{b}{l}\right) \cdot \frac{c}{m}$ и $\frac{a}{k} \cdot \left(\frac{b}{l} \cdot \frac{c}{m}\right)$ равны при всѣхъ измѣненіяхъ, то равны и предѣлы ихъ $(XY)Z$ и $X(YZ)$.

Совершенно также нужно разсуждать при распространеніи на несоизмѣримыя числа всякой формулы, доказанной для соизмѣримыхъ чиселъ.

Поэтому въ дальнѣйшемъ можемъ считать, что всѣ правила дѣйствій, извѣстныя для соизмѣримыхъ чиселъ, распространяются на несоизмѣримыя.

Ирраціональныя выраженія. Дѣйствія съ ними.

§ 7. Ирраціональныя выраженія. Выраженія по ихъ вѣншнему виду раздѣляются на раціональныя и ирраціональныя. Раціональными выраженіями называются тѣ, которыя не содержатъ знаковъ корней или могутъ быть отъ нихъ освобождены. Таковы, напр., выраженія $a+b$, $\frac{a}{b-c^2}$,

$$\sqrt{a^2b^4}, a - \frac{b}{\sqrt[3]{(a+d)^6}}.$$

Ирраціональными выраженіями называются тѣ, которыя содержатъ знаки корней и не могутъ быть отъ нихъ освобождены. Такъ, напр., $\sqrt{a}$ и $a - \sqrt[3]{b^2c}$ суть цѣлыя ирраціональныя выраженія, $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$ и $\frac{a + \sqrt{b-c}}{\sqrt[3]{(a+d)^2}}$ суть дробныя ирраціональныя выраженія.

Разсматривая ирраціональныя выраженія, мы будемъ считать, что корни, входящіе въ нихъ, извлекаются изъ положительныхъ чиселъ и самые корни положительны. Иначе говоря, будемъ разсматривать только ариометическія значенія корней.

§ 8. Преобразованіе ирраціональныхъ выраженій. Теорема 1. Корень не измѣняется, если его умножимъ или раздѣлимъ на какое-либо число, а подрадикальное выраженіе, наоборотъ, раздѣлимъ или умножимъ на соотвѣтствующую показателю корня степень того же числа.

Докажемъ, что $\sqrt[n]{Aa^n} = a\sqrt[n]{A}$. Для этого возводимъ обѣ части равенства въ степень n . Въ первой части, по опредѣленію корня, получимъ $(\sqrt[n]{Aa^n})^n = Aa^n$, а во второй, по теоремѣ о возведеніи произведенія въ степень и затѣмъ по опредѣленію корня, получимъ также $(a\sqrt[n]{A})^n = a^n(\sqrt[n]{A})^n = Aa^n$. Слѣдовательно, предположенное равенство вѣрно.

На доказанной теоремѣ основаны два преобразованія ирраціональныхъ корней.

1. Выведеніе изъ-подъ радикала. Если въ подрадикальномъ выраженіи содержатся множителями или дѣлителями полныя соотвѣтствующія показателю корня степени, то ихъ можно вывести изъ-подъ радикала, сдѣлавъ основанія ихъ соотвѣтственно множителями или дѣлителями самого корня.

$$\text{Напр., } \sqrt[3]{a^6b} = a^2\sqrt[3]{b}, \quad ab\sqrt{\frac{a^3b}{cd^2}} = \frac{a^2b}{d^2}\sqrt{\frac{ab}{cd}}.$$

2. Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ. Если подрадикальное выраженіе есть дробь, то можно подъ радикаломъ уничтожить знаменателя, умноживъ подрадикальное выраженіе на такую полную соответствующую показателю корня степень, которая сократила бы знаменателя, и раздѣливъ самый корень на основаніе этой степени.

$$\text{Напр., } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \sqrt[3]{ab^2}, \quad ab \sqrt[3]{\frac{b}{a^2c}} = \frac{b}{ac} \sqrt[3]{abc}.$$

Теорема 2. Корень не измѣняется, если показателя корня и общаго показателя подрадикальнаго выраженія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число.

Докажемъ, что $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[nr]{A^{mr}}$. Для этого возводимъ обѣ части равенства въ степень nr . Въ первой части, по теоремѣ о возведеніи степени въ степень и по опредѣленію корня, получимъ $(\sqrt[n]{A^m})^{nr} = [\sqrt[n]{A^m}]^n]^r = (A^m)^r = A^{mr}$; а во второй, по опредѣленію корня, получимъ также $(\sqrt[nr]{A^{mr}})^{nr} = A^{mr}$. Следовательно, предположенное равенство вѣрно.

На этой теоремѣ основаны два преобразованія корней:

1. Приведеніе къ новому показателю. Всякій корень можно привести къ новому показателю, кратному данному. Для этого нужно умножить данный показателя корня и общаго показателя подрадикальнаго выраженія на дополнительный дѣлитель къ показателю корня. Напр., $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$, $\sqrt[5]{ab^2} = \sqrt[15]{a^3b^6}$.

2. Сокращеніе показателя. Показателя корня можно уменьшать въ томъ случаѣ, когда онъ имѣетъ общаго множителя съ общимъ показателемъ подрадикальнаго выраженія. Для этого нужно раздѣлить показатели на ихъ общаго множителя. Напр., $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt{a^3}$, $\sqrt[10]{a^2b^4} = \sqrt[5]{ab^2}$.

§ 9. Нормальная форма корня. Подобіе корней. Простѣйшей или нормальной формой корня считается та, въ которой 1) показатель корня не можетъ быть уменьшенъ сокращеніемъ и 2) подрадикальное выраженіе есть цѣлый одночленъ или многочленъ, не допускающій выведенія изъ-подъ радикала. Таковы, напр., выраженія $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ и т. под..

Всякій корень можетъ быть приведенъ къ простѣйшей формѣ. Для этого нужно: 1) Преобразовать, если возможно, подрадикальное выраженіе въ одночленъ, 2) сократить, если возможно, показателя корня, 3) вывести изъ-подъ радикала

въ полныя степени, 4) уничтожить ирраціональность знаменатели.

Примѣры: $\frac{2ab^2}{c} \sqrt[3]{\frac{5a^2}{16b^2c^3}} = \frac{ab^2}{c^2} \sqrt[3]{\frac{5a^2}{2b^2}} = \frac{ab}{2c^2} \sqrt[3]{20a^2b}$.

$$a \sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{a^2}} = \frac{1}{c} \sqrt[3]{ab(a^2 - 4ab + 4b^2)} = \frac{a-2b}{c} \sqrt[3]{ab}.$$

Когда ирраціональный одночленъ приведенъ къ простѣйшей формѣ, то раціональный множитель корня называется его коэффициентомъ. Такъ, въ первомъ изъ предыдущихъ примѣровъ коэффициентъ есть $\frac{ab}{2c^2}$, во второмъ $\frac{a-2b}{c}$.

Ирраціональные одночлены называются подобными, если они различаются только коэффициентами, но имѣютъ одинаковыхъ показателей и одинаковыя подрадикальныя выраженія. Напр., одночлены $a^2\sqrt{b}$ и $\frac{a-b}{2c}\sqrt{b}$ подобны. Чтобы судить о томъ, подобны ли данные корни, или нѣтъ, нужно привести ихъ предварительно къ простѣйшей формѣ.

Примѣры: $\sqrt[3]{8a^5 - 16a^3b^2} = \sqrt[3]{8a^3(a^2 - 2b^2)} = 2a\sqrt[3]{a^2 - 2b^2}$.

$$ab\sqrt[3]{\frac{1}{a} - \frac{2b^2}{a^3}} = ab\sqrt[3]{\frac{a^2 - 2b^2}{a^3}} = b\sqrt[3]{a^2 - 2b^2}.$$

Одночлены, данные въ предыдущихъ примѣрахъ, оказались послѣ упрощенія подобными.

§ 10. Сложеніе и вычитаніе. Для сложенія или вычитанія ирраціональных одночленовъ нужно выписать ихъ рядомъ, соблюдая правила знаковъ этихъ дѣйствій, затѣмъ преобразовать отдѣльные члены въ простѣйшую форму и сдѣлать, если можно, приведеніе.

Приведеніе состоитъ въ томъ, что коэффициенты подобныхъ членовъ съ отнесенными къ нимъ знаками членовъ заключаютъ въ скобку, къ которой приписываютъ множителемъ общій корень; затѣмъ полученный общій коэффициентъ упрощаютъ по обыкновеннымъ правиламъ.

Примѣры: $2\sqrt[3]{54} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{6\frac{3}{4}} + \sqrt{18} =$
 $= 6\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 5\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{13}{4}\sqrt{2},$
 $a\sqrt{a^3 + a^2x} - ab\sqrt{9a + 9x} + 3b\sqrt{\frac{a^3}{b^2} + \frac{2a^2}{b}} \sqrt{\frac{ab^4 + b^4x}{a^2}} - \frac{2a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2}{a^3}} =$
 $= a^2\sqrt{a+x} - 3ab\sqrt{a+x} + 3a\sqrt{a} + 2ab\sqrt{a+x} - 2a\sqrt{a} =$
 $= (a^2 - ab)\sqrt{a+x} + a\sqrt{a}.$