Я.И. Френкель

Курс векторного исчисления с приложениями к механике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Я11

Я.И. Френкель

Я11 Курс векторного исчисления с приложениями к механике / Я.И. Френкель – М.: Книга по Требованию, 2019. – 205 с.

ISBN 978-5-458-58307-7

ISBN 978-5-458-58307-7

Векторное исчисление.

ГЛАВА I.

Операции над векторами и векторными функциями от скалярного аргумента.

§ 1. Разложение и сложение векторов.

Физические величины разделяются обычно на скàлярные, которые характеризуются одним лишь численным значением, и векторные, характеризующиеся, помимо численного значения, определенным направлением в пространстве; кроме того встречаются величины более сложные, соответствующие совокупности двух или более векторов — так называемые тензоры.

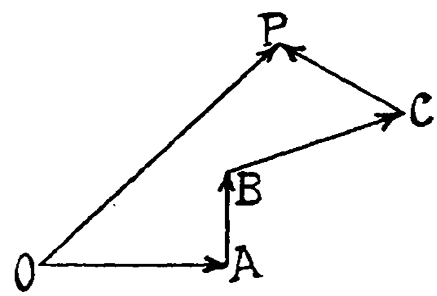

Рис. 1.

Прототипом векторных величин является прямолинейный отрезок, обыкновенно связываемый с представлением о пространственном перемещении материальной частицы из какой-нибудь начальной точки O в некоторую другую точку P, но вообще говоря служащий для графического представления всевозможных векторных величин. Вышеозначенное перемещение $\overrightarrow{OP}$ (рис. 1) может быть заменено совокупностью двух или нескольких перемещений $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CP}$, которые называются составляющими. Подобная замена называется разложением отрезка (или перемещения) $\overrightarrow{OP}$ на составляющие отрезки (или перемещения).

Обратная операция, сводящаяся к замене нескольких отрезков одним, по отношению к которому они играют роль составляющих (при совмещении начала каждого из них с концом предыдущего), называется геометрическим или векторным сложением. Соответственно этому составляющие отрезки называются слагаемыми, а результирующий (соединяющий начало первого с концом последнего) — геометрической суммой их.

Операция геометрического сложения выражается символически формулой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \ldots, \qquad (1)$$

где в рассматриваемом случае (рис. 1) $\vec{F} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{AB}$ $\vec{F}_3 = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{F}_4 = \overrightarrow{CP}$.

Геометрическую сумму не следует смешивать с арифметической, относящейся к численным значениям отрезков, т.-е. к их длинам. Эти численные значения мы будем в дальнейшем обозначать символами соответствующих векторов (отрезков), либо заключая их в прямые скобки, либо же отбрасывая стрелки (в случае одной буквы). Так например длина отрезка $\vec{F}$ представляется символом $|\vec{F}|$ или F.

Численное значение геометрической суммы всегда меньше арифметической суммы слагаемых: это следует из того, что прямая OP короче всякой ломаной (например $OABCP$), проходящей через ее концы. Само собою разумеется, что если все слагаемые отрезки имеют одно и то же направление, т.-е. образуют прямую линию, то их арифметическая сумма совпадает с численным значением геометрической. Таким образом мы имеем следующее соотношение: $F \leqslant F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ или

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots| \leqslant |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3| + \ldots \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

При геометрическом сложении нескольких отрезков они передвигаются таким образом, чтобы начало одного совпадало с концом предыдущего; геометрическая сумма изображается отрезком, соединяющим начало первого с концом последнего. При этом порядок, в котором они «прикладываются» друг к другу, остается совершенно безразличным; другими словами — геометрическая сумма не зависит от порядка слагаемых (свойство «переместительности», или коммутативности). В случае двух слагаемых эта теорема доказывается следующим образом: Построим параллелограмм на отрезках $\overrightarrow{OP} = \vec{F}$ и $\overrightarrow{OP'} = \vec{F'}$ (рис. 2). Так как $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ и так как далее $\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OP} = \vec{F}$ и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP'} = \vec{F'}$, то отсюда следует

$$\vec{F} + \vec{F'} = \vec{F'} + \vec{F} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

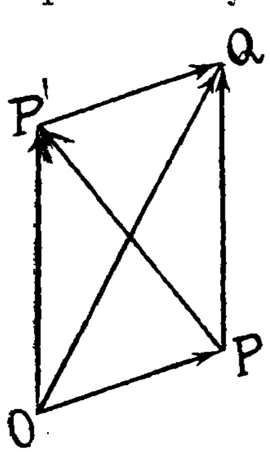

Рис. 2.

Это доказательство легко обобщается на случай нескольких слагаемых, путем последовательного применения формулы (3) к отдельным парам.

Вектор, численно равный данному ($\vec{F}$) и противоположный ему по направлению, обозначается тем же символом со знаком **минус** ($-\vec{F}$). Сложение вектора $\vec{F'}$ с вектором противоположным $\vec{F}$, т.-е. равным $-\vec{F}$, называется **геометрическим вычитанием**, а сумма $\vec{F'} + (-\vec{F})$, обозначаемая в виде $\vec{F'} - \vec{F}$, — **геометрической разностью**. Геометрическую разность векторов $\vec{F'}$ и $\vec{F}$ можно также определить как такой вектор $\Delta\vec{F}$, который нужно прибавить к $\vec{F}$, чтобы получить $\vec{F'}$. На рис. 2 он изображается отрезком $\overrightarrow{PP'}$.

Различные векторные величины—скорости, ускорения, силы и т. п.—изображаются графически таким же образом, как и перемещения, т.-е. в виде прямолинейных отрезков одинакового с ними направления и пропорциональной длины. Соответственно геометрическому разложению (или сложению) изображающих их отрезков, все эти величины могут разлагаться на составляющие (или складываться в результирующие), им в совокупности эквивалентные. Впрочем, вопрос об «эквивалентности» (с физической точки зрения) не имеет существенного значения. Так например в случае единичных векторов (или «ортов»), служащих для характеристики направления и численно равных 1, разложение на составляющие, вполне допустимое с математической точки зрения, лишено, очевидно, всякого физического смысла.

Заметим, что под произведением скалярной величины φ на вектор $\vec{F}$ подразумевается вектор $\varphi\vec{F}$, совпадающий с $\vec{F}$ по направлению и численно равный φF. Так например, если φ есть масса некоторой материальной частицы, а $\vec{F}$ — ее скорость, то произведение $\varphi\vec{F}$ представляет собой так называемое количество движения частицы. Полагая $\varphi = \frac{1}{F}$ получаем единичный вектор

$$\vec{F}_1 = \frac{\vec{F}}{F},$$

характеризующий направление $\vec{F}$.

Умножая $\vec{F}_1$ на $\frac{1}{F}$, получаем, далее, вектор

$$\frac{\vec{F}_1}{F} = \frac{\vec{F}}{F^2},$$

одинаковый с $\vec{F}$ по направлению и обратный по величине. Этот «обратный» вектор мы будем в дальнейшем обозначать символом

$$\frac{1}{\vec{F}} \text{ или } \vec{F}^{-1}.$$

§ 2. Проектирование отрезков и внутреннее умножение векторов.

Под проекцией отрезка $\overrightarrow{OP}$ на какую-либо прямую $\overrightarrow{MN}$ подразумевается, как известно, длина отрезка O_1P_1, отсекаемого на этой прямой перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через концы отрезка $\overrightarrow{OP}$. Если, при этом, направление от O_1 к P_1 совпадает с положительным направлением прямой $\overrightarrow{MN}$, то проекции приписывается положительное значение, а в противоположном случае — отрицательное.

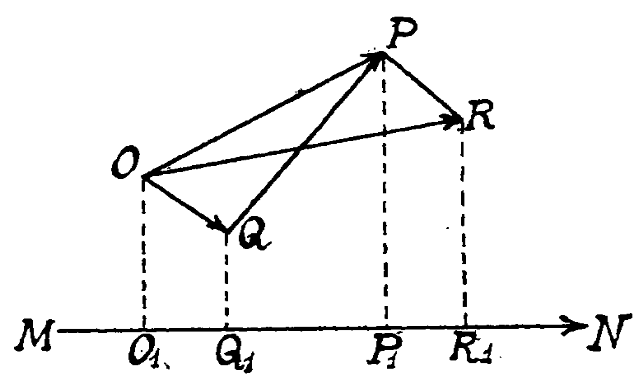

Рис. 3.

Обозначая угол между направлениями $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{MN}$ через α, мы можем положить в обоих случаях $O_1P_1 = OP \cdot \cos\alpha$. Если отрезок $\overrightarrow{OP}$ представляет собой геометрическую сумму отрезков $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{QP}$, или $\overrightarrow{OR}$ и $\overrightarrow{RP}$, то проекция $\overrightarrow{OP}$, как видно из чертежа, равна алгебраической сумме проекций $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{QP}$, взятых с соответствующими знаками (так например: $O_1P_1 = O_1Q_1 + Q_1P_1 = O_1R_1 + R_1P_1$, где $R_1P_1 = -P_1R_1$).

Эта теорема легко обобщается на случай произвольного числа составляющих: алгебраическая сумма проекций отрезков, образующих произвольную ломаную линию (например $OABCP$ рис. 1) равна проекции замыкающего или «результирующего» отрезка (OP). Указанная теорема остается в силе для произвольных векторных величин (скоростей, ускорений, сил и т. д.), поскольку все они могут изображаться прямолинейными отрезками и разлагаться соответствующим образом на составляющие.

Характеризуя направление проектирующей прямой каким-либо вектором $\vec{n}$, мы будем обозначать проекцию любого вектора F на эту прямую символом F_n или $|\vec{F}|_n$. Таким образом предыдущее соотношение между геометрической суммой нескольких векторов и алгебраической суммой их проекций можно выразить следующим равенством:

$$|A+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}|_n = A_n + B_n + C_n + D_n \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Произведение численного значения вектора $\vec{A}$, с одной стороны, и проекции некоторого другого вектора $\vec{B}$ на направление $\vec{A}$, с другой,—называется **внутренним** или **скалярным произведением** обоих векторов и обозначается символом $\vec{A}\cdot\vec{B}$ [1]). Пользуясь предыдущим обозначением, мы можем представить его в виде $A\cdot B_A$. Если угол между $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равен α, то $B_A = B\cos\alpha$ и, следовательно, $A\cdot B_A = AB\cos\alpha = BA\cos\alpha = B\cdot A_B$. Таким образом внутреннее произведение двух векторов не зависит от порядка сомножителей, т.-е.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

В случае их взаимной перпендикулярности оно обращается в нуль.

Внутреннее произведение представляет собою **скалярную** величину. Перемножаемые векторы могут иметь различную природу; так например: если $\vec{A}$ есть вектор силы, действующей на некоторую частицу, а $\vec{B}$ — перемещение последней, то $\vec{A}\cdot\vec{B}$ представляет собою величину соответствующей **работы**.

Заметим, что проекцию какого-либо вектора $\vec{A}$ на направление **единичного** вектора $\vec{n}$ можно представить в виде внутреннего произведения $\vec{n}\cdot\vec{A}$.

Если один из умножаемых векторов, например $\vec{B}$, равен геометрической сумме нескольких других векторов $\vec{C}$, $\vec{D}$ и т. д., то согласно формуле (4) можно положить $B_A = C_A + D_A + \ldots$ и, следовательно,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,(C_A + D_A + \ldots) = AC_A + AD_A + \ldots = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{A}\cdot\vec{D} + \ldots$$

Этот результат легко обобщается на тот случай, если **оба** сомножители разлагаются на несколько составляющих; так например, полагая $\vec{A} = \sum\limits_i \vec{A}_i$ и $\vec{B} = \sum\limits_k \vec{B}_k$, имеем

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\sum_i \vec{A}_i)\cdot(\sum_k \vec{B}_k) = \sum_i\sum_k \vec{A}_i\cdot\vec{B}_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

[1]) Весьма употребителен также символ $(\vec{A}, \vec{B})$.

Формулы (5) и (6) показывают, что внутреннее произведение двух векторов обладает, подобно алгебраическим произведениям скалярных величин, свойствами переместительности и распределительности (чего нельзя сказать по отношению к сочетательному свойству, так как внутреннее произведение трех и более векторов не имеет смысла).

§ 3. Проектирование площадей и внешнее умножение векторов.

Всякой плоскости, определенным образом ориентированной в пространстве, можно привести в соответствие перпендикулярную к ней прямую. Это соответствие, вытекающее из трехмерности пространства, составляет сущность закона «взаимности» между прямыми и плоскостями. Таким образом площадь всякой плоской фигуры (S), ограниченной некоторым замкнутым контуром (C), можно трактовать как векторную величину и изображать перпендикулярным к ней отрезком пропорциональной длины. Впрочем, площадь может быть связана с односторонним направлением вдоль соответствующего перпендикуляра лишь в том случае, если на контуре, ее ограничивающем, задано определенное направление обхода или «вращения». Обычно отрезок $\overline{OP}$, изображающий данную площадь (S) (рис. 4), направляется в ту сторону, куда нужно смотреть для того, чтобы это вращение совершалось по часовой стрелке, или, другими словами, в сторону поступательного движения обыкновенного «правого» винта, поворачиваемого в направлении контура (C).

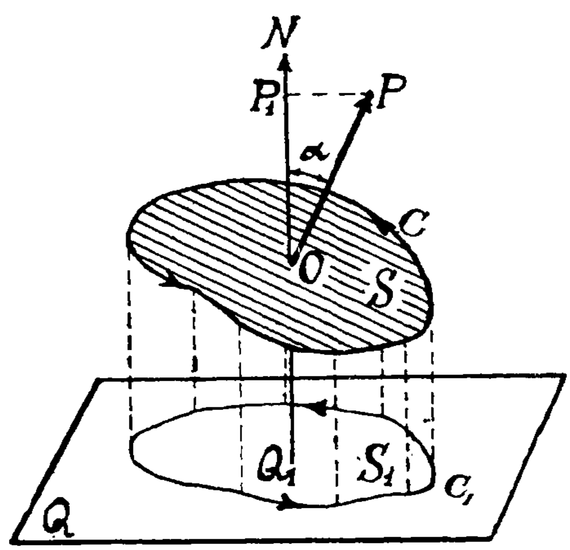

Рис. 4.

Под проекцией площади S на какую-либо плоскость Q подразумевается площадь S_1, вырезаемая на плоскости Q перпендикулярными к ней прямыми, проведенными через точки контура C, ограничивающего S. При этом, для определенности, на проектирующей плоскости (Q) задается определенное «положительное» направление обхода; если последнее совпадает с направлением обхода по контуру C_1, ограничивающему S_1 (направление C_1 определяется однозначным образом направлением C), то площадь S_1 считается положительной, а в противоположном случае — отрицательной. Что касается ее численного значения, то оно равно, как нетрудно убедиться, произведению проектируемой площади S на косинус двугранного угла α (или $\pi - \alpha$) между плоскостями S и Q.

В самом деле, в направлениях, параллельных ~~грани~~ ребру вышеозначенного угла (т.-е. линии пересечения плоскостей S и Q), линейные размеры обеих фигур S и S_1 остаются одинаковыми, тогда как в направлениях, к ней перпендикулярных, линейные размеры S_1 сокращены в сравнении с соответствующими размерами S в отношении $\cos\alpha:1$. А так как площадь всякой плоской фигуры пропорциональна произведению ее линейных размеров в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, то мы можем положить

$$S_1 = \pm S \cos\alpha.$$

Отсюда видно, что проекция S на плоскость Q совпадает по величине и по знаку с проекцией OP_1 отрезка $\overrightarrow{OP}$, изображающего S, на прямую $\overrightarrow{MN}$, перпендикулярную к Q и проведенную в сторону, соответствующую положительному направлению обхода на проектирующей плоскости (так же как направление $\overrightarrow{OP}$ соответствует направлению обхода по контуру ограничивающему S).

Если контур C состоит из прямолинейных отрезков, т.-е. представляет собой замкнутый многоугольник, то рассматриваемая плоская фигура (S) может быть «разложена» на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную контуром C. Эта многогранная поверхность «эквивалентна» S — в том смысле, что проекция S на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций «составляющих» ее плоских фигур, — т.-е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков, изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку $\overrightarrow{OP}$, изображающему S. Само собой разумеется, что направление обхода по элементарным контурам, ограничивающим «составляющие» плоские фигуры, должно выбираться в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру; при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничивающих две подобные фигуры, при обходе тех двух контуров, к которым он принадлежит, проходится в противоположных направлениях (рис. 5).

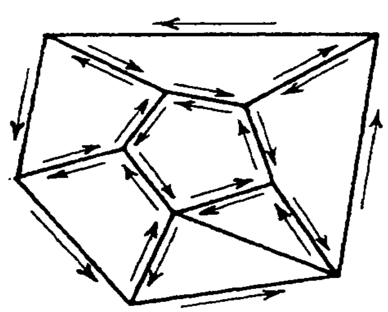

Рис. 5.

Вышеуказанное разложение на плоские фигуры представляется, очевидно, возможным и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т.-е. если контур C имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков $\overrightarrow{OP}$ как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т.-е. что отрезок $\overrightarrow{OP}$ не зависит от способа подразделения контура C на составляющие (плоские) контуры. Хотя, таким образом, в этом случае с контуром C не связывается представления об определенной площади (соответствующей S), тем не менее площадь S_1, вырезываемая на любой плоскости Q проекцией C_1 контура C, остается попрежнему равной проекции OP_1 отрезка $\overrightarrow{OP}$ на прямую MN, перпендикулярную к этой плоскости.

Отрезок $\overrightarrow{OP}$ или, вернее, изображаемый им вектор, характеризующий форму и расположение замкнутого контура C, мы будем в дальнейшем называть моментом этого контура. Это определение может быть распространено на произвольные криволинейные контуры, если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно-малыми сторонами. При этом соответствующие составляющие плоские фигуры превращаются в бесконечно-малые элементы произвольной (кривой) поверхности, ограничиваемой данным контуром.

Простейшей плоской фигурой является параллелограмм (или треугольник, который всегда можно трактовать как половину параллелограмма). Момент параллелограмма, построенного на двух отрезках $\vec{A}=\overrightarrow{OP}$ и $\vec{B}=\overrightarrow{OQ}$, при направлении обхода, соответствующем перемещению в направлении $\vec{A}$, и в направлении противоположном $\vec{B}$, называется внешним или векторным произведением отрезка $\vec{A}$ на отрезок $\vec{B}$ и обозначается символом $\vec{A}\times\vec{B}$ [1]. Таким образом вектор $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$, будучи численно равен площади параллелограмма $OPRQ$ со сторонами $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$ (рис. 6), направлен по перпендикуляру к плоскости этого параллелограмма в ту сторону, куда движется обыкновенный (правый) винт при вращении от $\overrightarrow{OP}$ к $\overrightarrow{OQ}$ на угол $\alpha<180^\circ$ (т.-е. в рассматриваемом случае от читателя).

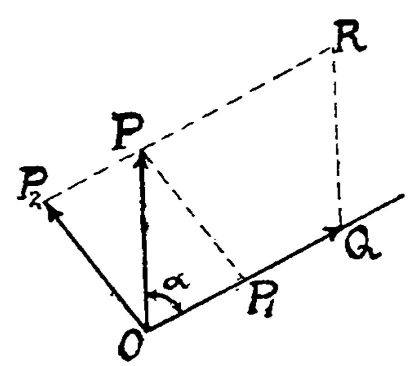

Рис. 6.

Из этого определения следует, что внешним произведением $\vec{B}$ на $\vec{A}$ является вектор, противоположный предыдущему, т.-е. равный $-\vec{C}$. Таким образом мы имеем следующее равенство:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

показывающее, что векторное произведение, в противоположность скалярному, свойством переместительности не обладает.

Площадь параллелограмма равна произведению одной из его сторон на соответствующую высоту; последнюю можно рассматривать как проекцию другой стороны на прямую, перпендикулярную к первой. Обозначая угол между $\vec{A}$ и $\vec{B}$ через α, имеем, следовательно:

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{B}\times\vec{A}|=A\cdot B\sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

В случае параллельности двух векторов их внешнее произведение обращается в нуль. В общем случае, разлагая один из векторов, например $\overrightarrow{OP}$, на составляющие $\overrightarrow{OP_1}=\vec{A}_1$ и $\overrightarrow{OP_2}=\vec{A}_2$, соответственно параллельную и перпендикулярную к $\overrightarrow{OQ}$ (рис. 6), мы можем очевидно положить

$$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{A}_1+\vec{A}_2)\times\vec{B}=\vec{A}_2\times\vec{B}+\vec{A}_1\times\vec{B}=\vec{A}_2\times\vec{B}$$

(ибо, согласно предыдущему, $\vec{A}_1\times\vec{B}=0$). Равенство

$$(\vec{E}+\vec{F})\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{B}+\vec{F}\times\vec{B}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

выражающее распределительное свойство внешнего произведения, легко обобщается на случай произвольных векторов $\vec{E}$ и $\vec{F}$. Так например, если последние представляют собой составляющие вектора $\vec{A}=\overrightarrow{OP}$, то, проводя

---

[1] Или же $[\vec{A},\vec{B}]$.

отрезки $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{QT}=\vec{E}$ и $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{TR}=\vec{F}$ (рис. 7), мы можем рассматривать векторы $\vec{E}\times\vec{B}$ и $\vec{F}\times\vec{B}$ как моменты параллелограммов $OSTQ$ и $SPRT$, которые совместно с треугольниками QTR и OPS эквивалентны параллелограмму $OPRQ$. А так как моменты этих треугольников (в виду противоположности направлений обхода) равны и противоположны, то отсюда следует, что геометрическая сумма моментов $OSTQ$ и $SPRT$ равна моменту $OPRQ$, т.-е. что $\overrightarrow{OS}\times\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{SP}\times\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$, — а это и есть равенство (9).

К тому же результату можно прийти следующим образом (не пользуясь представлениями, связанными с проектированием плоских фигур). — Разложим векторы $\vec{E}$ и $\vec{F}$ на составляющие $\vec{E}_1$, $\vec{F}_1$ и $\vec{E}_2$, $\vec{F}_2$, соответственно параллельные и перпендикулярные к вектору $\vec{B}$. Предположим, далее, что последний перпендикулярен к плоскости чертежа и численно равен 1. В таком случае векторы $\overrightarrow{OE}=\vec{E}_2$ и $\overrightarrow{OF}=\vec{F}_2$ должны быть расположены в этой плоскости, так же как и их геометрическая сумма $\overrightarrow{OG}$ (рис. 8). Внешние произведения $\overrightarrow{OG}\times\vec{B}$, $\overrightarrow{OE}\times\vec{B}$ и $\overrightarrow{OF}\times\vec{B}$ должны, при указанных условиях, представляться отрезками $OG'=OG$, $OE'=OE$ и $OF'=OF$, лежащими в той

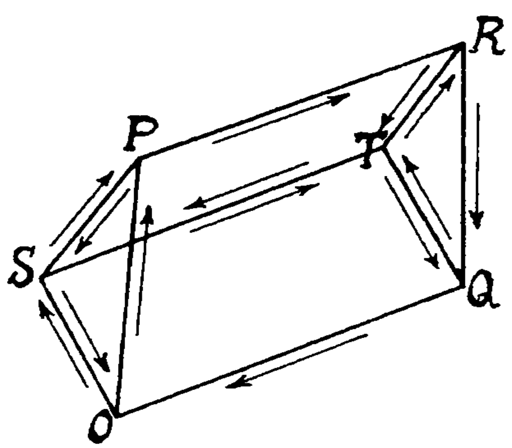

Рис. 7.

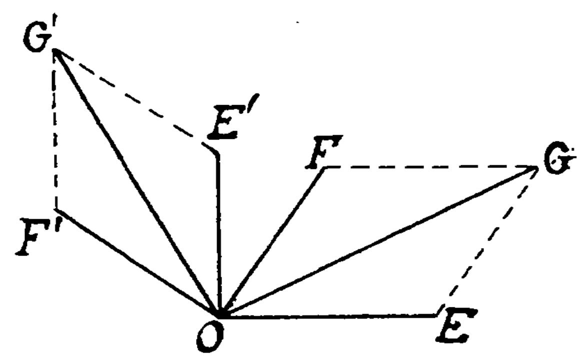

Рис. 8.

же плоскости и повернутыми по отношению к соответствующим «множителям» на прямой угол в одну и ту же сторону. Если, следовательно, $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$, то $\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OE'}+\overrightarrow{OF'}$, т.-е.

$$(\vec{E}_2+\vec{F}_2)\times\vec{B}=\vec{E}_2\times\vec{B}+\vec{F}_2\times\vec{B}.$$

Прибавляя к левой части произведение $(\vec{E}_1+\vec{F}_1)\times\vec{B}$, а к правой — сумму $\vec{E}_1\times\vec{B}+\vec{F}_1\times\vec{B}$ (все эти выражения равны тождественно нулю), и принимая во внимание, что $(\vec{E}_1+\vec{F}_1)\times\vec{B}+(\vec{E}_2+\vec{F}_2)\times\vec{B}=(\vec{E}+\vec{F})\times\vec{B}$ и точно так же $\vec{E}_1\times\vec{B}+\vec{E}_2\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{B}$, $\vec{F}_1\times\vec{B}+\vec{F}_2\times\vec{B}=\vec{F}\times\vec{B}$, получаем формулу (9) при $B=1$. То обстоятельство, что она остается в силе при любом значении B, представляется совершенно очевидным.

Разлагая векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ на произвольное число составляющих $\vec{A}=\sum_i\vec{A}_i$ и $\vec{B}=\sum_k\vec{B}_k$ и повторно применяя формулу (9), получаем

$$(\sum_i\vec{A}_i)\times(\sum_k\vec{B}_k)=\sum_i\sum_k\vec{A}_i\times\vec{B}_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Операция внешнего (векторного) умножения применяется не только к отрезкам, но и к каким угодно векторным величинам, ими изображаемым. Так например, если $\vec{A}=\overrightarrow{OP}$ есть радиус-вектор точки P по отношению к O (рис. 6), а вектор $\vec{B}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OQ}$ — сила, действующая на материальную частицу, расположенную в точке P, то произведение $\vec{A}\times\vec{B}$ представляет собой по величине и направлению момент этой силы по отношению к точке O. Заменяя силу количеством движения частицы, т.-е. произведением массы на скорость, мы получим вместо момента силы — момент количества движения и т. д.

§ 4. Комбинированные операции умножения и вопрос о делении векторов.

Так как внешнее произведение двух векторов представляет собой величину векторную, то его можно в свою очередь умножать — как внутренне, так и внешне — на какую-либо третью векторную величину.

Если под векторами $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ подразумевать три некопланарных (т.-е. не лежащих в одной плоскости) отрезка $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ (рис. 9), то произведение $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ представляет собой, как нетрудно убедиться, объем параллелепипеда, построенного на этих отрезках как на сторонах (со знаком + или —).

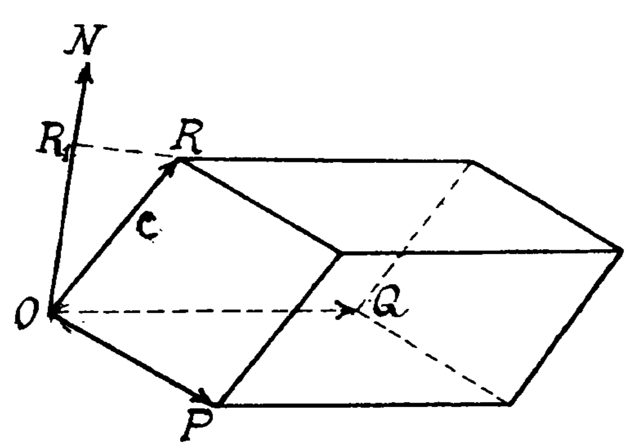

Рис. 9.

В самом деле, произведение $\vec{A}\times\vec{B}$ численно равно площади грани POQ, а проекция отрезка $\vec{C}=\overrightarrow{OR}$ на направление этого произведения ($\overrightarrow{ON}$) равна высоте OR_1, опущенной из точки O на противоположную грань (параллельную OPQ), со знаком плюс, если $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OR}$ направлены в одну и ту же сторону, и со знаком минус в противоположном случае. Представляя объем параллелепипеда V в виде произведения площади граней QOR или ROP на соответствующие высоты, получаем

$$\pm V=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Эти равенства показывают между прочим, что тройное произведение $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ остается неизменным при циклических перестановках сомножителей [1]). Заметим, что в случае компланарности рассматриваемых векторов вышеозначенное произведение обращается в нуль.

[1]) Под циклическими перестановками трех или более букв A, B, C, $D\ldots$ подразумеваются такие, при которых первая становится на место второй, вторая на место третьей и т. д. и наконец последняя — на место первой. Подобные перестановки наглядно иллюстрируются «хороводным» (кольцеобразным) расположением букв. При этом каждой перестановке соответствует поворот кольца, как целого, на одно или несколько звеньев.

Совершенно иной характер имеет внешнее произведение вектора $\vec{A}\times\vec{B}$ на $\vec{C}$, т.-е. выражение $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$. Легко видеть, что оно представляет собою некоторый вектор $\vec{D}$, перпендикулярный к $\vec{C}$ и лежащий в плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Мы можем, следовательно, положить $\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$, где α и β — некоторые скалярные величины, связанные соотношением

$$\vec{D}\cdot\vec{C}=\alpha(\vec{A}\cdot\vec{C})+\beta(\vec{B}\cdot\vec{C})=0,\ \text{т.-е.}\ -\frac{\alpha}{\vec{B}\cdot\vec{C}}=+\frac{\beta}{\vec{A}\cdot\vec{C}}=\gamma,$$

где γ есть некоторая новая скалярная величина. Подставляя соответствующие значения α и β в предыдущее выражение для $\vec{D}$, получаем:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\gamma[+\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})].$$

Нетрудно убедиться, что γ представляет собой численный коэффициент, не зависящий ни от величины ни от направления векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. В самом деле, разлагая один из них, например $\vec{C}$, на сумму двух векторов $\vec{C}_1+\vec{C}_2$, имеем:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}_1+(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}_2=$$
$$=\gamma[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_1)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_1)+\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_2)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_2)].$$

С другой стороны:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}_1=\gamma_1[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_1)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_1)]$$

и

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}_2=\gamma_2[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_2)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_2)],$$

где коэффициенты γ_1 и γ_2 могут иметь значения отличные от γ. Сравнивая предыдущие равенства, получаем:

$$(\gamma-\gamma_1)[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_1)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_1)]+(\gamma-\gamma_2)[\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_2)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_2)]=0$$

Если разности $\gamma-\gamma_1$ и $\gamma-\gamma_2$ отличны от нуля, то это равенство может иметь место лишь при условии параллельности векторов:

$$\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_1)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_1)\ \text{и}\ \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}_2)-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}_2).$$

А так как оба они лежат в плоскости $(\vec{B},\vec{A})$, при чем один из них перпендикулярен к $\vec{C}_1$, а другой к $\vec{C}_2$, то в виду независимости векторов $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ друг от друга подобную параллельность можно, вообще говоря, считать исключенной. Отсюда следует, что $\gamma-\gamma_1=0$ и $\gamma-\gamma_2=0$, т.-е. $\gamma_1=\gamma_2=\gamma=\text{const}$.

Для определения γ предположим, что векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{C}$ совпадает с $\vec{B}$ по величине и направлению. При таких условиях вектор $\vec{D}$ должен быть противоположен $\vec{A}$ по направлению и численно равен произведению $ABC=AB^2$.