

М.Ф. Субботин

Курс небесной механики

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 52
ББК 22.6
М11

М11 **М.Ф. Субботин**
Курс небесной механики: Том 2 / М.Ф. Субботин – М.: Книга по Требованию, 2014. – 418 с.

ISBN 978-5-458-60318-8

ISBN 978-5-458-60318-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА I

ПРОБЛЕМА n ТЕЛ.

§ 1. Интегралы проблемы n тел.

Рассмотрим n материальных точек с массами, равными соответственно $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$. Через ξ_i, η_i, ζ_i обозначим координаты точки m_i относительно произвольной неподвижной системы осей. Пусть Δ_{ij} есть расстояние между точками m_i и m_j , так что

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Притяжение, испытываемое точкой m_i со стороны точки m_j , будет равно $k^2 m_i m_j \Delta_{ij}^{-2}$, где через k^2 обозначен коэффициент притяжения (т. I, §§ 3 и 16); компоненты этой силы по осям координат будут

$$k^2 m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad k^2 m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad k^2 m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}.$$

Поэтому уравнения движения точки m_i напишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем при суммировании в правых частях значение $j=i$ должно быть пропущено.

Уравнения (1) при $i=0, 1, \dots, n-1$ образуют систему порядка $6n$, к интегрированию которой и приводится проблема n тел.

Легко видеть, что уравнения (1) могут быть написаны так:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad (2)$$

если, следуя Лагранжу, ввести функцию сил

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Так как мы здесь имеем систему, на которую не действуют никакие внешние силы, то общие теоремы Механики сразу дают нам 6 интегралов движения центра инерции системы и 3 интеграла площадей. Эти интегралы очень легко получаются непосредственно из уравнений (1).

Прежде всего, суммируя каждое из уравнений (1) по i от $i=0$ до $i=n-1$, получим

$$\sum_i m_i \ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_i m_i \ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_i m_i \ddot{\zeta}_i = 0,$$

где дифференцирование по времени обозначено точками.

Отсюда

$$\sum_i m_i \dot{\xi}_i = \alpha_1, \quad \sum_i m_i \dot{\eta}_i = \beta_1, \quad \sum_i m_i \dot{\zeta}_i = \gamma_1 \quad (4)$$

$$\sum_i m_i \xi_i = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad \sum_i m_i \eta_i = \beta_1 t + \beta_2, \quad \sum_i m_i \zeta_i = \gamma_1 t + \gamma_2, \quad (5)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — произвольные постоянные.

Равенства (4) и (5) показывают, что центр инерции системы движется прямолинейно и равномерно. Они носят название интегралов движения центра инерции.

Для вывода интегралов площадей обращаемся к следующим легко проверяемым следствиям уравнений (1):

$$\sum_i m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0$$

$$\sum_i m_i (\zeta_i \ddot{\xi}_i - \xi_i \ddot{\zeta}_i) = 0$$

$$\sum_i m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = 0.$$

Интегрируя эти равенства и обозначая через C_1, C_2, C_3 новые произвольные постоянные, получим интегралы площадей

$$\sum_i m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) = C_1$$

$$\sum_i m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) = C_2 \quad (6)$$

$$\sum_i m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = C_3.$$

Левые части уравнений (6) представляют собою проекции момента количества движения системы (который равняется сумме моментов количеств движения всех точек) на оси координат. Таким образом, равенства (6) показывают, что *момент количества движения системы остается постоянным как по величине, так и по направлению*.

Плоскость, перпендикулярная к моменту количества движения системы и, следовательно, имеющая уравнение

$$C_1 (\xi - \xi^0) + C_2 (\eta - \eta^0) + C_3 (\zeta - \zeta^0) = 0, \quad (7)$$

называется неизменной плоскостью Лапласа.

Каждый член сумм, стоящих в левых частях равенств (6), можно еще интерпретировать как умноженную на массу проекцию удвоенной секториальной скорости точки m_i на соответствующую координатную плоскость. Короче говоря, левая часть каждого из этих равенств есть

сумма взвешенных проекций секториальных скоростей всех точек системы на координатную плоскость.

Если сумму взвешенных секториальных скоростей спроектировать на произвольно взятую плоскость, то проекция будет очевидно равна:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} \cdot \cos \beta,$$

где β — угол между нормалью к рассматриваемой плоскости и моментом количества движения системы. Отсюда ясно, что неизменная плоскость может быть определена как такая *плоскость, для которой сумма взвешенных проекций секториальных скоростей всех точек наибольшая.*

Перейдем теперь к последнему из общих интегралов, существование которого обусловлено тем обстоятельством, что функция сил (3) не содержит явно время.

Умножим уравнения (2) соответственно на $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ и сложим их почленно; это даст:

$$\sum_i m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \frac{dU}{dt},$$

откуда непосредственно вытекает интеграл живых сил

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h, \quad (8)$$

где h — новая постоянная.

Так как величина

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$$

представляет собою кинетическую энергию системы, а потенциальная энергия рассматриваемой системы равна очевидно $-U$, то полная энергия будет равна

$$H = T - U.$$

Следовательно, интеграл (8), дающий $H = h$, выражает для изучаемой нами замкнутой системы закон сохранения энергии.

Итак, общие теоремы Механики дают для проблемы n тел десять интегралов. Многочисленные попытки найти дальнейшие интегралы остались безуспешными. В 1887 г. Брунс доказал, что даже в случае проблемы трех тел всякий первый интеграл, алгебраический относительно координат ξ_i , η_i , ζ_i и их производных $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, является следствием указанных десяти интегралов. В 1889 г. Пуанкаре обнаружил (также для проблемы трех тел) отсутствие первых интегралов, определенным образом выражающихся при помощи однозначных аналитических функций.

Эти теоремы, на доказательстве которых мы не будем останавливаться, показывают, что вопрос о нахождении новых интегралов, сверх десяти известных, не представляет интереса для Небесной механики, так как эти интегралы были бы слишком сложны для того, чтобы иметь какое-либо применение.

§ 2. Проблема n тел приводится к интегрированию системы $6n-12$ порядка и двум квадратурам.

Найденные в предыдущем параграфе 6 интегралов движения центра инерции, 3 интеграла площадей и интеграл живых сил позволяют понизить порядок системы (1) на 10 единиц.

Воспользовавшись тем, что силы не зависят от времени, мы можем понизить порядок системы еще на одну единицу: для этого надо исключить из уравнений dt . Когда полученная таким образом система будет проинтегрирована, время определится при помощи одной квадратуры. Таким образом, задача будет приведена к решению системы порядка $6n-11$ и выполнению квадратуры.

Понижение порядка системы еще на одну единицу основывается на полном использовании того обстоятельства, что силы зависят исключительно от взаимных расстояний движущихся точек.

Чтобы удобнее использовать указанное свойство нашей системы, перейдем к обобщенным координатам, причем одну из координат выберем следующим образом. Через какую-либо точку системы, например m_0 , проведем неподвижную прямую, а через эту прямую — плоскость, проходящую через какую-нибудь другую точку системы. Азимут этой плоскости, отсчитываемый от произвольного неподвижного направления, обозначим через φ и примем за одну из обобщенных координат.

Движение всей системы будет, следовательно, определяться координатой φ и координатами, фиксирующими положение системы относительно движущейся плоскости, имеющей азимут φ .

Покажем, что координата φ является циклической, т. е. что уравнения Лагранжа включают только производную $\dot{\varphi}$, но не φ .

Неподвижную прямую, проведенную нами через точку m_0 , примем за ось z -ов; ось x -ов расположим во вращающейся плоскости. Если через x_k, y_k, z_k обозначить координаты точки m_k в этой вращающейся системе осей, то компоненты скорости точки m_k будут

$$\dot{x}_k - y_k \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_k + x_k \dot{\varphi}, \quad \dot{z}_k.$$

Следовательно, живая сила системы, определяемая равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k [(\dot{x}_k - y_k \dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_k + x_k \dot{\varphi})^2 + \dot{z}_k^2],$$

будет зависеть только от $\dot{\varphi}$, но не от φ , точно так же, как и кинетический потенциал

$$L = T + U.$$

Поэтому соответствующее φ уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

дает

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}$$

Это равенство позволяет исключить $\dot{\varphi}$ из остальных уравнений движения. После того, как полученная таким образом система уравнений будет проинтегрирована и будет известно движение наших материальных точек относительно вращающейся плоскости, останется найти угол φ , дающий положение этой плоскости. Так как последнее равенство дает $\dot{\varphi}$ в функции остальных координат, то угол φ определится при помощи одной квадратуры.

Рассмотренная нами операция исключения из уравнений движения азимута φ была названа Якоби — для частного случая задачи трех тел — исключением узлов.

Итак, интегрирование уравнений (1) действительно приводится к интегрированию системы порядка $6n-12$ и двум квадратурам.

Фактическое выполнение указанных приведений мы производить не будем, так как оно несколько не облегчает полное решение задачи. Ограничимся лишь имеющим практическое значение понижением порядка системы на 6 единиц при помощи интегралов (4) и (5). Это приведение будет выполнено в следующих параграфах.¹

§ 3. Уравнения относительного движения.

Вернемся к уравнениям (1), определяющим движение n тел относительно неподвижной системы осей. Найденные нами интегралы (4) и (5) позволяют исключить из уравнений (1) три какие-либо координаты, например ξ_0, η_0, ζ_0 и их производные.

Положим, с этой целью,

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \quad \eta_i = \eta_0 + y_i, \quad \zeta_i = \zeta_0 + z_i, \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

так что x_i, y_i, z_i являются координатами точки m_i относительно осей, параллельных предыдущим, но имеющим начало в точке m_0 .

Из уравнений (1) следует, принимая во внимание, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_{j \neq i} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} = \\ &= k^2 \left(m_0 \frac{x_0 - x_i}{\Delta_{0i}^3} + m_1 \frac{x_1 - x_i}{\Delta_{1i}^3} + \dots + m_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_i}{\Delta_{n-1, i}^3} \right) = \\ &= -k^2 m_0 \frac{x_i}{\Delta_{0i}^3} + k^2 \sum' m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} \\ \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 \sum_{j \neq 0} m_j \frac{\xi_j - \xi_0}{\Delta_{0j}^3} = k^2 m_i \frac{x_i}{\Delta_{0i}^3} + k^2 \sum' m_j \frac{x_j}{\Delta_{0j}^3}, \end{aligned}$$

где через Σ' обозначено суммирование по j с пропуском значений $j=i$ и $j=0$.

Поэтому, делая $\Delta_{0j} = r_j$, получим следующие уравнения, определяющие движение m_i относительно m_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right) \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$(i=1, 2, \dots, n-1).$

¹ Подробные литературные указания относительно различных способов действительного выполнения указанных в этом параграфе понижений порядка системы дифференциальных уравнений для случая задачи трех тел можно найти в статье: E. T. Whittaker, *Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen*, *Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften*, Bd. VI₂, 512—556, а также в известном учебнике Аналитической динамики того же автора, где этому вопросу посвящена специальная глава.

Фактическое приведение к системе порядка $6n-12$ для задачи n тел выполнил T. L. Bennett (*Messenger of Math.* (2), 44, 1904).

причем

$$\Delta_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2.$$

Положим

$$R_i = k^2 \sum' m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right). \quad (10)$$

Это позволит написать уравнения (9) в такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i} \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Предположим, что массы всех тел, за исключением m_0 и m_p , равны нулю. В таком случае $R_i = 0$ и уравнения (11) обращаются в известные уравнения задачи двух тел (т. I, гл. II). Так как в Астрономии издавна установился обычай называть кеплерово движение, соответствующее задаче двух тел, невозмущенным движением, а всякое отклонение от него возмущением, то и функция R_i получила название пертурбационной функции. Производные этой функции по координатам m_i дают компоненты относительного ускорения, испытываемого телом m_i со стороны всех остальных тел системы, за исключением, конечно, центрального тела m_0 .

После того как система (11) порядка $6n-6$ разрешена и движение всех тел относительно m_0 известно, легко может быть получено абсолютное движение всех тел. Действительно, уравнения (5) дают:

$$\begin{aligned} M\xi_0 + \sum_1^{n-1} m_i x_i &= \alpha_1 t + \alpha_2 \\ M\eta_0 + \sum_1^{n-1} m_i y_i &= \beta_1 t + \beta_2 \\ M\zeta_0 + \sum_1^{n-1} m_i z_i &= \gamma_1 t + \gamma_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$M = m_0 + \sum_1^{n-1} m_i,$$

откуда найдем ξ_0 , η_0 , ζ_0 .

Для системы (11) мы имеем четыре интеграла, соответствующие интегралам (6) и (8) уравнений абсолютного движения.

Первое из равенств (6) дает:

$$\sum_1^{n-1} m_i [(\eta_0 + y_i)(\zeta_0 + z_i) - (\zeta_0 + z_i)(\dot{\eta}_0 + \dot{y}_i)] + m_0(\eta_0 \dot{\zeta}_0 - \zeta_0 \dot{\eta}_0) = C_1$$

или

$$M(\eta_0 \dot{\zeta}_0 - \zeta_0 \dot{\eta}_0) + \dot{\zeta}_0 \sum m_i y_i - \zeta_0 \sum m_i \dot{y}_i + \\ + \eta_0 \sum m_i \dot{z}_i - \dot{\eta}_0 \sum m_i z_i + \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_1.$$

Определяя ξ_0 , η_0 , ζ_0 из (12) и подставляя сюда, окончательно получим следующие интегралы уравнений (11):

$$\begin{aligned} M \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) + \sum m_i z_i \sum m_i \dot{y}_i - \sum m_i y_i \sum m_i \dot{z}_i &= C'_1 \\ M \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) + \sum m_i x_i \sum m_i \dot{z}_i - \sum m_i z_i \sum m_i \dot{x}_i &= C'_2 \\ M \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) + \sum m_i y_i \sum m_i \dot{x}_i - \sum m_i x_i \sum m_i \dot{y}_i &= C'_3, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} C'_1 &= MC_1 + \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \\ C'_2 &= MC_2 + \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 \\ C'_3 &= MC_3 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1. \end{aligned}$$

Выполнив аналогичные преобразования в интеграле живых сил (8), получим еще один интеграл уравнений относительного движения.

Уравнения (11) широко применяются в Небесной механике, особенно при изучении движения планет и комет. В этом случае за центральное тело m_0 , к которому относят движение всех остальных, принимают Солнце. При таком выборе каждый член пертурбационной функции (10) имеет множителем планетную массу m_i ; поэтому правые части уравнений (11) будут весьма малы и их влияние действительно можно рассматривать как возмущение.

§ 4. Вторая форма уравнений относительного движения.

Указанная в предыдущем параграфе форма уравнений относительного движения в некоторых случаях неудобна тем, что содержит особую для каждого тела пертурбационную функцию R_i . Поэтому иногда пользуются другой формой, основанной на следующем выборе относительных координат:

1) через первую точку m_0 проводим оси координат, параллельные неподвижным осям, и положение m_1 определяем в этой системе координатами x_1 , y_1 , z_1 ;

2) через центр инерции G_1 точек m_0 и m_1 проводим оси, параллельные предыдущим, и положение m_2 определяем относительно этих осей координатами x_2 , y_2 , z_2 ;

3) положение m_3 определяем координатами x_3 , y_3 , z_3 относительно системы осей, параллельных предыдущим и имеющих начало в центре инерции G_2 точек m_0 , m_1 , m_2 ; и т. д.

Таким образом, каждая последующая точка m_{i+1} относится к центру инерции G_i всех предыдущих точек m_0 , m_1 , . . . , m_i .

Обозначим через X_i , Y_i , Z_i координаты точки G_i так что

$$M_i X_i = m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + \dots + m_i \xi_i,$$

где

$$M_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i.$$

так что окончательно будем иметь следующие дифференциальные уравнения относительного движения:

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (17)$$

где

$$\mu_i = \frac{m_i M_{i-1}}{M_i}.$$

Равенства (16) позволяют выразить функцию сил U через новые координаты.

Уравнения (17) с успехом применяются в теории движения спутников и при изучении движений в системах кратных звезд.

Например при изучении движения Луны удобно за точку m_0 принять Землю, за m_1 — Луну и за m_2 — Солнце. Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты Луны относительно Земли, через x_2, y_2, z_2 — координаты Солнца относительно центра инерции Земли и Луны, и полагая

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2},$$

получим такие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}; & \mu_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \mu_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_1}; & \mu_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_2} \\ \mu_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_1}; & \mu_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_2}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$U = k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} \right).$$

Как уже было отмечено (т. I, § 7), движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна мы можем считать эллиптическим, следовательно нахождение x_2, y_2, z_2 сводится к решению задачи двух тел, чем существенно упрощается решение системы (18).

В заключение покажем, каким образом живая сила системы T выражается через новые координаты.

В равенстве (15) заменим ξ_i через $x_i + X_{i-1}$. Это даст

$$(M_i - M_{i-1}) x_i = M_i (X_i - X_{i-1}).$$

Возводя в квадрат как это равенство, так и (15), получим

$$\begin{aligned} (M_i - M_{i-1})^2 x_i^2 &= M_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 \\ (M_i - M_{i-1})^2 \xi_i^2 &= (M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Откуда, исключив произведение $X_i X_{i-1}$, найдем:

$$m_i \left(\xi_i^2 - \frac{M_{i-1} x_i^2}{M_i} \right) = M_i X_i^2 - M_{i-1} X_{i-1}^2.$$

Это равенство просуммируем от $i=1$ до $i=n-1$. Получим:

$$\sum_1^{n-1} m_i \xi_i^2 = \sum_1^{n-1} \frac{m_i M_{i-1}}{M_i} x_i^2 + M_{n-1} X_{n-1}^2 - M_0 X_0^2,$$

или, так как $M_0 = m_0$, $X_0 = \xi_0$,

$$\sum_0^{n-1} m_i \xi_i^2 = \sum_1^{n-1} \mu_i x_i^2 + M_{n-1} X_{n-1}^2.$$

Складывая почленно это равенство с аналогичными, написанными для других координат, получим:

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \sum_1^{n-1} \mu_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + M_{n-1} (X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + Z_{n-1}^2).$$

Но это соотношение выведено нами из линейных однородных зависимостей между координатами ξ, η, ζ и x, y, z . Поэтому такое же соотношение будет иметь место и между производными этих координат.

Следовательно

$$2T = \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + M_{n-1} (\dot{X}_{n-1}^2 + \dot{Y}_{n-1}^2 + \dot{Z}_{n-1}^2).$$

Примечание. Уравнения (17) имеют ту же форму, что и уравнения (2). Поэтому для уравнений (17) интегралы площадей и живых сил могут быть получены из указанных выше интегралов для абсолютного движения заменой масс m_i множителями μ_i .

Для случая проблемы трех тел наиболее общее линейное преобразование координат, при котором сохраняется форма интегралов, площадей и живых сил, нашел Хопфнер.¹

§ 5. Формула Якоби.

Для проблемы n тел функция сил U , определяемая формулой (3), является однородной функцией координат. Пользуясь этим обстоятельством, можно, как показал Якоби, из интеграла живых сил вывести еще одну весьма интересную формулу.

Так как U есть однородная функция (-1) -го порядка от ξ, η, ζ , то

$$\sum_0^{n-1} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U.$$

Поэтому, умножая уравнения (2) соответственно на ξ, η, ζ и складывая, получим:

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = -U.$$

Сложим это равенство с интегралом живых сил (8), умноженным на 2. Это даст

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + 2h,$$

¹ F. Hopfner, Über eine Verallgemeinerung der relativen kanonischen Koordinaten von Jacobi, Astr. Nachr., 195, 1913, 257—262.