Куличкова Алена Георгиевна

Учебно-методическое пособие по дисциплине “Математика”

Москва
Издательство Нобель Пресс

УДК 51
ББК 22.1
К90

Куличкова Алена Георгиевна
К90 Учебно-методическое пособие по дисциплине “Математика” / Куличкова Алена Георгиевна – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2013. – 97 с.

ISBN 978-5-518-55425-2

Учебно-методическое пособие составлено в соответствие с федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС третьего поколения) и примерной основной профессиональной образовательной программы среднего профессионального образования дисциплины “Математика”. Даются основные теоретические сведения и примеры решения типичных задач, рекомендации по изучению дисциплины. Приводятся вопросы для самопроверки, рекомендуемая литература.

ISBN 978-5-518-55425-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач, но также и элементом общей культуры. Именно в рамках математического образования студент получает навыки творческого подхода к решению проблем по специальности, точному пониманию средств возможностей решения проблем, знакомится с современными информационными технологиями.

Целью математического образования студента является: воспитание достаточно высокой математической культуры, привитие навыков современных видов математического мышления, привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования при построении и исследовании моделей, в практической деятельности.

В результате изучения дисциплины студент развивает логическое и алгоритмическое мышление; овладевает основными методами исследования и решения математических задач, основными численными методами математики их простейшими реализациями на ПК; вырабатывает умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач. Это позволяет создать необходимую основу для изучения всех последующих дисциплин. Студент должен выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, уметь логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краснов М. Л. и др*. Вся высшая математика: Учебник. Т. 1– Т. 3. – М.: Эдиториал УРСС, 2000–2001.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985, т. 1, 2.

3. *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики. – СПб: Лань, 1997. – 727 с.

4. *Щипачев В. С.* Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.

5. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I–III. – М.: Высшая школа, 1980.

6. *Рябушко А. П. и др.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. В 3 ч. – Мн. Выш. Шк., 1991.

7. *Веретенников В. Н.* Программа дисциплины “Математика” для высших учебных заведений. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 21 с.

8. *Веретенников В. Н.* Математика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ. – СПб.: изд. РГГМУ, 2010. – 68 с.

9. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра. Учебные пособия. – СПб.: РГГМУ, 2004.

10. *Веретенников В. Н.* Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Индивидуальное домашнее задание. – СПб.: РГГМУ, 2004.

11. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной – СПб.: РГГМУ, 2008. – 254 с.

УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ
Элементы линейной алгебры

Литература

[1], гл. IV; [3], гл. IV; [4], гл. 10; [5], гл. IV; [6], 1; [9], [10].

Основные теоретические сведения

Матрицей $A=(a_{ij})$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов $a_{ij}\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$ некоторого множества. Записывается матрица в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Если у матрицы m строк и n столбцов, то, по определению, она имеет размерность $m\times n$.

Матрицы A и B называются ***равными***, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Матрица размера $n\times n$ называется ***квадратной матрицей*** n-го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ*** матрицы. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется ***определителем матрицы*** и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Матрица E с элементами $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j,\\ 0 \text{ при } i\ne j\end{cases}$ называется ***единичной матрицей*** n-го порядка.

Основные операции над матрицами: сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Произведением матрицы $A=(a_{ik})$ ***размера*** $m\times l$ ***на матрицу*** $B=(b_{kj})$ ***размера*** $l\times n$ называется матрица $C=A\cdot B=(c_{ij})$ размера $m\times n$ с элементами

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj} \qquad (1.1)$$

(поэлементное умножение *i*-й строки матрицы *A* на *j*-й столбец матрицы *B*). Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. Схематически правило для вычисления элементов в произведении двух матриц можно изобразить так:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \otimes & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Преобразование элементов квадратной матрицы, состоящее в замене строк соответствующими столбцами, называется ***транспонированием матрицы***. Для матрицы *A* транспонированную матрицу будем обозначать A^T. В частности, при транспонировании матрица-столбец превращается в матрицу-строку, и наоборот.

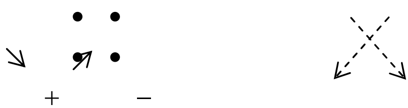
2. ***Определителем*** (***детерминантом***) квадратной матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы **обозначается** $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы второго порядка, схематически можно изобразить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

или



Определителем квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Определитель матрицы 3-го порядка **обозначается**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части последней формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком «плюс», какие – со знаком «минус», можно пользоваться правилом, схематически изображенным следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Определителем матрицы n-го порядка называется сумма всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком «плюс» или «минус» по некоторому правилу. Вычисление определителей выше третьего порядка производится путем использования различных свойств, которыми обладают определители.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель (n–1)-го порядка Δ_{n-1}, полученныйиз определителя n-го порядка Δ_n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. ***Алгебраическое дополнение*** A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рекуррентная формула для вычисления определителя n-го порядка имеет вид

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

(разложение определителя по элементам 1-й строки). Для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной матрицы $A\left(|A| \neq 0\right)$, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E . \qquad (1.2)$$

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, ***нужно выполнить следующие операции***:

1. найти определитель матрицы $A\left(|A|\right)$;

2. составить матрицу из алгебраических дополнений к элементам данной матрицы;

3. транспонировать матрицу из алгебраических дополнений и получить ***присоединенную*** (***союзную***) матрицу A^*;

4. записать

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* . \qquad (1.3)$$

Под ***элементарными преобразованиями матрицы*** понимаются следующие операции: 1) перестановка строк (столбцов); 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля; 3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате элементарных преобразований, называются ***эквивалентными***: $A \sim A_1$.

Рангом матрицы A называется такое число r, что среди миноров r-го порядка матрицы A имеется хоть один, не равный нулю, а все миноры (r + 1)-го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (1.4)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется ***определителем системы***. Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (1.4) выражается ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (1.5)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 или 3-го столбца соответственно свободными членами b_1, b_2, b_3.

Систему можно записать в ***матричной форме***: $A \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид

$$\mathbf{X}=A^{-1}\cdot\mathbf{B}, \qquad (1.6)$$

если определитель системы отличен от нуля.

Метод исключения Гаусса – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного (или ступенчатого) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) неизвестных, находятся все остальные неизвестные.

Из первого уравнения системы (1.4), в которой все члены перенесены в левую часть, выражаем x_1 через остальные неизвестные. Получим

$$x_1=b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}, \qquad (1.7)$$

где $b_{1j}=-\frac{a_{1j}}{a_{11}},\ a_{11}\neq 0,\ 2\le j\le 4$. Исключим из оставшихся уравнений x_1; для этого достаточно подставить значение x_1 из (1.7) во 2, 3 и 4-е уравнения системы (1.4). Тогда придем к системе из двух уравнений, не содержащих x_1:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_{24}^{(1)}=0, \\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+a_{34}^{(1)}=0. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Из способа получения этой системы видно, что $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}+a_{i1}\cdot b_{1j}, i=2, 3$

$2\le j\le 4$. Систему (1.8) можно подвергнуть тому же преобразованию, что и первоначальную. Приходим к уравнению $x_3=b_{34}$. Итак, получаем три уравнения (вида (1.7)), которые объединяем в систему

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}, \\ x_2 = b_{23}x_3 + b_{24}, \\ x_3 = b_{34}. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Из уравнений (1.9) последовательно находим все три неизвестных.

Переход системы (1.4) к равносильной ей системе (1.9) называется ***прямым ходом*** метода Гаусса, а нахождение неизвестных из системы (1.9) – ***обратным ходом.***

На практике процесс решения системы уравнений облегчается тем, что указанным выше преобразованиям подвергают не саму систему, а ***расширенную*** матрицу системы (1.4)

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right), \qquad (1.10)$$

Система (1.4) составлена из коэффициентов уравнений системы и их свободных членов. При этом каждому элементарному преобразованию, проведенному над системой (1.4), соответствует преобразование над матрицей (1.10).

Исследование и решение линейных систем можно проводить по следующей схеме.

1. Составить матрицу A и расширенную матрицу $\widetilde{A}$ из коэффициентов данной линейной системы m уравнений с n неизвестными.

2. Найти ранг r матрицы A данной системы и ранг $\check{r}$ расширенной матрицы $\tilde{A}$.

3. Сравнить ранги указанных матриц и сделать выводы;

а) если $r \neq \widetilde{r}$, то система несовместна (не имеет решений);

б) если $r = \widetilde{r}$, то система совместна (имеет решения).

4. В случае $r = \widetilde{r}$ выделить базисный минор и базисные неизвестные, данную систему заменить равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые входят элементы базисного минора.

5. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных данной системы, то система имеет единственное решение; это решение можно найти по формулам Крамера.

6. В случае $r < n$ из полученной системы, равносильной исходной системе, находим выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, находим бесконечное множество решений полученной и исходной линейных систем.

Число λ называется ***собственным числом*** (***значением***) квадратной матрицы *A*, если существует ненулевой столбец **X** такой, что $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$. Если λ – собственное число матрицы *A*, то всякий столбец **X**, удовлетворяющий условиям $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, называется ***собственным столбцом*** (***вектором***) матрицы *A*, соответствующим собственному числу λ.

При условии, что вектор $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$, получаем ***характеристическое уравнение*** для определения собственных значений λ

$$\left|A - \lambda \cdot E\right| = 0. \qquad (1.11)$$

Координаты собственного вектора $\mathbf{x}_i$, соответствующие собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Пример 1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е . Число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, поэтому определено произведение $A \cdot B$.