

Клейн Феликс

**Элементарная математика с
точки зрения высшей.
лекции, читанные в
Геттингенском университете**

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Ф38

Ф38 **Феликс К.**
Элементарная математика с точки зрения высшей. лекции, читанные в Геттингенском университете: Том 1 / Клейн Феликс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 494 с.

ISBN 978-5-519-89275-9

ISBN 978-5-519-89275-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

АНАЛИЗ

Стр.

I. Логарифмы и показательные функции

1. Систематика алгебраического анализа	215
2. Историческое развитие учения о логарифме	218
Непер и Бюрги: уравнение в конечных разностях	221
XVII столетие: площадь гиперболы	225
Эйлер и Лагранж: алгебраический анализ	227
XIX столетие: функции комплексного переменного	230
3. Некоторые замечания о школьном преподавании	232 ✓
4. Точка зрения современной теории функций	235

II. О тригонометрических функциях

1. Теория тригонометрических функций в связи с учением о логарифме	244
2. Тригонометрические таблицы	245
А. Чисто тригонометрические таблицы	—
В. Логарифмо-тригонометрические таблицы	249
3. Применение тригонометрических функций	262
А. Тригонометрия, в особенности сферическая тригонометрия	263
Основные понятия сферической тригонометрии и формулы первой степени	264
Формулы второй степени, собственные и чуждые	271
Площадь сферического треугольника, дополнительные соотношения сферической тригонометрии	278
В. Учение о небольших колебаниях, в особенности о колебаниях маятника	281
Школьное изложение (скрытый анализ бесконечно-малых)	283 ✓
С. Изображение периодических функций посредством рядов из тригонометрических функций (тригонометрические ряды)	286
Приближения, выраженные конечным числом членов ряда	288
Величина погрешности	294
Сходимость бесконечных рядов	296
Явление Гиббса	299
D. Общее понятие о функциях	301
Историческое значение тригонометрических рядов Фурье	308

III. Исчисление бесконечно-малых в собственном смысле слова

✓ 1. Общие замечания относительно исчисления бесконечно-малых	311
Происхождение исчисления бесконечно-малых и его связь с особенностями наших чувственных восприятий	312
Логическое обоснование исчисления бесконечно-малых посредством понятия о пределе (Ньютон и его последователи до Коши)	316
Введение дифференциала (Лейбниц и его последователи)	321
Реакция против предельных переходов и бесконечно-малых; исчисление производных Лагранжа	328
О преподавании исчисления бесконечно-малых в школе	330 ✓

	Стр.
2. Теорема Тейлора	333
Параболы, соприкасающиеся с данной кривой	334
Оценка погрешности по К ии	339
✓ 3. Замечания исторического и педагогического характера	349
Учебники	—
Характер нашего изложения	351

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Трансцендентность чисел e и π

Исторические замечания	352
Доказательство трансцендентности числа e	354
Доказательство трансцендентности числа π	361
Трансцендентные и алгебраические числа	370

II. Учение о множествах

1. Мощность множества	373
Счетность рациональных и алгебраических чисел	375
Несчетность континуума	379
Мощность континуума высших измерений	382
Множества более высоких мощностей	386
2. Расположение элементов множества	390
Типы расположения счетных множеств	391
Непрерывность континуума	392
Инвариантность числа измерений при непрерывном отображении	394
Заключительные замечания о значении и целях учения о множествах	397
Примыкающие к этому замечания о преподавании в школе	399
Приложение I. Развитие реформы школьного преподавания в Германии	401
Приложение II. Дополнительные сведения о математической и дидактической литературе	419

ДОПОЛНЕНИЯ РЕДАКТОРА

I. План II части („Алгебры“)	436
II. О римановых поверхностях	438
Именной указатель	463
Предметный указатель	467

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Наша литература не богата книгами, в которых столь популярный отдел науки, каким является элементарная математика, подвергаясь бы такому многостороннему и глубокому рассмотрению, какое дает мастерская рука Клейна — одного из крупнейших представителей западной науки, руководившего ее развитием в течение полувека.

В этой книге Ф. Клейн делится с читателем опытом своей многолетней научной и научно-педагогической работы; здесь он приводит в связь целый ряд вопросов, знакомых каждому со школьной скамьи, с вопросами, составляющими предмет тонких специальных исследований.

Не всегда и не всюду мысли Клейна облекаются в общедоступную форму, хотя большая часть мест его книги доступна широкому кругу читателей. Печать неравномерности лежит на этой, как и на других его работах: чувствуется, что много здесь недоработки, много идей как бы брошено вскользь и не развито в должной степени. Издательство, однако, не считало возможным нарушать манеры письма, присущей Клейну. Работа Клейна, является классической, историческая роль ее огромна и читатель вправе требовать, чтобы она была дана ему в том виде, в каком она была написана.

Издательство дает себе отчет и в том, что в книге Клейна немало положений, ошибочных в методологическом отношении. Мирозрение Клейна носит на себе отпечатки различных влияний, даже отпечатки тех течений философской мысли, (например, механизма), противником которых сам Клейн выступает.

Материалистические высказывания его (а таких немало) сплошь и рядом причудливо чередуются с идеалистическими. Выяснить историческую обусловленность этой пестрой картины взглядов, подвергнуть критике неправильные установки автора, и, мало того противопоставить им

целостную картину марксистско-ленинского понимания тех вопросов, о которых пишет Клейн, — такова ближайшая задача нашей критики.

Тот читатель, на которого книга Клейна рассчитана, вряд ли удовлетворился бы, если бы издательство предпослало книге простой перечень взглядов Клейна, которые оно считает ошибочными; в этом он и не нуждается, и такого рода критика была бы здесь, как, впрочем, и в других случаях, неуместна. Для углубленной же и творчески плодотворной критики нужно время.

Мы только что начинаем создавать библиотеку научных работ, на русском языке, и ее создание послужит одним из важных условий подготовки новых научных кадров, в которых мы чувствуем сейчас, такой острый недостаток.

В числе этих научных работ мы издаем и ряд таких произведений, которые отнюдь не являются марксистскими, а иногда и очень далеки от марксизма, но которые, подытоживая важнейшие течения буржуазной мысли, являются в то же время отправной точкой для углубленной марксистской критики. В числе этих работ книга Клейна принадлежит не последнее место.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Лекции, первая часть которых выходит в настоящее время в свет на русском языке во втором издании, были читаны проф. Ф. Клейном в Геттингене в 1907/08 учебном году для будущих учителей средних учебных заведений. Организация этого курса находится в тесной связи с деятельностью Клейна, направленной в последние десять лет к реформированию преподавания математики в средней школе. В чем заключается эта реформа, как она намечается и как осуществляется,—об этом мы поместили подробную статью в предисловии к 1-й части сочинения Бореля-Штеккеля „Элементарная математика“¹⁾.

Так как настоящие лекции Клейна находятся в тесной связи с этой реформой и ее завершению автор посвящает в последнем издании особое приложение (см. приложение I), то необходимо дать здесь о ней хотя бы краткие сведения.

Германия — страна, в которой классицизм пустил более глубокие корни, чем где бы то ни было, и школа филологического типа (гимназия) с обширными программами по древним языкам имела здесь за собою веками освященные традиции единственной общеобразовательной школы, открывающей двери в высшие учебные заведения. Старая германская гимназия давала по математике и естествознанию только совершенно ничтожные сведения. Наполеоновский разгром вызвал в Германии реформу всех устоев общественной и политической жизни, в том числе, конечно, и реформу школы. Под руководством Гумбольдта были выработаны главным, образом Зюверном (J. W. Süvern), новые программы, отводившие много места математике и естествознанию. Планы Гум-

¹⁾ Проф. Э. Борель, Арифметика и алгебра. В обработке проф. Штеккеля. Перевод с немецкого под редакцией приват-доцента Кагана и с приложением его статьи „О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции“.

больша-Зюверна не получили осуществления, но программы математики были расширены, а через некоторое время были учреждены так называемые „реальные гимназии“ с одним древним языком, а позже — „высшие реальные училища“, совершенно свободные от древних языков. Однако все правовые преимущества, в том числе и прямой доступ в высшие школы, были сохранены только за классическими гимназиями.

Признать образование, основанное на естествознании и математике, совершенно равноправным с классическим — таково было первое требование реформаторов, возглавляемых Клейном.

Второе основное положение Клейна, которое поддерживали все сторонники реформы, заключалось в тесном сближении теоретических частей с прикладными. Вместе с физиком Рикке Клейн повел в этом направлении широкую пропаганду. Наиболее яркое выражение она получила в сочинении „О прикладной математике и физике“, составленном обоими руководителями движения¹⁾.

Теперь обратимся к вопросу о программах и методах преподавания математики в средней школе, как их себе представляли руководители реформистского движения. „Вряд ли есть предмет, — говорит Ф. Клейн, — в преподавании которого царил бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. От времени до времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии — отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких, которые могли бы сделаться достоянием не-

¹⁾ F. Klein und E. Rick e, Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht in den höheren Schulen, Leipzig 1900. „Höhere Schule“ — термин, соответствующий нашей „средней школе“ (в отличие от „Hochschule“ — „высшая школа“).

специалистов, предметом общего образования. Между тем это далеко не так. Математика XIX столетия, несомненно, принесла с собою огромный ряд замечательных идей, которые наложили глубокий отпечаток на все отрасли знания и техники, на господствующие философские воззрения, даже, выражаясь подлинными словами Клейна, „на весь строй нашей культуры“. Совершенно недопустимо поэтому, чтобы общеобразовательная школа была целиком чужда всему тому, что составляет подлинное содержание современной математики.

Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о функции. Изучение функции составляет предмет, можно сказать, всей высшей математики; установление функциональной зависимости между различного рода факторами составляет задачу прикладной математики. Между тем в программу средней школы понятие о функции почти вовсе не входит, о нем вскользь упоминают в тригонометрии, даже аналитическая геометрия, как уверяет Клейн, в немецкой школе преподается так, что понятие о функции остается в тени.

Здесь именно должна начаться реформа. Понятие о функции должно играть основную, так сказать, руководящую роль в курсе средней школы. Понятие это должно быть выяснено учащимся очень рано и должно проникать все преподавание алгебры и геометрии. Сначала нужно выяснить это понятие графически, начиная с простейших частных примеров; затем нужно приводить многообразные примеры функциональной зависимости из повседневной жизни; наконец, нужно изучить простейшие алгебраические функции: линейные, квадратные и т. д., приучить учащихся исследовать ход их изменения, их особенные (критические) точки. При этом нужно заставлять учащихся самих вычерчивать соответствующие кривые, пользоваться клетчатой бумагой и т. д. В конечном результате каждая кривая, каждое алгебраическое выражение должно претворяться в уме юноши в некоторую функциональную зависимость. Приверженцы реформы придумали даже новый термин—„funktionales Denken“; переведем его дословно—„функциональное мышление“, хотя слово „функциональный“ у нас употребляется обыкновенно в ином значении.

Так вот, — развить в юноте способность к функциональному мышлению составляет основную задачу реформы. Клейн подчеркивает при этом, что здесь дело отнюдь не должно сводиться к тому, чтобы дать учащемуся определение функции. „Учеников многому учат, — говорит Клейн, — и немало чего они выучивают; но немногое действительно становится достоянием их ума“. Нужно, чтобы понятие о функции и его значение в математике и в ее элементарных приложениях было вполне усвоено учащимися, — нужно, чтобы оно проникало собою все преподавание в школе.

Но изучение функций, их возрастания и убывания необходимо и естественно приводит к понятию о производной. Это вызывает следующее требование реформаторов: в программу средней школы должны быть внесены элементы высшей математики. В каком объеме, в какой последовательности это должно быть сделано, это должно зависеть отчасти от типа учебного заведения, отчасти от преподавателя; но это должно быть, во всяком случае, сделано. Это мотивируется следующим образом.

Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления играют в настоящее время такую роль во всех отраслях и приложениях математики, что обойтись без них совершенно невозможно. В механике при определении понятий о скорости, об ускорении, о центробежной силе, во всевозможных отделах физики, которые проходятся в средней школе, мы фактически оперируем производными; почему же не называть их настоящим именем. Клейн высказывает убеждение, что искусственные приемы, к которым прибегают в каждом частном случае, чтобы избежать понятия о производной и об интеграле, только сбивают учащихся, создают в их голове путаницу и даже отнимают много лишнего времени. Было бы гораздо проще и продуктивнее выяснить эти понятия в общем виде, а потом уже пользоваться ими в приложениях. Еще целесообразнее вводить их, так сказать, по требованию этих приложений, но не маскируя, не создавая ложных и чисто внешних упрощений.

Обширные дискуссии, развернувшиеся на почве всех этих положений, не утратили интереса по сей день, но мы лишены возможности приводить их здесь.

Однако необходимо указать еще одно требование реформы, которое справедливо выдвигалось как одно из основных положений.

Преподавание должно быть наглядным. Выдвигая это требование со всей настойчивостью, Клейн, однако хорошо понимает, как легко его утрировать, как трудно его провести во всей чистоте; он и останавливается поэтому подробно на выяснении того, что он, собственно, под этим разумеет. Он полагает, что на первых ступенях преподавания надо отказаться от строго логических тенденций; нужно возможно больше наглядных представлений, возможно большее число примеров из повседневной жизни. Особенно ценным Клейн и его приверженцы считают графическое изображение алгебраических функций. Он считает необходимым, чтобы учащиеся сами вычерчивали такого рода изображения, чтобы они широко пользовались клетчатой бумагой, чтобы они знакомились с термометрическими, барометрическими, статистическими кривыми, с графиками железных дорог и т. п. При всем том Клейн настаивает, чтобы в течение последних двух лет обучения логическая сторона дела по возможности достаточно выяснялась. Следующее его положение мы считаем необходимым привести в подлинных его выражениях: „Во всяком случае нужно решительно избегать выдавать за доказательство такого рода соображения, которые решительно не представляют собой такового“.

Итак, отказ от господства филологической школы в пользу изучения естествознания и математики, углубление связи между теоретической и прикладной математикой, введение в преподавание математики функционального мышления, начал дифференциального и интегрального исчисления, наглядное обучение и прежде всего широкое применение графических методов — вот те принципы, которые Клейн и его последователи считали необходимым положить в основу реформы преподавания математики в школе. В условиях политической жизни монархической Германии это было весьма прогрессивное движение. Многие из этих тенденций было осуществлено и у нас в советской школе.

В связи с этими взглядами, с борьбой за проведение

их в жизнь Клейн прочел в геттингенском университете ряд курсов для преподавателей. Одни из этих курсов и воспроизводят настоящие лекции. В оригинале они первоначально появились в свет в литографированном виде, выдержали даже два литографированных издания. В 1921—1923 гг. издательство Шпрингера в Берлине выпустило в свет собрание математических мемуаров Клейна¹⁾. Исслед за этим та же фирма приступила к изданию многочисленных лекций Клейна, которые до того существовали только в литографированном виде. Многие из этих лекций представляют выдающийся интерес.

Государственное технико-теоретическое издательство решило выпустить в свет на русском языке наиболее важные из этих изданий, именно: „Лекции по неевклидовой геометрии“, „Лекции по высшей геометрии“ и, наконец, „Элементарная математика с точки зрения высшей“ в трех томах. Первый том, посвященный арифметике, алгебре и анализу, был выпущен на русском языке еще в 1912 г. под редакцией пишущего эти строки. Настоящее, второе, русское издание обработано по печатному (3-му) немецкому изданию.

Лекции Клейна представляют собой, несомненно, редкий вклад в учебную математическую литературу. Некоторые главы представляют собой настоящие перлы, тем более ценные, что ни в каком другом сочинении их в подобной обработке нельзя найти: многое заимствовано непосредственно из научных мемуаров, из обширных исторических сочинений, малодоступных или даже вовсе недоступных тому читателю, для которого предназначены лекции Клейна. Мало того, книга интересна отнюдь не только для учителя, а местами, пожалуй, и вовсе не для учителя. Она интересна для всякого лица, закончивающего высшее математическое образование, для аспиранта—она дает ему такой обзор руководящих идей, проникающий

¹⁾ F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, in drei Bänden. Bd. I. Liniengeometrie—Grundlegung der Geometrie—Zum Erlangerer Programm, Berlin 1921. Bd. II. Anschauliche Geometrie—Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie—Zur mathematischen Physik, Berlin 1922. Bd. III. Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Rimanische Funktionentheorie und automorphe Funktionen, Berlin 1923.