

**А. И. Лурье**

**Операционное исчисление и  
его приложения к задачам  
механики**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
А11

А11 **А. И. Лурье**  
Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А. И. Лурье – М.: Книга по Требованию, 2013. – 432 с.

**ISBN 978-5-458-28855-2**

Первое издание этой книги, написанной в 1936 г., вышло в свет в 1938 г. Примерно в течение десяти лет она и книга А. М. Эфроса и А. М. Данилевского „Операционное исчисление и контурные интегралы" служили основными руководствами на русском языке по операционному исчислению и, по-видимому, в значительной мере способствовали популяризации в широких научно-технических кругах этого простого и могучего средства математического исследования прикладных вопросов. В последние два года на эту тему появилось несколько отечественных и переводных книг, в том числе превосходная книга М. И. Конторовича „Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях". В последние годы автор неоднократно читал курс операционного исчисления инженерам, работавшим в различных областях машиностроения и приборостроения и интересовавшимся главным образом вопросами исследования систем автоматического регулирования. В настоящем издании отражен этот опыт преподавания, а также лично.

**ISBN 978-5-458-28855-2**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



- 1°. Дифференциальные уравнения малых колебаний консервативной системы (110). 2°. Рассмотрение кратных корней характеристического уравнения (111). 3°. Составление решения для случая простых корней (112). 4°. Замечание о форме решения при наличии кратных корней в случае системы с рассеянием энергии (113).
- § 11. Составление характеристического уравнения по методу А. Н. Крылова . . . . . 115  
 1°. Решение изображающей системы методом исключения неизвестных (115). 2°. Замечание о случае кратных корней (118). Пример (118).
- § 12. Интегралы от произведений решений . . . . . 121  
 1°. Постановка задачи и приведение её к вычислению сумм  $S$  (121). 2°. Произведения  $R$  и  $R_\lambda$  (124). 3°. Сведение задачи к вычислению некоторых симметрических функций коэффициентов полинома  $\Delta(p)$ . Случай полиномов третьей и четвертой степени (127). 4°. Доказательство обращения в нуль сумм  $S_{2k+1}$  (130).
- § 13. Интегрирование неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами . . . . . 132  
 1°. Решение для произвольных правых частей (132). 2°. Действие единичного импульса (133). 3°. Действие периодических возмущающих сил. Построение периодического решения в замкнутой форме (133). 4°. Условия существования и форма периодического решения в исключительных случаях (нулевой корень, пара чисто мнимых корней характеристического уравнения) (137). 5°. Случай периодических сил, меняющих знак через полупериод (139). 6°. Каноническая система уравнений теории автоматического регулирования (140). 7°. Вынужденные колебания консервативной динамической системы (143).
- § 14. Основные формулы операционного исчисления для ступенчатых функций . . . . . 145  
 1°. Теорема упреждения (147). 2°. Теорема запаздывания (148). 3°. Изображение  $e^{\beta|a|} f[x]$  (148). 4°. Теорема свёртывания (148). 5°. Дифференцирование изображения (149). 6°. Изображение  $[x]^n$  (149). 7°. Факториальная функция (149). 8°. Показательная функция (150). 9°. Аналог первой теоремы разложения (151). 10°. Вторая теорема разложения (151).
15. Решение линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами . . . . . 153  
 1°. Построение изображающего уравнения (153). 2°. Примеры (155).

### Глава III. Приложения операционного исчисления к задачам механики и сопротивления материалов

#### § 16. Колебания простейшего вибратора . . . . . 159

1°. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Графически заданный закон изменения силы (трапеция). Повторяющиеся импульсы противоположного направления. Общий случай периодической силы и условия возникновения периодического движения (159). 2°. Свободные колебания вибратора (163). 3°. Вынужденные колебания вибратора. Действие синусоидальной силы и случай резонанса (163). 4°. Движение вибратора под действием периодически повторяющихся импульсов. Разыскание периодического движения. Выделение свободных колебаний (164). 5°. Случай импульсов противоположного направления (167). 6°. Вынужденные колебания вибратора под действием выпрямленной синусоидальной силы. Выделение свободных колебаний (171). 7°. Общий случай какой угодно периодической силы. Выделение вынужденных и свободных колебаний (174).

#### § 17. Движение вибратора при наличии силы сопротивления 178

1°. Свободные колебания (178). 2°. Вынужденные колебания. Случай синусоидальной возмущающей силы (179). 3°. Оценка модуля отклонения при произвольной ограниченной по модулю возмущающей силе (181). 4°. Свободные колебания вибратора при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, и силы сухого трения (182). 5°. Вынужденные колебания под действием периодически прикладываемых импульсов. Исследование движения (185). 6°. Случай импульсов противоположного направления. Автоколебания в схеме маятника со спусковым механизмом (191). 7°. Действие на вибратор возмущающей силы, имеющей постоянную величину при движении вибратора „вперед“ и обращающейся в нуль при движении „назад“. Разыскание автоколебательного режима (194). 8°. Расчет качки корабля на неправильном волнении (198).

#### § 18. Применение операционного исчисления к задачам об изгибе стержней . . . . . 202

1°. Основные уравнения теории изгиба стержней. Изображение сосредоточенных сил и моментов (202). 2°. Примеры. Консольный стержень ступенчатого поперечного сечения. Опёртый по краям стержень

ступенчатого поперечного сечения. Консольный стержень с промежуточной опорой (204). 3°. Изгиб стержня, сжатого продольной силой (209). 4°. Изгиб балки, лежащей на сплошном упругом основании (211).

- § 19. Применение операционного исчисления к задаче изгиба тонкой плиты . . . . . 214  
 1°. Симметрично нагруженная круглая плита (214).  
 2°. Несимметрично нагруженная круглая плита. Круглая плита с защемлённым краем под действием сосредоточенной силы (218). 3°. Пример расчёта кольцевой круглой плиты (224). 4°. Изгиб прямоугольной плиты, два параллельных края которой опёрты (226).  
 5°. Представление нагрузки в форме ряда по синусам. Случай нагрузки, распределённой по прямой (228).  
 6°. Бесконечная полоса, нагруженная сосредоточенной силой (230). 7°. Полоса, нагруженная бесконечным рядом сил (231).
- § 20. Деформация кругового кольца . . . . . 234  
 1°. Плоская деформация кольца (234). 2°. Интегрирование уравнений равновесия (237). 3°. Интегрирование уравнений для перемещений (242). 4°. Неплоская деформация кругового кольца. Интегрирование уравнений равновесия (248). 5°. Интегрирование уравнений для перемещения и угла закручивания (250).
- § 21. Применение разностных уравнений к решению некоторых задач сопротивления материалов . . . . . 254  
 1°. Задача Н. Е. Жуковского о распределении усилий на нарезах винта и гайки (254). 2°. Обобщённая задача Н. Е. Жуковского (261).

#### Глава IV. Механические системы с конечным числом степеней свободы

- § 22. Струна с сосредоточенными массами . . . . . 268  
 1°. Задача Лагранжа о свободных колебаниях  $n$  масс, закреплённых на невесомой струне (268). 2°. Вынужденные колебания масс (274). 3°. Фильтр механических колебаний (277). 4°. Задача Н. Е. Жуковского о распространении натяжения в цепных пружинах при пуске поезда в ход (280).
- § 23. Крутильные колебания однородного двигателя с маховиком . . . . . 286
- § 24. Продольное движение самолёта . . . . . 295  
 1°. Свободные колебания самолёта при малом возмущении режима горизонтального прямолинейного

полёта (295). 2°. Вынужденные колебания (299).  
3°. Периодический режим движения самолёта при  
действии на него периодических сил (302).

#### Глава V. Механические системы с бесконечным числом степеней свободы

- § 25. Колебания струны. Продольные колебания стержня. 305  
1°. Свободные колебания струны (305). 2°. Движение точечной массы, закреплённой на натянутой струне. Определение движения по последовательным этапам. Представление решения в форме ряда (313). 3°. Колебания струны под действием перемещающейся вдоль неё силы (317). 4°. Продольные колебания стержня с грузом на конце (320). 5°. Случай приложения к грузу периодически повторяющихся импульсов (322).
- § 26. Продольный удар цилиндров . . . . . 324  
1°. Составление и решение изображающих уравнений (324). 2°. Пример одинаковых цилиндров (326). 3°. Второй пример: ударяющий цилиндр имеет вдвое большую длину (328).
- § 27. Продольный удар груза по балке . . . . . 330  
1°. Решение изображающих уравнений (330). 2°. Нахождение усилия в месте удара. Выражение решения с помощью специальных полиномов, выражающихся через полиномы Лагерра (332). 3°. Определение перемещения (334). 4°. Продольное усилие в заделанном сечении (335). 5°. Стержень со свободными концами (336).
- § 28. Гидравлический удар в трубопроводе . . . . . 336  
1°. Уравнения одномерного течения идеальной, слабо сжимаемой жидкости. Изображающие уравнения (336). 2°. Простейшая задача о гидравлическом ударе в трубопроводе (338). 3°. Гидравлический удар при наличии в выходном сечении пружинного клапана, регулирующего сток жидкости (340). 4°. Движение клапана в случае резкого изменения давления во входном сечении трубопровода (343). 5°. Периодическое изменение давления во входном сечении (345).

#### Глава VI. Общая формула обращения и её приложения

- § 29. Формула обращения . . . . . 351  
1°. Формулировка задачи обращения и формула обращения (351). 2°. Вывод формулы обращения из интегральной формулы Фурье (352). 3°. Представление изображения в форме интеграла Лапласа как следствия определения начальной функции с помощью

формулы обращения (353). 4°. Независимость значения интеграла в формуле обращения от выбора постоянной  $\sigma$  (355). 5°. Обращение начальной функции в нуль при  $t < 0$ . Первая формулировка леммы Жордана (356). 6°. О необходимости проверки результата, получаемого по формуле обращения (358). 7°. Изменение пути интегрирования в формуле обращения. Вторая формулировка леммы Жордана (359).

§ 30. Изображение дробной степени и логарифма. Правило Хевисайда . . . . . 361

1°. Изображение дробной степени (361). 2°. Частный случай: степень равна целому числу с половиной (363). 3°. Изображение логарифма (365). 4°. Правило Хевисайда (366). 5°. Начальная функция для  $e^{-a\sqrt{p}}$ . Интеграл вероятности (367). 6°. Некоторые другие изображения (368).

§ 31. Асимптотическое представление начальной функции 369

1°. Ограничение рассматриваемого класса изображений (369). 2°. Разложение в области особой точки (373). 3°. Случай точки разветвления ( $r = 2, m = 0$ ) (374).

4°. Случай полюса (375). 5°.  $F(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{p}}}$ . Асим-

птотическое представление интеграла вероятности.

$F(p) = \frac{p\sqrt{p}}{\omega^2 + p^2}$ . Интегралы Френеля. Их асимптотическое

представление (375). 6°. Асимптотическое представление функции Бесселя  $J_0(t)$  (378).

§ 32. Изображение некоторых функций . . . . . 379

1°. Определение начальной функции для изображения  $F(\sqrt{p})$ , когда известна начальная функция  $f(t) \leftrightarrow F(p)$  (379). 2°. Та же задача для  $F\left(\frac{1}{p}\right)$  (381).

3°. Преобразование А. М. Эфроса (382). 4°. Изображение бесселевой функции  $J_n(t)$  (384). 5°. Начальная функция для изображения  $\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}$

(386). 6°. Начальная функция для изображения

$\frac{p}{p^2+1} F(\sqrt{p^2+1})$  (388).

## Глава VII. Различные приложения

- § 33. Приложение операционного исчисления к решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений 389
- 1°. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом и с ядром, зависящим от разности аргументов (389). 2°. Обобщение на случай интегро-дифференциального уравнения (390). 3°. Задача Абея (391). 4°. Применение к задачам наследственной теории упругости (391). 5°. Падение шара в вязкой жидкости при сопротивлении по закону Буссинеска (393). 6°. Маятниковые колебания шара в вязкой жидкости (396). 7°. Задача Н. Е. Жуковского о прочности велосипедного колеса (399).
- § 34. Поперечные колебания стержней . . . . . 403
- 1°. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня (403). 2°. Колебания двухпорной балки при внезапном нагружении сосредоточенной силой (404). 3°. Действие внезапно прикладываемого изгибающего момента на балку неограниченной длины (409). 4°. Случай мгновенно прикладываемой силы (412). 5°. Поперечный удар груза по балке (414). 6°. Колебания бесконечной балки, лежащей на упругом основании (416).
- § 35. Поперечные колебания неограниченной круглой плиты . . . . . 419
- 1°. Общее решение изображающего уравнения (419). 2°. Колебания неограниченной плиты под действием сосредоточенной силы (421). 3°. Начальные функции для изображений  $K_0(2\sqrt{s})$ ,  $\ker(2\sqrt{s})$ ,  $\ker(2\sqrt{s})$  (422). 4°. Частный случай мгновенно прикладываемой и остающейся постоянной силы (423). 5°. Неограниченная плита на упругом основании. Движение точки приложения силы. Действие синусоидальной силы. Интегралы Вебера (425). 6°. Нахождение начальной функции в любом месте. Случай синусоидальной силы. Вычисление некоторых интегралов, содержащих бесселевы функции (427).
- Литература по операционному исчислению . . . . . 432

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание этой книги, написанной в 1936 г., вышло в свет в 1938 г. Примерно в течение десяти лет она и книга А. М. Эфроса и А. М. Данилевского „Операционное исчисление и контурные интегралы“ служили основными руководствами на русском языке по операционному исчислению и, повидимому, в значительной мере способствовали популяризации в широких научно-технических кругах этого простого и могучего средства математического исследования прикладных вопросов. В последние два года на эту тему появилось несколько отечественных и переводных книг, в том числе превосходная книга М. И. Конторовича „Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях“.

В последние годы автор неоднократно читал курс операционного исчисления инженерам, работавшим в различных областях машиностроения и приборостроения и интересовавшимся главным образом вопросами исследования систем автоматического регулирования. В настоящем издании отражен этот опыт преподавания, а также личного участия автора в работе в указанной технической области.

Книга состоит из семи глав, содержание которых передано в подробном оглавлении. В первой главе дается определение лапласова преобразования и вывод его основных свойств и приводятся изображения простейших функций (целой степени, показательной и тригонометрических функций). Во второй главе рассматривается задача интегрирования линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Два параграфа этой главы посвящены приложению операционного исчисления к функциям целочисленного аргумента и разностным уравнениям. Третья, четвертая и пятая главы трактуют разнообразные приложения

и иллюстрируют многообразие и богатство технических задач, разрешимых с помощью указанного выше весьма ограниченного класса функций. Эти главы преследуют цель показать операционное исчисление в действии, приучить и привлечь читателя к практическому овладению этим методом и показать, что этого легко добьётся всякий, кто не поспеет затратить на это необходимое время. Интересно отметить, что на протяжении первых пяти глав вычислен лишь один интеграл:

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = 1.$$

Более сложный по математическому содержанию материал изложен в шестой и седьмой главах. От читателя этих глав требуется знакомство с основными положениями теории функций комплексного переменного и знание некоторых специальных функций. Ни объём, ни характер этой книги не позволили развить поставленные в этих главах задачи с большей полнотой. Здесь ставилась скорее цель дать читателю необходимую ориентировку в вопросе, чем приучить его к фактическому использованию этих более сложных средств операционного исчисления.

Настоящее второе издание является по существу новой книгой. Многие из того, что было в первом издании, здесь исключено, но зато добавлен ряд новых параграфов. Наиболее важное дополнение представляет изложение метода построения в замкнутом виде периодических решений дифференциальных уравнений и многочисленных приложений этого метода. Из других добавлений укажем на упомянутые выше задачи, относящиеся к разностным уравнениям, на задачу о вычислении интегралов от квадратов решений системы линейных уравнений и на ряд новых задач теории колебаний и сопротивления материалов. По существу, вся книга написана заново: от текста первого издания не осталось ни одного параграфа, который не был бы целиком переработан.

Во всём изложении строго проводится точка зрения на операционное исчисление как на средство обращения операций анализа в области начальных функций в алгебраические операции в области изображения этих функций. Слово „оператор“ в тексте книги употребляется в осторожной форме; автор

стремился всеми средствами привить читателю взгляд, что  $p$  — это такое же число, как и всякое другое; последовательное проведение этой точки зрения представляется весьма важным, так как во многих работах она часто не подчеркивается с достаточной определённой, от чего происходят многие недоразумения, а иногда и прямые ошибки.

Книга написана инженером для инженеров. Поэтому автор старался не выходить за ту грань, за которой математическая полнота и строгость доказательств становятся обременительными для читателя и теряется преимущество простоты и доступности метода. Вместе с тем, там, где это нужно, указывается, что данный вопрос нуждается в математическом уточнении и дается источник, из которого читатель может получить необходимые дополнительные разъяснения.

Первая цифра нумерации формул указывает номер главы. При ссылке на формулу данной главы номер главы не указывается. Номер указывается полностью при ссылке на формулу предшествующей главы.

---

Автор приносит искреннюю благодарность Г. Ю. Джанелидзе за ряд сделанных им ценных замечаний.

*Автор*

Ленинград  
декабрь 1949 г.

---

