

А.Я. Милович

Основы динамики жидкости

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
А11

А11 **А.Я. Милович**
Основы динамики жидкости / А.Я. Милович – М.: Книга по Требованию, 2021. – 159 с.

ISBN 978-5-458-58143-1

ISBN 978-5-458-58143-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Предисловие

Предлагаемое вниманию читателей настоящей книги сжатое изложение основ учения о движении непрерывной жидкой среды имеет своей главной целью возможно простое выяснение тех методов, помощью которых мы можем приблизиться к лучшему пониманию сущности механических явлений, происходящих в окружающих нас жидкостях.

При этом для сокращения объема книги основные уравнения гидродинамики, получившие в настоящее время весьма широкое распространение в литературе, приведены здесь без обычных для них выводов. И наоборот, более подробно изложен материал или редко встречаемый, или совершенно оригинальный.

Но чтобы сжатость изложения не нанесла ущерба его ясности, особенно важной в столь трудной для нашего понимания области познания природы, мной точно вычислены и вычерчены согласно их уравнениям все приводимые здесь случаи движений жидкости, так как никакое, самое подробное описание их не может дать того, что дает их точный чертеж.

Такой способ изложения своей необычайной наглядностью не только предохраняет нас от возможных ошибок чисто абстрактного мышления, но и облегчает непосредственное сравнение воспроизводимых нами теоретических картин движений жидкости с картинками их, получаемыми прямым опытом. А это сравнение важно потому, что только степень соответствия опыту дает нам мерило правильности наших суждений о реальных явлениях.

Читатель увидит далее, что это стремление к возможной реализации наших теоретических построений вынуждает нас приписывать источникам не только обычно приписываемый им чисто кинематический, но также и совершенно определенный динамический смысл, так как действительное воспроизведение явления выбрасывания или всасывания жидкости невозможно без затраты на него точно определенной энергии или работы. Поэтому каждая система источников является местом поглощения или рассеяния в окружающей жидкости ее энергии.

Таким же рассеивателем энергии, но только в виде энергии вихревого движения, является, на наш взгляд, согласно § 12 также и каждый незамкнутый вихревой шнур конечной длины, правильность чего подтверждается содержанием § 14.

В третьем примере § 20 показано, как мы можем находить силу взаимодействия системы источников и окружающей их массы жидкости.

Согласно сказанному на систему источников и в частности на простейший вид ее *Dipol* мы смотрим как на носителей энергии, добавочной для энергии окружающей их жидкой среды и в последней рассеивающейся.

Рассеяние этой добавочной энергии дает нам то, что мы называем сопротивлением жидкой среды движущемуся в ней телу или, наоборот, потерей жидкостью энергии при обтекании какого-либо тела. Ясно, что с этой точки зрения величина сопротивления обуславливается, главным образом, формой движения жидкости вблизи тела.

А справедливость подобного взгляда на происходящие здесь явления лучше всего доказывается тем, что, реализовав ту или иную систему источников, соответствующую форме тела, мы прямым опытом получим все явление движения жидкости вблизи обтекаемого тела, в отсутствии самого тела, как то подробнее и с изложением чисто опытного материала будет показано нами в следующей работе „Теории деления и соединения потоков жидкости“.

Другим доказательством справедливости нашего взгляда на источники и разомкнутые вихревые шнуры конечной длины, как на носителей добавочной для жидкой среды энергии, является полное тождество картины их линий токов и вихрей силовым линиям электрических и магнитных полей, особенно в поле плоского конденсатора.

Очевидно, что во всех случаях наличия в жидкой среде источников или конечных разомкнутых вихрей полный запас энергии жидкой среды не будет постоянен в различных ее точках, и вблизи подобных рассеивателей энергии постоянное уравнение Д. Бернулли явится величиной переменной или самого интеграла Д. Бернулли не будет существовать, как то видно из § 13.

Этот же параграф указывает на то, что постоянство энергии жидкой среды возможно, но только для винтовых движений жидкости и, как частный их случай, для движений невихревых.

Это принципиально важное обстоятельство настоятельно требует от гидродинамики широкого развития анализа винтовых движений как форм движений, наиболее близко соответствующих действительным движениям реальных жидкостей.

Замечательные свойства подобных движений наряду с полным отсутствием изложения их во всей литературе по гидродинамике заставило нас уделить рассмотрению их пять параграфов настоящей работы.

В § 15 мы знакомимся с основными особенностями винтового движения жидкости, т. е. движения ее, при котором линии вихрей во всех своих точках совпадают с линиями токов.

Из его содержания видно, что при подобном движении жидкости:

1) Во всей массе жидкости имеет место интеграл постоянства энергии ее частиц: $H = \text{const.}$

2) Поверхности, ортогональные к траекториям, невозможны.

3) Отношение поступательной скорости движения частицы к угловой скорости ее вихревого вращения — величина постоянная.

4) Невихревое движение жидкости с потенциалом скоростей является частным случаем движения винтового.

При подобных движениях жидкой среды каждая частица ее не только движется поступательно по своей траектории, но и вращается вокруг оси касательной к этой траектории в точке положения самой частицы.

Результатом этого вращения является сдвиг последовательных слоев жидкости относительно друг друга в направлении, нормальном к поступательной скорости, что порождает движение всей ее массы в плоскости, нормальной к основному направлению.

§ 16 дает нам простейшую картину подобного плоского движения потока жидкости неограниченной ширины, параллельного горизонтальной плоскости дна.

Из него мы видим, что направление движения каждого слоя жидкости является функцией расстояния его от дна или глубины.

Различные слои движутся здесь в различных направлениях, хотя и с равными скоростями, почему изменение с глубиной скорости по какому-либо одному направлению отнюдь не связано еще с потерей энергии потока на „трение о дно“, как то мы обычно себе представляем, но поглощается движением его в ином направлении.

Поэтому теория винтового движения жидкости впервые в науке дает нам новую и более рациональную основу для исследования движений реальных жидкостей.

Так § 16 дает простейшую схему рационального обоснования учения о движении жидкости в широких речных потоках и воздуха земной атмосферы, позволяя нам находить картину распределения скоростей по вертикалям одним опытным определением постоянных выражений этих скоростей, т. е. формы исследуемого движения жидкости, не прибегая более к мало обоснованным гипотезам торможения водной поверхности воздухом атмосферы и т. д.

§ 17, 18 и 21 дают уже более полные решения вопросов об истинной форме движения потока жидкости, ограниченной ширины, при протекании его вдоль по каналам прямоугольного и кругового поперечного сечения. Они показывают нам с особой ясностью наиболее характерную особенность всех подобных движений, состоящую во вращении потока вокруг своей продольной оси, причем кинетическая энергия этого движения в точности равна кинетической энергии продольного течения.

Таким образом, принимая в расчет до настоящего времени одну кинетическую энергию продольного движения потоков, мы учитывали только половину действительной кинетической энергии жидкости, что не могло не приводить в конечном итоге к значительному расхождению результатов опыта с выводами подобных теорий.

§ 18 и 19 показывают, что теория винтового движения жидкостей раскрывает нам „смысл числа Рейнольдса“ и, давая связь его с полным запасом энергии жидкой среды, тем самым вводит эту чисто опытную оценку ее вихревого состояния в строго логическую систему всей остальной гидродинамики. Она показывает, что „число Рейнольдса“ представляет секундную работу сил вязкости, отнесенную к единице кинематической вязкости и вихревого напряжения, и дает нам меру поглощения энергии жидкой среды ее вихревым движением.

Наконец, она дает несомненную возможность значительного проникновения в механизм „турбулентности“, как в механизм обертонів при распространении звука, почему есть основание думать, что изучение этого

вида движений действительно приблизит нас к истинному пониманию наблюдаемых нами в жидкостях явлений.

Это убеждение является, на наш взгляд, тем более законным, что, как показывает содержание § 19 и 21, форма винтового движения жидкости независима от ее вязкости, большая или меньшая степень которой обуславливает здесь только величину сопротивления рассматриваемому нами виду движения.

Подобное свойство винтовых движений, позволяющее нам исключить необходимость прямого интегрирования уравнений вязкой жидкости Навье-Стокса и рассматривать все жидкости как идеальные, совершенно лишенные вязкости, т. е. сопротивления своему движению, находится в полном и удивительном согласии с аналогичными им электромагнитными явлениями, где электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и не зависят в своем существовании от наличия сопротивлений. Невольно возникает мысль, что в гидроэлектрической аналогии мы имеем большее, чем простую аналогию формул, что было бы вполне естественным, так как в конечном итоге эти оба отдела человеческого познания природы занимаются изучением проявления свойств того, что мы называем энергией.

Но говоря о „вязкости жидкости“ соответственно ее ньютонову представлению, мы избегаем вводить весьма неопределенное понятие „трения“, ибо, на наш взгляд, этим комплексным понятием мы характеризуем все то, что остается неизвестным для нас в рассматриваемом явлении и что может в равной мере относиться как к эффекту вязкости, так и к эффекту формы движения.

А. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

На основании положения механики твердого тела, что сила R , вызывающая движение тела массы m с ускорением J , равна

$$R = mJ,$$

общие уравнения движения бесконечно малой частицы жидкости напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где u , v , w — слагающие скорости частицы в точке m , параллельные декартовым осям координат x , y , z (фиг. 1); X , Y и Z — ускорения по тем же осям внешних объемных сил; ρ — плотность жидкости в точке m ; p — давление в ней; t — время.

Все величины, входящие в уравнения (1), являются вообще функциями четырех независимых переменных координат точки m — x , y , z и времени t .

Но для одной и той же частицы жидкости координаты точки x , y , z сами являются функциями времени t , почему в этом случае полные производные по времени от u , v и w и уравнения (1) напишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

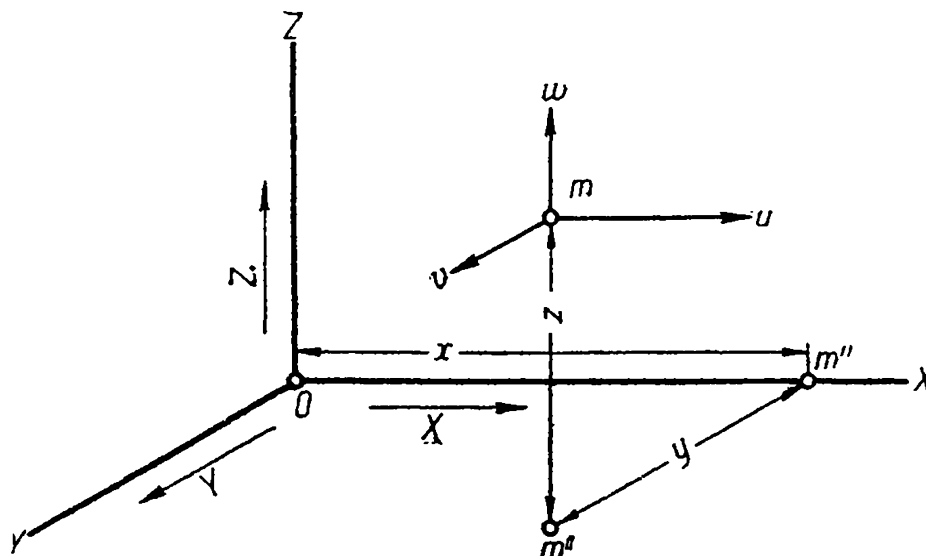
Уравнения (2) представляют уравнения движения частицы жидкости в форме Эйлера.

Пять неизвестных функций, входящих в эти уравнения, u , v , w , p и ρ должны быть непрерывными, конечными и однозначными функциями координат x , y , z и времени t .

Условие непрерывности этих функций требует непрерывного заполнения пространства жидкостью, что выражается выполнением уравнения непрерывности или неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

К этой системе четырех уравнений с пятью неизвестными для определенности задачи нахождения вида движения жидкости необходимо прибавить еще одно уравнение между теми же неизвестными.



Фиг. 1.

Таким пятым уравнением будет уравнение, характеризующее физические свойства рассматриваемой жидкости, называемое характеристическим уравнением.

Для каждой жидкости физика дает его в виде определенной функциональной связи между давлением p , плотностью ρ и температурой τ жидкой среды:

$$F(p, \rho, \tau) = 0.$$

Так, для:

1) капельных, несжимаемых жидкостей постоянной температуры (вода, масло и т. д.):

$$\rho = \text{const}; \quad (4)$$

2) совершенных газов, следующих законам Мариотта и Гей-Люссака:

$$\frac{p}{\rho(1 + \alpha\tau)} = \text{const}; \quad (4')$$

3) адиабатического расширения газа:

$$p = k\rho^\gamma, \quad (4'')$$

где α — коэффициент расширения, k и γ — постоянные газа, причем γ есть отношение удельной теплоты газа при постоянном давлении к удельной теплоте при постоянном объеме $\gamma = 1,408$.

Совокупность уравнений (2), (3) и одного из характеристических уравнений дает полную систему уравнений непрерывного движения частицы жидкости.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Для выяснения формы движения массы жидкости в каждом отдельном случае при известных уже функциях p , ρ , u , v , w строят системы вообразаемых поверхностей и линий, обладающих каждая определенными свойствами.

Вид и взаимное расположение подобных систем поверхностей и линий позволят составить ясное представление о характере изучаемого движения жидкости:

а) Поверхности, во всех точках которых давление p имеет одну и ту же величину, называют поверхностями равного давления или уровня:

$$p = \text{const.}$$

б) Поверхности, во всех точках которых плотность жидкости ρ имеет одну и ту же величину, называют поверхностями равной плотности, или изотермическими:

$$\rho = \text{const.}$$

в) Траектории частиц жидкости.

Если известны компоненты скорости частицы жидкости по осям координат u , v , w как функции x , y , z и t , то, принимая во внимание, что координаты различных точек траектории, пробегаемой частицей жидкости, сами являются функциями времени t , а производные координат по времени дают величины компонентов скорости, будем иметь три уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t),$$

интеграция которых дает координаты точек траектории в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t), \\ y &= f_2(a, b, c, t), \\ z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где a , b , c — постоянны и дают координаты точки пространства, через которую проходит кривая траектории и в которой находится частица жидкости в момент $t = 0$.

д) „Линии движения“ или „токи жидкости“.

Но если желательно знать не движение отдельной частицы жидкости за определенный период времени t , а состояние движения ее частиц в какой-либо данный момент времени, т. е. при $t = \text{const}$, то вместо траектории частицы жидкости получим „линию движения“, или „ток жидкости“, как кривую, огибающую систему касательных к траектории.

Уравнение тока получим из выражений

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

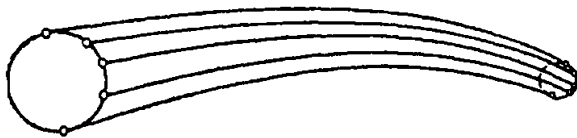
или

$$dx = u dt; \quad dy = v dt; \quad dz = w dt,$$

исключая из них постоянный множитель dt — в виде

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad (6)$$

интеграция которых дает два уравнения с двумя произвольными постоянными.



Фиг. 2.

Токи вообще отличны от траекторий.

Обе системы линий совпадают только для движений, независимых от времени, „установившихся“, или „стационарных“.

е) Струей жидкости называют ее массу, отделяемую от остальной жидкости комплексом токов, проходящих через все точки какого-либо бесконечно малого замкнутого контура, взятого внутри этой жидкости (фиг. 2):

§ 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФУНКЦИИ КОМПОНЕНТОВ ВИХРЯ

Движение частицы жидкости, как и всякого материального тела, возможно всегда разложить на два основных типа:

а) движение, сопровождающееся перемещением центра тяжести частицы в пространстве;

б) вращение частицы как твердого тела вокруг своего центра тяжести, остающегося неподвижным в пространстве (вихревое движение).

Современная техника умеет оперировать и утилизировать энергию только движения жидкости первого типа (а).

Энергия второго типа движения жидкости (б), или энергия вихревого движения является энергией, сполна теряемой.

Последнее показывает всю важность для инженеров изучения этого типа движений жидкости и влияния их на форму движения всей ее массы.

А так как система уравнений (2) еще не разделяет движение частицы жидкости на два указанные его типа, то эту систему необходимо преобразовать в такую, где эти типы движений были бы ясно разделены.

Для выполнения последнего преобразования назовем полную скорость частицы жидкости через W и воспользуемся равенством (7).

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2. \quad (7)$$

Частные производные от обеих частей этого равенства по переменным x , y , z дадут равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) &= u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) &= u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отнимая их от обеих частей уравнений (2), приведем последние к желаемому нами виду их:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \xi v) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\xi u - \zeta w) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} W^2 \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\zeta v - \eta u) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} W^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где ξ , η , ζ — компоненты по осям координат x , y , z вращательной или угловой скорости частицы жидкости при вращении ее вокруг своего центра тяжести как тела твердого.

Эти слагающие вихревого движения жидкости равны:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Полное вращение частицы по величине и направлению может быть найдено, как диагональ в прямоугольного параллелепипеда с ребрами ξ , η , ζ , направленными по осям координат x , y , z (фиг. 3), причем за положительное направление вращения принимают вращение, совершающееся по стрелке часов для наблюдателя, расположенного по оси вращения и стоящего ногами в начале координат.

Согласно фиг. 3 полное вращение ϵ по величине равно

$$\epsilon^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \quad (11)$$

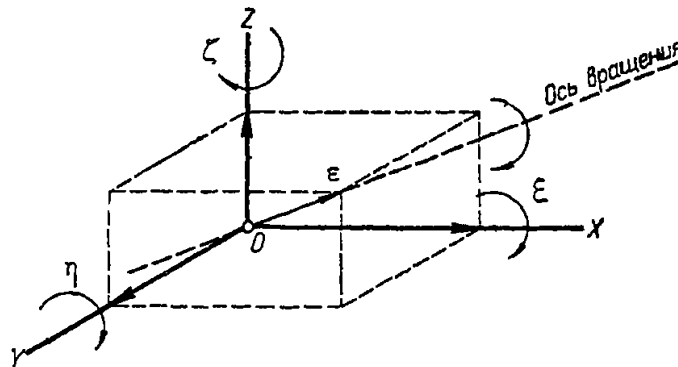
Подобно току жидкости (6) кривую, определяемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}, \quad (12)$$

называют вихревой нитью.

Из выражений компонентов вихря (10) следует, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

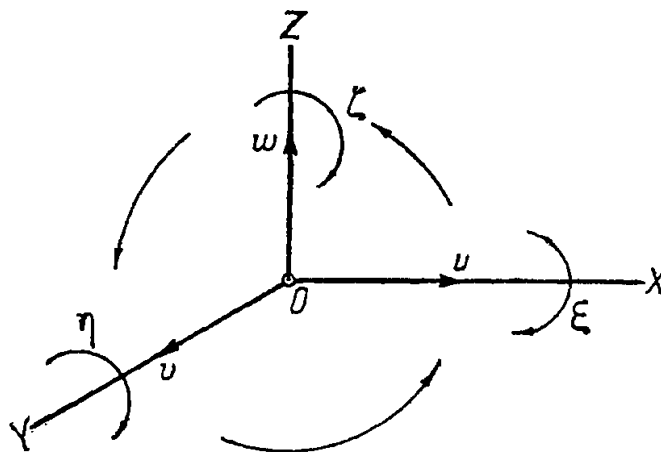


Фиг. 3.

уравнение, подобное уравнению непрерывности жидкости (3) при $\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Это показывает, что для капельных жидкостей компоненты вихря можно уподоблять компонентам полной скорости частицы жидкости и производить над ними одинаковые операции.



Фиг. 4.

Наконец, должно заметить, что получение всех выражений (10) и (9) легко производится помощью круговой перестановки всех знаков, расположив компоненты скорости и вихря по осям координат, согласно фигуре (4) и идя от каждой из желаемых осей против стрелки часов.

УСЛОВИЕ НЕВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

При невихревом движении жидкости все компоненты вихря должны одновременно равняться нулю:

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$