**М.Е. Ващенко-Закхарченко**

# Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 93
ББК 63.3
М11

**М.Е. Ващенко-Закхарченко**
М11 Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями / М.Е. Ващенко-Закхарченко – М.: Книга по Требованию, 2023. – 768 с.

**ISBN 978-5-518-00873-1**

**ISBN 978-5-518-00873-1**

прежде такой-то, а если и можетъ, то почему поставлена въ такомъ-то мѣстѣ? Такимъ образомъ, при преподаваніи, въ геометрическую систему войдетъ небольшое число самыхъ необходимыхъ теоремъ, остальныя-же, относящіяся къ извѣстному отдѣлу, должны войти въ видѣ упражненій въ классѣ или внѣ класса. При такомъ способѣ изложенія Геометріи, преподаватель будетъ въ состояніи настоять на томъ, чтобы воспитанники не только твердо знали теоремы курса, но и помнили бы ихъ порядокъ.

Тщательное вниманіе должно быть обращено на *аксіомы*, *опредѣленія* и *допущенія* и выяснены, постепенно, ихъ смыслъ и значеніе. Эта часть у насъ почти ускользаетъ отъ вниманія воспитанниковъ.

Далѣе необходимо выяснить:

1) Что такое теорема и проблема? какая между ними разница? изъ какихъ частей состоитъ теорема? что такое обратная теорема? всегда-ли она возможна? примѣры случаевъ возможности и невозможности.

2) Что такое доказательство? какія бываютъ роды доказательствъ? постоянное выясненіе *синтеза*, *анализа* и *приведенія къ нелѣпости* или *апагогическаго способа*. Для такого выясненія преподаватель долженъ пользоваться теоремами наиболѣе къ тому удобными.

На эти пункты должно быть сосредоточено особенно вниманіе преподавателя въ продолженіи всего курса—они составляютъ логическую основу Геометріи и всей вообще математики. Ни въ какой наукѣ не могутъ быть такъ осязательно выяснены три метода доказательствъ, упомянутые выше, какъ въ Геометріи.

Я часто встрѣчалъ на экзаменахъ воспитанниковъ, прекрасно доказывающихъ теоремы, но которые смутно понимали значеніе аксіомъ и не имѣли никакого понятія о допущеніи (postulatum) Евклида, на которомъ основана вся геометрическая система. Это происходитъ отъ того, что болѣе обращается вниманія на умѣніе доказывать теоремы, нежели на содержаніе доказательства и на логическое теченіе теоремъ. Требовать вполнѣ зрѣлаго знанія и пониманія Геометріи, какъ науки, отъ воспитанниковъ, только что окончившихъ гимназическій курсъ, не возможно; это знаніе должно быть таково, чтобы, при дальнѣйшемъ изученіи математики, могло созрѣть и обратиться въ отчетливое пониманіе геометрической системы. Такая зрѣлость приходитъ постепенно, поэтому имѣло бы громадное значеніе, въ этомъ отношеніи, повтореніе

Геометріи въ педагогическомъ классѣ, не въ смыслѣ передѣлки теоремъ, какъ у насъ часто выражаются, а въ смыслѣ ихъ логической послѣдовательности и историческаго происхожденія. Ничто такъ не помогаетъ твердо удерживать въ памяти извѣстныя истины, какъ исторія ихъ происхожденія. Геометрія, освѣщенная историческими данными, дѣлается живѣе и занимательнѣе. Къ сожалѣнію это у насъ вовсе не практикуется, и едва нѣкоторые изъ воспитанниковъ знаютъ имя Архимеда. Скажу болѣе: громадное значеніе и несомнѣнную пользу имѣло бы открытіе въ университетахъ каѳедры „исторіи математическихъ наукъ", цѣлью которой были-бы изложеніе исторіи развитія математическихъ наукъ у всѣхъ народовъ, съ указаніемъ характера каждой націи въ этомъ отношеніи, и критическій разборъ всѣхъ методовъ изслѣдованій отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго.

Въ этомъ отношеніи классики послѣдовательнѣе геометровъ: у нихъ тщательно анализируется каждая фраза, въ извѣстномъ сочиненіи, разбирается почему употреблена такая-то форма, а не другая, для выраженія извѣстной мысли и т. д.

Воспитанникъ, окончившій гимназическій курсъ поступаетъ въ университетъ не съ логическимъ отчетливымъ знаніемъ Геометріи, а съ механическимъ, т. е. знаетъ, какъ говорятъ, передѣлать теоремы. Онъ знаетъ, напримѣръ, что сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, но эта истина остается для него отдѣльнымъ фактомъ, при которомъ не является цѣлая картина предъидущихъ неразрывныхъ истинъ. Онъ даже не знаетъ, что эта истина и постулатъ Евклида одно и то-же.

Таковы были мотивы, побудившіе меня предпринять предлагаемый обширный трудъ и присоединить къ нему „Краткій историческій очеркъ развитія Геометріи" отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени.

Какое изъ сочиненій имѣло столько изданій? По какому сочиненію училось столько людей? Какое сочиненіе образовало столько знаменитыхъ геометровъ, каковы: Декартъ, Ньютонъ, Лейбницъ, Эйлеръ, Лагранжъ и многіе другіе. Наконецъ, какое сочиненіе выдержало серьезную критику своихъ учениковъ, глубоко изучившихъ его, и все таки вышло побѣдителемъ? По „Началамъ" Евклида учились: Дантъ, Петрарка, Тассо, Микель-Анджело, Леопардо-да-Винчи, Бокаччіо и др. знаменитые писатели. „Начала" Евклида принадлежатъ къ числу тѣхъ замѣчательныхъ твореній древняго міра, которыя всегда останутся образцами въ своемъ родѣ, которымъ тѣмъ больше удивляешься, чѣмъ болѣе ихъ читаешь, и которыя обыкновенно приписываются не одному лицу. Если съ перваго раза, нѣкоторыя части его и кажутся утомительными, то это происходитъ вслѣдствіе того отличительнаго характера новыхъ методовъ изслѣдованій, къ которымъ мы привыкли; но по мѣрѣ того, какъ мы углубляемся въ изученіе этого замѣчательнаго сочиненія, такое впечатлѣніе исчезаетъ, а является сознаніе необыкновенной строгости доказательствъ и логической послѣдовательности въ порядкѣ истинъ. Такое, напримѣръ, впечатлѣніе производитъ съ перваго раза десятая книга „Началъ", но вмѣстѣ съ этимъ ни одна изъ книгъ не поражаетъ насъ такою глубиною изслѣдованій. Таковъ характеръ настоящаго сочиненія. Преподаватель найдетъ въ немъ неисчерпаемый источникъ матеріала для своихъ лекцій, которымъ онъ долженъ только съ умѣніемъ пользоваться. Новые геометры, Ньютонъ и другіе, были такъ поражены глубокимъ синтезомъ древнихъ математиковъ, что свои открытія, сдѣланныя съ помощью новаго анализа, передѣлывали на древній синтезъ.

Чтобы выяснить значеніе *опредѣленій*, *аксіомъ* и *допущеній*, я, во Введеніи изложилъ изслѣдованія Лежандра, относительно суммы угловъ въ треугольникѣ, связь этой теоремы съ *допущеніемъ* Евклида и *систему Лобачевскаго*, носящую названіе *Неевклидовской Геометріи*, въ которой допущеніе Евклида измѣнено въ извѣстномъ смыслѣ. Изученіе такой системы бросаетъ яркій свѣтъ на начала Геометріи и даетъ болѣе правильный взглядъ на *допущеніе*, которое было предметомъ многихъ недоразумѣній, споровъ и изслѣдованій.

За Введеніемъ слѣдуетъ переводъ „Началъ" Евклида съ замѣчаніями и дополненіями. Замѣчанія относятся къ теоремамъ и касаются вопросовъ о ихъ мѣстѣ и способахъ доказательствъ. Въ дополненіяхъ изложены тѣ части, которыхъ недостаетъ въ „Началахъ". Въ концѣ сочиненія приложены задачи къ каждой книгѣ, съ указаніемъ, какія именно теоремы каждой книги должны быть взяты въ соображеніе при рѣшеніи указанныхъ задачъ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о каждой книгѣ, о примѣчаніяхъ и дополненіяхъ.

„Начала" Евклида состоятъ изъ 15-ти книгъ, двѣ послѣднія приписываютъ Гипсиклу. Изъ тринадцати остальныхъ 5, 7, 8, 9 и 10-я составляютъ ариѳметику древнихъ, 5, 7, 8 и 9-я раціональную, а 10-я ирраціональную. Изъ ариѳметическихъ книгъ я перевелъ только 5-ю и 10-ю, которыя имѣютъ болѣе геометрическій характеръ, въ особенности 10-я. Остальныя же я нашелъ излишнимъ переводить.

*Книга I.* Книга первая состоитъ изъ 48-ми предложеній, которыя заключаютъ двѣ группы предложеній. Первую группу составляютъ 28 предложеній, вытекающихъ изъ количественныхъ аксіомъ и двухъ геометрическихъ—опредѣленія прямой и совмѣстимости частей плоскости какъ прямо, такъ и обратно. Эта группа теоремъ составляетъ основу Геометріи, онѣ размѣщены въ такомъ логическомъ порядкѣ, что, за исключеніемъ весьма ничтожныхъ перемѣщеній, другаго порядка имъ дать невозможно. Вторая группа теоремъ вытекаетъ изъ *допущенія* Евклида или его знаменитаго *постулата.* Эти теоремы составляютъ основу теоріи параллельныхъ линій и теоріи пропорціональности. Чтобы выяснить значеніе и смыслъ *допущенія* Евклида преподаватель, послѣ 28-го предложенія, долженъ изложить первыя шесть предложеній Введенія и отчетливо показать связь между *допущеніемъ* Евклида и суммою внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ. Изложеніе этой связи можетъ быть сдѣлано только въ педагогическомъ классѣ или въ послѣднемъ, при повтореніи, такъ какъ такое изложеніе для начинающихъ невозможно. Изъ теоріи параллельныхъ линій вытекаетъ группа теоремъ отъ 35-й до 48-й, относящихся къ преобразованію одной фигуры въ другую. Эта книга заканчивается знаменитой теоремой Пиѳагора, доказанной на основаніи преобразованія фигуръ.

*Книга II.* Вторая книга составлена изъ предложеній, представляющихъ геометрически алгебраическія тождества, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ количествъ:

1) Закона *перестановительнаго,* выраженнаго двумя тождествами:

$$a+b=b+a \qquad ab=ba$$

изъ которыхъ, первое выражаетъ сложеніе линій, а второе построеніе прямоугольника, коего стороны суть $a$ и $b$ (см. примѣч. 1, кн. 2).

2) Закона *распредѣлительнаго,* выраженнаго тождествомъ (кн. 2, пред. 1)

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

3) Закона *повторительнаго,* выраженнаго тождествомъ

$$a^n.\, a^m=a^{n+m}$$

въ Планиметріи это тождество только втораго измѣренія, т. е. $a.a=a^2$, а въ Стереометріи третьяго, т. е. $a.a.a=a^2a=a^3$.

Предложенія 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10-е суть алгебраическія тождества, которыя написаны въ концѣ книги въ примѣчаніи 5. Съ помощью предложеній 4, 5, 6 и 7-го можно рѣшить геометрически уравненія второй степени формы

$$x^2 \pm px = q^2 \text{ и } px - x^2 = q^2$$

а какимъ образомъ будетъ показано въ „Историческомъ очеркѣ".

Предложеніе 11-е было названо древними *золотымъ дѣленіемъ* прямой.

Большая часть предложеній этой книги исчезла изъ нашихъ руководствъ, между тѣмъ какъ эти предложенія весьма важны для конкретнаго представленія алгебраическихъ тождествъ и для проведенія параллели между алгебраическими преобразованіями и геометрическими построеніями. Вторая книга есть Алгебра древнихъ: съ помощью изложенныхъ въ ней предложеній, древніе геометры дѣлали геометрическія преобразованія, соотвѣтствующія нашимъ алгебраическимъ. Въ педагогическомъ отношеніи эта книга имѣетъ большое значеніе: преподаватель долженъ воспользоваться ею для выясненія тѣсной связи между Алгеброй и Геометріей.

*Книга III.* Въ третьей книгѣ изложены всѣ основныя свойства круга, между этими предложеніями находятся 7 и 8-е, которыя должны служить къ объясненію, что такое *наибольшая*—maximum и *наименьшая*—minimum величины. Предложенія: 35, 36 и 37-е у насъ обыкновенно излагаются въ отдѣлѣ *подобія* фигуръ и *пропорціональности* линій, но изложеніе ихъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ они изложены въ третьей книгѣ „Началъ", даетъ болѣе ясное конкретное представленіе.

*Книга IV.* Въ четвертой книгѣ излагаются предложенія: какъ вписать въ кругъ и какъ описать около него правильный треугольникъ, квадратъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ и пятнадцатиугольникъ. Особенное вниманіе должно обратить на 10-е предложеніе, такъ какъ оно имѣетъ много слѣдствій, которыя указаны въ задачахъ, относящихся къ этой книгѣ.

*Книга V,*—это раціональная ариѳметика древнихъ. Такъ какъ нѣкоторыя опредѣленія этой книги были предметомъ многихъ споровъ, недоразумѣній и изслѣдованій, то я въ примѣчаніяхъ къ ней изложилъ нынѣшнее воззрѣніе на отношенія и пропорціи и показалъ, что пятое опредѣленіе Евклида, которое и было предметомъ недоразумѣній, тождественно съ нашимъ самымъ общимъ, относящимся къ несоизмѣримымъ величинамъ. Пятое опредѣленіе тѣмъ болѣе казалось непонятнымъ, что за нимъ слѣдуетъ шестое, въ которомъ опредѣляется пропорціональность весьма просто, но это опредѣленіе, по своему смыслу, относится только къ величинамъ соизмѣримымъ. Затѣмъ слѣдуетъ еще одно опредѣленіе пропорціональности—8-е. Эти три опредѣленія и сбивали геометровъ.

Я замѣтилъ, что эта часть у насъ въ школахъ весьма слаба, а потому я въ примѣчаніяхъ 3 и 5-мъ изложилъ все, что касается отношеній и пропорцій.

*Книга VI.* Въ шестой книгѣ изложены: отношеніе площадей фигуръ и всѣ теоремы пропорціональности и подобія. Въ этой книгѣ преподаватель долженъ обратить особенное вниманіе на тѣ предложенія, 8, 9, 10, 11, 12 и 13, которыя служатъ къ построенію алгебраическихъ выраженій, каковы:

$$\frac{ab}{c},\ \frac{a^2}{c},\ \frac{a^2bc}{efc},\ \frac{a^3}{bc},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2 \pm b^2},\ \text{и т. д.}$$

Должно обратить вниманіе на предложенія 24, 25, 26, 27 28 и 29, которыя изчезли изъ нашихъ руководствъ, но которыя весьма важны въ томъ отношеніи, что могутъ служить къ рѣшенію квадратныхъ уравненій. Предложеніе 30-е есть *золотое* дѣленіе прямой, которое было уже, только въ другой формѣ, дано во второй книгѣ.

Въ примѣчаніи 23-мъ прибавлены теоремы, которыя не находятся у Евклида.

Шестой книгой заканчивается Планиметрія. Слѣдовательно недостаетъ отдѣла объ измѣреніи круга, т. е. изслѣдованій объ опредѣленіи отношенія между окружностью и діаметромъ. Поэтому въ прибавленіи I я изложилъ, все то, чего у Евклида недостаетъ, именно: о многоугольникахъ вообще и о звѣздныхъ въ особенности, всѣ предложенія, служащія къ опредѣленію отношенія окружности къ діаметру, исторію этихъ розысканій и перевелъ книгу Архимеда „Объ измѣреніи круга" (Κύκλου μέτρησις), о которой часто говорятъ, но которая мало кому извѣстна. Въ примѣчаніяхъ къ ней сдѣланы необходимыя поясненія;

наконецъ, изложенъ методъ предѣловъ и новѣйшіе методы для опредѣленія $\pi$.

*Книга X*, это ирраціональная ариѳметика или алгебра древнихъ, образецъ глубокомыслія древнихъ геометровъ. Въ примѣчаніи 14-мъ къ этой книгѣ—всѣ изслѣдованія, изложенныя въ ней, переведены на нашъ алгебраическій языкъ. Читатель долженъ обратить особенное вниманіе на первыя восемнадцать предложеній, въ которыхъ изложены основныя свойства несоизмѣримыхъ величинъ по способу древнихъ, но который не излишне прочесть и новымъ геометрамъ. Кромѣ того, заслуживаетъ вниманія предложеніе 29-е съ его слѣдствіями и предложеніе 117-е. Впрочемъ не безполезно прочесть внимательно всю книгу.

*Книги XI*, *XII* и *XIII* составляютъ Стереометрію; послѣднія двѣ *книги*, *XIV* и *XV*, нѣкоторые приписываютъ математику Гипсиклу, жившему во второмъ вѣкѣ по Р. Х. Въ примѣчаніяхъ и въ текстѣ, я пояснилъ то, что считается въ „Началахъ“ темнымъ или недосказаннымъ, и прибавилъ то, чего у Евклида недостаетъ. Особеннаго вниманія заслуживаетъ примѣчаніе 1-е къ тринадцатой книгѣ „Началъ“, въ которой Евклидъ опредѣляетъ кратко, что такое *анализъ* и *синтезъ* и приводитъ примѣры для обоихъ способовъ. Къ этому мѣсту я прибавилъ примѣчаніе, въ которомъ подробно разобралъ оба способа и привелъ примѣры, какъ того, такъ и другаго.

Въ книгахъ XIV-й и XV-й изложены свойства правильныхъ многогранниковъ, а въ прибавленіи VIII-мъ „О многогранникахъ“ мною изложены всѣ новѣйшія изслѣдованія объ этихъ тѣлахъ.

Наконецъ, такъ какъ въ „Началахъ“ Евклида не изложено измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ какъ ограниченныхъ плоскими поверхностями, такъ и круглыхъ тѣлъ, то я въ IX прибавленіи помѣстилъ все, что касается этихъ предметовъ.

Въ концѣ сочиненія я прибавилъ собраніе задачъ къ каждой книгѣ съ указаніемъ, къ какому отдѣлу каждой книги онѣ принадлежатъ, и какія предложенія должны употребляться при ихъ рѣшеніи. Въ концѣ же помѣщено еще нѣсколько замѣчательныхъ задачъ съ ихъ рѣшеніями.

Сочиненіе заканчивается двумя прибавленіями XI-мъ и XII-мъ; въ первомъ изъ нихъ изложено о *наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинахъ въ Геометріи, а во второмъ объ *отрицательныхъ количествахъ*. Въ обоихъ прибавленіяхъ выбраны примѣры, которые могли-бы служить наилучшимъ поясненіемъ изложеннаго. Преподаватель, въ продолженіи всего курса, долженъ указывать на существованіе *наибольшей* или *наименьшей* величины въ извѣстномъ предложеніи и указывать связь этихъ величинъ съ возможностью и невозможностью рѣшенія квадратныхъ уравненій, т. е. когда квадратное уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и когда мнимые. Точно также преподаватель долженъ разъяснить при каждомъ удобномъ предложеніи значеніе отрицательныхъ величинъ въ Геометріи. Такимъ образомъ воспитанникъ составитъ себѣ ясное понятіе о тѣхъ геометрическихъ представленіяхъ, которыя многимъ кажутся, съ перваго раза, неясными и запутанными.

Закончу настоящее предисловіе словами Боссю, сказанными имъ въ его „Исторіи математики": Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Éléments d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siècles, dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues: preuve certaine de leur excellence.

Живой свидѣтель подтверждающій слова, сказанныя Боссю, есть списокъ, приложенный въ концѣ сочиненія, всѣхъ изданій „Началъ" Евклида, которыя намъ удалось собрать, вышедшихъ съ 1482 г. по 1880 годъ на различныхъ языкахъ. Изданія, обозначенныя звѣздочкой (*) были въ моемъ распоряженіи. Изъ этого списка видно, что всѣхъ изданій было до 460; изъ нихъ 155 на латинскомъ и греческомъ языкахъ, 142—на англійскомъ, 48—на нѣмецкомъ, 38—на французскомъ, 27—на итальянскомъ, 14—на голландскомъ, 5—на русскомъ, 2—на польскомъ и 26 на различныхъ другихъ языкахъ, какъ то: шведскомъ, финскомъ, португальскомъ, испанскомъ, датскомъ, китайскомъ, арабскомъ и др. Настоящее изданіе есть *пятое* на русскомъ языкѣ.

Къ означенному списку я прибавилъ списокъ сочиненій по Неевклидовской Геометріи, расположенныхъ въ алфавитномъ порядкѣ. Изъ него видно, какая громадная литература возникла по этому предмету, въ особенности въ послѣднее десятилѣтіе. Во многихъ изъ этихъ сочиненій обобщаются основныя геометрическія понятія на которыхъ строится геометрическая система. Сочиненія, обозначенныя звѣздочкой (*), служили мнѣ при составленіи Введенія. Наконецъ, въ концѣ книги, помѣщенъ списокъ различныхъ сочиненій, которыми я пользовался при составленіи настоящаго труда.

Въ заключеніи позволяю себѣ обратиться съ истинною благодарностью къ Совѣту Императорскаго Университета св. Владиміра, который всегда, съ такою готовностью, даетъ возможность, по мѣрѣ своихъ средствъ, принести пользу обществу изданіемъ полезныхъ сочиненій, напечатаніе которыхъ у насъ, на свой счетъ, для частнаго лица почти немыслимо.

М. Е. Ващенко-Захарченко.

Г. Кіевъ.
Въ мартѣ 1880 года.