

И.М. Гельфанд

**Представления группы
вращений и группы Лоренца,
их применения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
И11

И11 **И.М. Гельфанд**
Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения / И.М. Гельфанд – М.: Книга по Требованию, 2024. – 368 с.

ISBN 978-5-458-26260-6

Книга посвящена описанию и детальному изучению представлений группы вращений трёхмерного пространства и группы Лоренца. Эти группы играют фундаментальную роль в теоретической физике. Рассчитывая на читателей-физиков, авторы собрали в своей книге весь основной материал теории представлений, который применяется в квантовой механике. Книга рассчитана также на читателей-математиков, изучающих представления групп Ли. Для них она может служить введением в общую теорию представлений.

ISBN 978-5-458-26260-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

1. Определение заряда и энергии (343). 2. Конечномерные уравнения с положительным зарядом и матрицей L_0 , приводящейся к диагональному виду (344). 3. Конечномерные уравнения с положительной энергией и матрицей L_0 , приводящейся к диагональному виду (346). 4. Уравнения с положительным зарядом и матрицей L_0 , не приводящейся к диагональному виду (348). 5. Теорема Паули (351). 6. Бесконечномерные уравнения с положительным зарядом или энергией (353).

Дополнения	355
Библиография	369

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена изучению представлений группы вращений трехмерного пространства и группы Лоренца. У читателя предполагается лишь знакомство с основами линейной алгебры, например, в объеме первых двух глав книги И. М. Гельфанда «Лекции по линейной алгебре».

Теория представлений, в частности представления трехмерной группы вращений и группы Лоренца, широко используется в квантовой механике. В этой книге собран тот основной, на наш взгляд, материал, который необходим для квантовомеханических приложений.

С другой стороны, изучение представлений трехмерной группы вращений и группы Лоренца может служить хорошим введением в общую теорию представлений групп Ли; оба эти примера тем более удачны, что на них отчетливо видна разница между представлениями компактных групп (группа вращений) и локально компактных групп Ли (группа Лоренца). Кроме того, из приведенного в книге материала достаточно ясно обнаруживаются связи теории представлений с другими разделами математики (сферические функции, тензоры, дифференциальные уравнения и т. п.); в общем случае эти связи еще не всегда хорошо изучены.

Первой частью книги, посвященной группе вращений, служит статья, опубликованная двумя из авторов — И. М. Гельфандом и З. Я. Шапиро — в «Успехах математических наук» за 1952 г. (т. VII, вып. 1) под заголовком «Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения».

К этой статье добавлены пп. 6 и 7 § 9 и заново написанный § 10, в котором вычисляются коэффициенты Клебша — Гордона.

Вторая часть книги, где изучаются представления группы Лоренца и релятивистски-инвариантные уравнения, написана Р. А. Минлосом. При этом, однако, выбор материала, а также план и стиль изложения детально обсуждались всеми авторами. При написании последней главы — о релятивистски-инвариантных уравнениях — в основу была положена работа И. М. Гельфанда и А. М. Яглома «Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца» (ЖЭТФ, т. 18, № 8, 1948 г.); таким

образом, эту главу можно рассматривать как подробное и несколько более полное изложение упомянутой статьи.

Включение в книгу релятивистски-инвариантных уравнений, помимо их самостоятельного интереса, оправдано еще и тем, что применяемые здесь методы широко используются в предыдущей главе при изучении самих представлений группы Лоренца; таким образом, по своим методам обе главы второй части составляют единое целое. Отметим еще, что во второй части упор в изложении сделан на конечномерные представления, поскольку до настоящего времени главным образом они были существенны в физических применениях.

Читателю, желающему глубже и более подробно изучить представления группы Лоренца, мы рекомендуем обратиться к книге М. А. Наймарка «Представления группы Лоренца», в которой последние изложены с исчерпывающей полнотой.

Авторы считают неременным долгом отметить большую работу, проделанную редактором книги Ф. А. Березиным, далеко выходящую за пределы обычных редакторских обязанностей. Его многочисленные требования, советы и замечания значительно повысили качество книги. Мы благодарны ему.

И. Гельфанд, Р. Минлос, З. Шапиро

ЧАСТЬ I

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА I

ГРУППА ВРАЩЕНИЙ И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Группа вращений трехмерного пространства

1. Определение группы вращений. Рассмотрим все вращения трехмерного пространства вокруг фиксированной точки (начала координат). Под произведением двух вращений g_1 и g_2 мы понимаем вращение g , состоящее в последовательном применении сначала g_2 и затем g_1 *). Запишем это так: $g = g_1 g_2$. Нетрудно проверить, что совокупность G всех вращений образует группу, т. е. что при таком определении умножения выполнены все групповые аксиомы. Единицей группы e , или, как мы будем говорить, единичным вращением, является при этом поворот на нулевой угол.

Если x — некоторый вектор, выходящий из начала координат, то вращение g переводит его в вектор x' . Мы будем обозначать это так:

$$x' = gx. \quad (1)$$

Вясним, как аналитически записать вращения. Выберем в трехмерном пространстве фиксированную ортогональную систему координат. В ней вращение задается формулами

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} x_k, \quad (2)$$

где x_k — координаты вектора x , а x'_i — координаты вектора x' . Матрица $\|g_{ik}\|$ определяет данное вращение. Мы будем эту матрицу обозначать той же буквой g , что и вращение. Найдем, каким условиям должны удовлетворять числа g_{ik} . Так как вращение не меняет длин и углов, то оно не меняет скалярных произведений. Таким образом, если $x' = gx$ и $y' = gy$, то

$$\sum_{i=1}^3 x'_i y'_i = \sum_{k=1}^3 x_k y_k. \quad (3)$$

*) Такой порядок принят обычно при перемножении линейных преобразований.

Подставим в левую часть равенства вместо x'_i и y'_i их выражения по формуле (2):

$$\sum_{i,k,l} g_{ik} g_{il} x_k y_l = \sum_{k=1}^3 x_k y_k.$$

Сравнивая коэффициенты при $x_k y_l$ в левой и правой частях, мы получим:

$$\sum_{i=1}^3 g_{ik} g_{il} = \delta_{kl}, \quad (4)$$

где под символом δ_{kl} понимается число, равное 1, если $k=l$, и равное 0, если $k \neq l$. Равенство (4) можно записать в матричной форме. А именно, в правой части равенства стоят элементы единичной матрицы e , слева же — элементы произведения $g'g$ матрицы g' , транспонированной к g , на саму матрицу g , т. е.

$$g'g = e \quad (5)$$

или

$$g' = g^{-1}. \quad (5')$$

Матрицы, удовлетворяющие равенству (5), называются *ортогональными матрицами*. Если взять детерминант обеих частей равенства (5), то мы получим $\text{Det}(g') \cdot \text{Det}(g) = 1$, т. е. $[\text{Det}(g)]^2 = 1$ и, значит,

$$\text{Det}(g) = \pm 1. \quad (6)$$

Всякое вращение есть вращение вокруг некоторой оси на угол φ . Если выбрать ось вращения за ось z , то матрица этого вращения будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Так как детерминант матрицы (7) равен 1, то для вращений $\text{Det}(g) = 1$. Ортогональные преобразования, для которых $\text{Det}(g) = -1$, называются *несобственными* ортогональными преобразованиями. Примером несобственного ортогонального преобразования является отражение относительно начала координат, матрица которого имеет вид

$$g_- = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Если g — какое-нибудь несобственное ортогональное преобразование, т. е. $\text{Det}(g) = -1$, то gg_- есть преобразование, для которого $\text{Det}(gg_-) = \text{Det}(g) \cdot \text{Det}(g_-) = 1$ и, значит, gg_- есть вращение, а $g = (gg_-)g_-$ — произведение вращения на отражение относительно начала.

2. Введение параметров в группу вращений. Для дальнейшего нам понадобится несколько способов задавать вращение параметрами.

Так как каждое вращение есть вращение вокруг некоторой оси, то мы полностью определим его, задав ось вращения и угол поворота вокруг нее. Мы часто будем задавать вращение вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, направленным вдоль оси вращения и равным по величине углу поворота. Направление вектора будем выбирать так, чтобы, если смотреть из его конца, угол поворота не превосходил π . Таким образом, координаты векторов, описывающих всевозможные вращения, будут удовлетворять условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq \pi^2$ и, значит, заполнять шар радиуса π . Ясно, что различные внутренние точки шара описывают различные вращения, а две диаметрально противоположные точки на поверхности сферы — одно и то же вращение на угол π (так как поворот на угол π в двух противоположных направлениях приводит к одному и тому же результату).

Указанный способ описания вращений выявляет топологическую структуру группы вращений, а именно, эта группа топологически эквивалентна шару, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы.

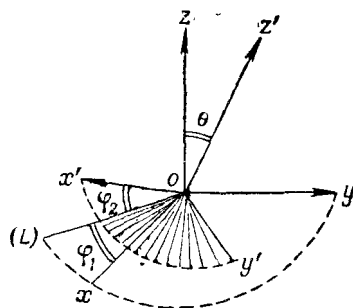


Рис. 1.

Важным видом параметров в группе вращений являются так называемые углы Эйлера. Пусть координатные оси Ox , Oy и Oz перейдут в результате вращения g в прямые Ox' , Oy' и Oz' . Обозначим через (L) прямую, по которой пересекаются плоскости xOy и $x'Oy'$, через φ_1 — угол Ox и (L) , через φ_2 — угол (L) и Ox' и через θ — угол между положительными направлениями осей Oz и Oz' . Очевидно, что вращение g может быть представлено как произведение трех последовательных вращений; а именно: вращения g_{φ_1} в положительном направлении на угол φ_1 вокруг оси Oz , в результате которого ось Ox совпадет с прямой (L) , затем вращения g_θ на угол θ вокруг Ox (после которого ось Oz перейдет в ось Oz') и, наконец, вращения g_{φ_2} на угол φ_2 вокруг оси Oz' :

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = g_{\varphi_2} g_\theta g_{\varphi_1}. \quad (8)$$

Найдем элементы g_{ik} матрицы вращения $g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, задаваемого углами Эйлера φ_1 , θ , φ_2 . Матрицы поворотов g_{φ_1} , g_θ , g_{φ_2} вокруг осей Oz , Ox , Oz' имеют вид

$$g_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad g_\theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix};$$

$$g_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

При последовательном выполнении вращений их матрицы перемножаются в обратном порядке, поэтому

$$\begin{aligned}
 g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= g_{\varphi_1} g_{\theta} g_{\varphi_2} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \theta \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \theta \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin \varphi_2 \sin \theta, \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \theta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \theta \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \theta \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_1 \sin \theta \\ \cos \varphi_2 \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

При этом углы φ_1 и φ_2 могут изменяться от 0 до 2π , а угол θ — от 0 до π . Различным тройкам чисел, изменяющимся в этих пределах, соответствуют различные вращения, кроме случая $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. При $\theta = 0$ вращение есть поворот вокруг Oz на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, а при $\theta = \pi$ — на угол $\varphi_1 - \varphi_2$, так что в этих случаях различным парам φ_1 и φ_2 может отвечать одно и то же вращение.

Рассмотрим вращение $g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$. Его матрица задается формулой (9). Проверим, что обратное преобразование задается углами $\pi - \varphi_2, \theta, \pi - \varphi_1$. Действительно, если в матрицу (9) подставить $\pi - \varphi_2$ вместо φ_1 и $\pi - \varphi_1$ вместо φ_2 , то она заменится транспонированной, а мы знаем (формула (5)), что обратная к ортогональной матрице совпадает с транспонированной. Итак, *если вращение g задается углами $\varphi_1, \theta, \varphi_2$, то вращение g^{-1} задается углами $\pi - \varphi_2, \theta, \pi - \varphi_1$.*

3. Инвариантное интегрирование. При исследовании функций от элемента группы G (т. е. функций от $\varphi_1, \theta, \varphi_2$) нам придется рассматривать интегралы от этих функций по группе (т. е. по всем допустимым значениям $\varphi_1, \theta, \varphi_2$: $0 \leq \varphi_1 < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 < 2\pi$). Наиболее приспособленным для теории представлений является так называемое инвариантное интегрирование. Инвариантный интеграл для функции $f(g) \equiv f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ есть интеграл *)

$$\int f(g) dg = \int f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) I(\varphi_1, \theta, \varphi_2) d\varphi_1 d\theta d\varphi_2$$

по $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ с «весовым множителем» $I(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, выбранным так, чтобы выполнялось равенство

$$\int f(g g_0) dg = \int f(g) dg. \quad (10)$$

Таким образом, инвариантный интеграл функции $f(g)$ не изменится, если заменить аргумент g на $g g_0$, т. е. «сдвинуть» функцию $f(g)$.

*) Мы будем иногда писать:

$$dg \equiv I d\varphi_1 d\theta d\varphi_2.$$

Можно было бы доказать, что весовой множитель определяется условием инвариантности (10) однозначно с точностью до постоянного множителя. Этот множитель мы выберем из условия, чтобы интеграл функции $f(g) \equiv 1$ равнялся 1, т. е.

$$\int dg = 1.$$

Вместо углов Эйлера мы могли бы при определении инвариантного интегрирования рассмотреть любые параметры, определяющие вращение. Однако углы Эйлера удобнее всего для определения инвариантного интегрирования, т. е. «весового множителя».

Рассмотрим вращение g , задаваемое углами $\varphi_1, \theta, \varphi_2$. Обозначим через P точку на единичной сфере, которая в результате этого вращения переходит в северный полюс сферы (т. е. в точку пересечения с осью Oz). Через Q обозначим точку на этой же сфере, которая после вращения g попадает на ось Ox . Ясно, что вращение g полностью определяется заданием точек P и Q . При этом точка P может быть произвольной, а точка Q лежит на большом круге, плоскость которого перпендикулярна к радиусу OP .

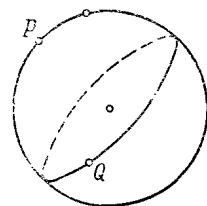


Рис. 2.

Элементы третьей строки матрицы (9) представляют собой декартовы координаты точки P .

Отсюда видно, что ее сферические координаты равны $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ и θ .

Если g_0 — какое-нибудь другое вращение и $\tilde{g} = gg_0$, то точки $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, отвечающие вращению $\tilde{g}$, получаются из точек P и Q поворотом g_0^{-1} .

Покажем, что инвариантное интегрирование задается формулой

$$\int f(g) dg = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2,$$

т. е. покажем, что при таком определении интеграла

$$\int f(g) dg = \int f(gg_0) dg.$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}_2$ эйлеровы углы вращения $\tilde{g}$. Покажем, что имеет место формула

$$\sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2 = \sin \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}_1 d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}_2,$$

или символически

$$dg = d\tilde{g}.$$

Выражение $\sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2$ имеет простой геометрический смысл. Действительно, $\sin \theta d\varphi_1 d\theta$ есть элемент площади поверхности

единичной сферы в точке P . Что касается $d\varphi_2$, то это есть элемент дуги большого круга, на котором лежит Q . В самом деле, если изменить угол φ_2 на $d\varphi_2$ при неизменных φ_1 и θ (т. е. фиксированном положении точки P), то это сведется к дополнительному повороту на $d\varphi_2$ вокруг точки P , т. е. сдвигу точки Q на $d\varphi_2$. Как было указано выше, замена g на $\tilde{g} = gg_0$ сводится к повороту пары P, Q с помощью g_0 . Но при вращении ни элемент площади, ни элемент дуги не меняются, поэтому мы имеем:

$$\sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2 = \sin \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}_1 d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}_2.$$

Нам надо доказать равенство

$$\int f(\tilde{g}) dg = \int f(g) dg,$$

или, что все равно, равенство

$$\int f(\tilde{g}) dg = \int f(\tilde{g}) d\tilde{g}.$$

Но последнее вытекает из того, что по доказанному $d\tilde{g} = dg$.

Если мы введем дополнительное требование нормировки, т. е. потребуем, чтобы $\int 1 dg = 1$, то, так как $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2 = 8\pi^2$, нужно положить:

$$\int f(g) dg = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2. \quad (11)$$

4. Связь группы вращений с группой унитарных матриц второго порядка. В этом пункте мы покажем, что вращения трехмерного пространства можно описывать комплексными матрицами второго порядка. Для этого рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость, состоящую, как известно, в том, что каждой точке P сферы относится точка M в плоскости, лежащая на луче $O'P$ (O' — северный полюс). Каждое вращение трехмерного пространства вокруг центра сферы переводит друг в друга точки сферы и порождает тем самым некоторое преобразование в плоскости. Нашей задачей сейчас будет более подробное рассмотрение таких преобразований.

Будем рассматривать сферу диаметра 1. Из сравнения подобных треугольников (рис. 3) легко получается связь между координатами x, y, z точки P сферы и координатами ξ, η точки M плоскости: $\xi = \frac{x}{1-z}$, $\eta = \frac{y}{1-z}$. Удобно ввести комплексное пе-