И.В. Арнольд

Теоретическая арифметика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И.В. Арнольд
И11 Теоретическая арифметика / И.В. Арнольд – М.: Книга по Требованию, 2021. – 481 с.

ISBN 978-5-458-26209-5

Основная часть книги отведена учению о числе. Здесь читатель найдет: теорию количественного натурального числа по Кантору, теорию натуральных чисел и двустороннего натурального ряда Грассмана, теорию пар для введения отрицательных , дробных и комплексных чисел, теорию сечений Дедекинда, сходящийся последовательностей Кантора и примыкающие к ним теории степенной, показательной и логарифмической функции; далее, краткие сведения о тренсфинитных числах, излагаемые в связи с учением о натуральном числе, теорию кватернионов в геометрическом изложении и элементарные сведения из теории гиперкомплексных чисел в объеме, необходимом для доказательства теоремы Фробениуса.Весь перечисленный материал выделен в тексте так, что читатель, желающий ознакомиться с той или иной теорией вне зависимости от основной нити изложения, может, отвлекаясь от отдельных вводных фраз, непосредственно приняться за чтение соответствующих параграфов книги.

ISBN 978-5-458-26209-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ного числа, в котором я преследовал методологическую и частично методическую цель установления непосредственной связи между принципом полной индукции и определением конечности множества, чтобы лишь на следующей ступени абстракции установить систему аксиом Пеано.

Несколько особое положение занимает также небольшая методологическая экскурсия в область философских споров сравнительно недавнего происхождения, связанных с так называемым „интуиционизмом". Ни на что большее, кроме беглого ознакомления читателя с постановкой вопроса, эта часть не претендует; предъявляя здесь, быть может, и более высокие требования к читателю, чем в остальных частях книги, автор не считал возможным просто обойти молчанием обстоятельства, имеющие фундаментальное значение в вопросах обоснования арифметики.

Положенные в основу методологические установки, из которых и вытекал выбор того, а не иного способа изложения, определяются общим стремлением с моей стороны установить связь между формальной стороной и тем конкретным содержанием понятия числа, которое обусловлено его ролью в изучении тех или иных конкретных величин, тех или иных количественных соотношений действительности.

Изложение теории натурального числа, принятое в главах I и II, и последовательное проведение операторной точки зрения позволяют, по моему мнению, осветить возникающие в связи с указанной установкой методологические вопросы с большей ясностью, нежели это было бы возможно в пределах классических формальных теорий. Кроме того, я считал, что с точки зрения интересов читателя здесь следовало предпочесть проникнутое определенным мировоззрением изложение более, быть может, легкому и менее ответственному сухому перечислению математических фактов. В этих двух обстоятельствах я видел достаточное оправдание для включения указанных выше вопросов и указанных методов изложения в книгу, предназначенную для заполнения весьма существенного пробела в нашей учебной литературе.

Москва, июнь 1937 г.

И. Арнольд.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава V.

Операторная теория действий третьей ступени.

Глава VI.

Действительные числа.

Глава VII.

Степенная, показательная и логарифмическая функции.

Глава VIII.

Определение действительных чисел с помощью их рациональных приближений.

Глава IX.

Теория сходящихся последовательностей Кантора.

ВВЕДЕНИЕ.

Развитие математики, начиная с середины прошлого столетия, шло под знаком особого внимания к вопросам обоснования.

Мы будем предполагать в общих чертах известным читателю тот процесс, который характеризует в этом смысле развитие геометрической мысли и ее последний этап, отмеченный открытием Лобачевского и последующей тщательной работой над логическим обоснованием геометрии и установлением системы непротиворечивых геометрических аксиом. Аналогичная работа шла параллельно и в отношении логического обоснования математического анализа, являющегося важнейшим орудием математического познания действительности.

И в том и в другом случае основной, исходной базой логических построений оказалось *понятие числа.* Логический анализ арифметических понятий стал, таким образом, неотъемлемой частью указанного процесса, вызванного к жизни насущнейшей потребностью разобраться в недостаточно ясной с логической стороны структуре математических дисциплин, чрезвычайно усложнившихся во время своего бурного роста в XVII и XVIII веках.

По пути анализа понятия числа удалось установить, что ряд обобщений этого понятия, вызывавших сомнения методологического характера с самого начала своего возникновения, допускает строгое логическое обоснование на основе понятия *натурального,* т. е. *целого положительного* числа.

Содержание этого утверждения распадается на две части, существенно отличающиеся друг от друга.

Во-первых, Гамильтоном (Hamilton) были установлены общие принципиальные основы, на которых может быть построена теория отрицательных и дробных рациональных чисел, если систему натуральных чисел считать заданной. На этой основе впоследствии были построены формальные теории, известные под именем „теорий пар“, не оставляющие уже никаких пробелов в логическом переходе от понятия целого числа к дробным и отрицательным числам. На той же логической основе осуществляется и переход от понятия действительного числа к системе комплексных чисел, а также и дальнейшие обобщения (теория векторов в пространстве, теория кватернионов, гиперкомплексные числа). В этой части задачи обоснования понятия числа основные пути логических построений, а также методологический анализ смыслового значения последовательных обобщений понятия числа восходят к фундаментальному сочинению Гамильтона „Lectures on Quaternions“, изданному в 1853 году.

Около того же времени (1857) Дедекинду (Dedekind) и, независимо от него, несколько позже Мере (Méray) и Кантору (Cantor) удалось построить на логической основе *теорию действительных чисел*. Отправным пунктом при этом служила система (положительных и отрицательных) *рациональных* чисел. В отличие от построений Гамильтона и примыкающих к нему теорий, носящих ярко выраженный алгебраический характер, мы встречаемся здесь с принципиально новым элементом построения — анализом понятия *непрерывности*. Самая постановка вопроса и методы ее решения были здесь тесно связаны с соответствующими проблемами математического *анализа*.

Оставалось еще провести логический анализ и установить аксиомы, лежащие в основе понятия *натурального числа*.

Первый шаг в этом направлении был сделан Германом Грассманом (Grassmann). В изданном им совместно с братом Робертом в 1861 году учебнике арифметики содержатся определения основных операций, достаточные для дальнейших формальных построений, устанавливающих основные законы арифметических действий. В системе аксиом Грассмана понятие натурального числа отражено, однако, лишь в наиболее абстрактном аспекте порядкового числа, в котором система натуральных чисел рассматривается лишь с точки зрения взаимного расположения их в натуральной последовательности 1, 2, 3, 4,...

Дополняющий построение Грассмана анализ самого понятия числа как характеристики свойств множеств или собраний предметов основан на фундаментальных работах основателя теории множеств Кантора, который обратил внимание на понятие *взаимно-однозначного соответствия* и на связанное с этим общее понятие *мощности* множеств. Далее, Кантор последовательно провел логическое разделение понятий *количественного* и *порядкового* числа, рассматривая наравне с *конечными* также и *бесконечные* множества и вводя для характеристики этих последних количественные и порядковые *трансфинитные* числа.

Дальнейшие работы, связанные с именами Дедекинда, Пеано (Peano), Фреге (Frege) и Ресселя (Russel), могут быть, в известной мере, охарактеризованы как синтез построений Грассмана и Кантора, в котором основной задачей являлось выделение класса *конечных* множеств и соответственно системы конечных чисел, составляющих предмет изучения обыкновенной арифметики. При этом выяснилась фундаментальная роль в этом как раз отношении *принципа полной индукции,* лежащем в основе построений Грассмана. Этот принцип или эквивалентное ему предложение используется для выделения класса *конечных* множеств и входит, таким образом, как часть, во всякое определение *натурального* числа.

Несмотря на то, что построение теории натуральных чисел было доведено до высокой степени формальной законченности (и даже — для исключения интуиции — записано с помощью особой системы логических обозначений, введенной Пеано и известной под названием „пазиграфии“), вопрос об обосновании арифметики, в частности, вопрос о *непротиворечивости* аксиом, все же оставался открытым и после этих работ.

В настоящее время не подлежит сомнению то обстоятельство, что вопрос этот не может быть разрешен в рамках чисто формальных арифметических теорий.

С одной стороны, методологическая критика основных логических понятий (уже в XX веке), связанная с именами Брауэра (Brouwer) и Вейля (Weyl) и известная под названием „*интуиционизма*“, весьма остро поставила вопрос о непротиворечивости системы аксиом арифметики и формальной логики и о смысле математических суждений вообще. Можно считать общепризнанным, что то сравнительно непринужденное обращение с основными понятиями „множества“, „соответствия“, „все“, „существует“ и т. д., которое характеризует упомянутые выше работы Пеано, Фреге и Ресселя, во всяком случае нуждается в более глубоком обосновании и анализе, нежели тот, который возможен в рамках формальных логических построений.

В частности, попытки одного из крупнейших математиков современности, Гильберта (Hilbert), поставить вопрос (в несколько иной плоскости) все же на формальную почву и доказать этим путем основное положение о *непротиворечивости систем аксиом логики и арифметики* в их классической формулировке до сих пор не увенчались успехом.

Можно, вообще, думать, что лежащая в основе формальных построений точка зрения на математику как на процесс „писания некоторых знаков по определенным формальным правилам“ характеризует лишь некоторые внешние свойства структуры *отдельных отрезков* математических построений. В эту узкую схему не укладывается все многообразие применения в рамках даже самой математики методов содержательного, неформализованного мышления.

Примечание. В отношении сравнительно недавно предложенного Генценом (Gentzen) [1]) решения проблемы непротиворечивости было бы преждевременным высказывать здесь какое-либо суждение.

В применении к непосредственно интересующему нас вопросу об обосновании арифметики из изложенного следует, что, с одной стороны, сравнительно законченные формальные построения Грассмана и Пеано отражают лишь одну сторону дела. Применение непосредственного процесса счета и других содержательных методов рассуждения уже в рамках самой арифметики может выйти за пределы первоначальной формальной схемы. С другой стороны, и более широкая задача общего логического обоснования понятия *количественного* числа и соответствующих построений, относящихся ко множествам, приводит, как было указано выше, к неразрешенным методологическим проблемам общего характера, также выходящим за пределы чисто формальной трактовки вопроса.

---

[1]) G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Mathematische Annalen, 112 (1936), стр. 493—565.

Резюмируя, можно сказать, что вопрос об обосновании понятия натурального числа в настоящее время еще далек от своего разрешения.

Имея это в виду, мы в последующем элементарном изложении вопроса о натуральном числе ограничиваемся, оставаясь в рамках классических концепций Кантора, Пеано и Грассмана, следующими элементарными задачами:

1) установить понятие *количественного числа* в связи с вопросом о том, какие отношения действительности находят свое отражение в этом понятии,

2) установить свойства класса *конечных множеств* и соответствующие свойства системы конечных количественных (натуральных) чисел, пользуясь *принципом полной индукции*, рассматриваемым как определение класса конечных множеств,

3) выделить те свойства системы натуральных чисел, которые лежат в основе дальнейших формальных построений, составляющих содержание *грассмановской теории порядкового числа*.

По этому плану и построены первые две главы настоящей книги.

Составляющее предмет изложения дальнейших глав обобщение понятия числа уже не содержит добавочных осложнений по сравнению с теми, которые были только что указаны в отношении понятия натурального числа. В этом смысле оправдывается известное изречение Кронекера (Kronecker) „Der liebe Gott schuf die ganze Zahl, alles übrige ist Menschenwerk", которое и сам Кронекер вряд ли имел в виду понимать дословно.

ГЛАВА I.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Счет.

В простейших своих применениях к изучению действительности натуральное целое положительное число выступает как *результат счета* предметов какой-либо совокупности.

Процесс счета требует выполнения некоторых предпосылок психологического характера, относящихся к лицу, производящему счет, и некоторых условий, которым должны удовлетворять совокупности, подвергаемые счету. Например, совокупности должны состоять из раздельных, не сливающихся между собой предметов; лицо, производящее счет, должно быть в состоянии отличать эти предметы друг от друга и от предметов, не подлежащих счету и т. п.

На перечислении и исследовании такого рода предпосылок, так же как и на вопросе об историческом развитии процесса счета, мы сейчас останавливаться не будем. Мы попытаемся прежде всего выяснить, *какие именно соотношения действительности находят свое отражение в числовой характеристике совокупностей или множеств предметов.*

§ 2. Множества.

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассматривая какие-либо предметы $a, b, c, \ldots, d$ как отдельную группу или совокупность, мы будем говорить, что имеется **множество** предметов $a, b, c, \ldots, d$, а самые эти предметы будем называть **элементами** этого множества.

Принадлежность элемента a множеству M будем обозначать знаком *включения*

$$a \subset M$$

(a включается в M, a есть элемент M).

Если все элементы множества M включаются в множество N, то мы будем говорить, что M есть **подмножество** или **часть** множества N, и также писать

$$M \subset N.$$

Если при этом *не все* элементы N включаются в M, то мы будем называть M **правильной частью** N.

Задание какого-либо определенного множества осуществляется путем указания закона или правила, позволяющего судить о том, *какие элементы включаются в определяемое множество и какие нет*. Это правило может, в частности, сводиться к прямому перечислению элементов множества.

Не останавливаясь на более детальном логическом анализе относящихся сюда вопросов, ограничимся простейшими примерами.

1. Множество букв на этой странице книги.

2. Множество всех букв русского алфавита.

Слово „буква" имеет несколько различный смысл в этих двух примерах, как это часто бывает в обыденной речи. В первом случае буква „а" в первой строке и та же буква „а" в иной строке - различные элементы множества; во втором — речь идет о буквах как таковых, так что для задания множества простым пере числением достаточно однократное выписывание букв алфавита.

Следующие множества могут быть образованы лишь на соответствующей ступени абстракции.

3. Множество всех равносторонних треугольников.

Здесь, очевидно, необходимо дополнительно указать, при каких условиях два равносторонних треугольника считаются различными, а при каких совпадающими элементами этого множества.

4. Множество M всех множеств, число элементов которых равно двум.

Элементами множества M служат здесь в свою очередь *множества*. Например, элементами M являются множество букв в слове „то", множество рук нормального человека, множество цифр в двуичной системе счисления и т. д.

5. Множество M нулей в десятичном разложении числа $\pi = 3{,}141592\ldots$

6. Множество, состоящее из одного элемента a в том случа если в десятичном разложении числа π где-нибудь есть один надцать нулей под ряд, и из двух элементов a и b — в противном случае.

Образование такого рода множеств и применение к ним законов обычной логики (не вызывающих сомнений в отношении таких конечных множеств, от косвенного задания которых н трудно перейти к прямому перечислению элементов) приобрел в математике сыздавна права гражданства.

Лишь сравнительно недавно было обращено внимание на то, что в отношении множеств, образованных на основе *бесконечных процессов* и *не допускающих прямого перечисления элементов*, дело обстоит далеко не так просто. Мы вернемся к затронутому здесь вопросу в дальнейшем (§ 14).

Для рассуждений, к которым мы сейчас переходим, достаточно, если читатель будет вкладывать в понятие множества привычное ему содержание, охарактеризованное приведенным выше описательным определением. При этом в первую очередь речь будет итти о самых простых конечных множествах, допускающих прямое перечисление элементов.