

И.В. Арнольд

Теоретическая арифметика

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
И11

И11 **И.В. Арнольд**
Теоретическая арифметика / И.В. Арнольд – М.: Книга по Требованию, 2021. – 481 с.

ISBN 978-5-458-26209-5

Основная часть книги отведена учению о числе. Здесь читатель найдет: теорию количественного натурального числа по Кантору, теорию натуральных чисел и двустороннего натурального ряда Грассмана, теорию пар для введения отрицательных, дробных и комплексных чисел, теорию сечений Дедекинда, сходящийся последовательностей Кантора и примыкающие к ним теории степенной, показательной и логарифмической функции; далее, краткие сведения о трансфинитных числах, излагаемые в связи с учением о натуральном числе, теорию кватернионов в геометрическом изложении и элементарные сведения из теории гиперкомплексных чисел в объеме, необходимом для доказательства теоремы Фробениуса. Весь перечисленный материал выделен в тексте так, что читатель, желающий ознакомиться с той или иной теорией вне зависимости от основной нити изложения, может, отвлекаясь от отдельных вводных фраз, непосредственно приняться за чтение соответствующих параграфов книги.

ISBN 978-5-458-26209-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ного числа, в котором я преследовал методологическую и частично методическую цель установления непосредственной связи между принципом полной индукции и определением конечности множества, чтобы лишь на следующей ступени абстракции установить систему аксиом Пеано.

Несколько особое положение занимает также небольшая методологическая экскурсия в область философских споров сравнительно недавнего происхождения, связанных с так называемым „интуиционизмом“. Ни на что большее, кроме беглого ознакомления читателя с постановкой вопроса, эта часть не претендует; предъявляя здесь, быть может, и более высокие требования к читателю, чем в остальных частях книги, автор не считал возможным просто обойти молчанием обстоятельства, имеющие фундаментальное значение в вопросах обоснования арифметики.

Положенные в основу методологические установки, из которых и вытекал выбор того, а не иного способа изложения, определяются общим стремлением с моей стороны установить связь между формальной стороной и тем конкретным содержанием понятия числа, которое обусловлено его ролью в изучении тех или иных конкретных величин, тех или иных количественных соотношений действительности.

Изложение теории натурального числа, принятое в главах I и II, и последовательное проведение операторной точки зрения позволяют, по моему мнению, осветить возникающие в связи с указанной установкой методологические вопросы с большей ясностью, нежели это было бы возможно в пределах классических формальных теорий. Кроме того, я считал, что с точки зрения интересов читателя здесь следовало предпочесть проникнутое определенным мировоззрением изложение более, быть может, легкому и менее ответственному сухому перечислению математических фактов. В этих двух обстоятельствах я видел достаточное оправдание для включения указанных выше вопросов и указанных методов изложения в книгу, предназначенную для заполнения весьма существенного пробела в нашей учебной литературе.

Москва, июнь 1937 г.

И. Арнольд.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.		Стр.
Предисловие	3	§ 18. Различные интерпретации системы аксиом Пеано	49
Введение	9	§ 19. Метод индуктивных определений Грассмана	56
Глава I.			
Количественные натуральные числа.			
§ 1. Счет	13	§ 20. Теория арифметических действий по Грассману	57
§ 2. Множества	13	§ 21. Сравнение натуральных чисел в теории Грассмана	63
§ 3. Равномощные множества	15	§ 22. Введение нуля	65
§ 4. Классы равномощных множеств и количественные числа	16	§ 23. Отрицательные числа и теория двустороннего натурального ряда	66
§ 5. Конкретный смысл числовых соотношений	18	§ 24. Порядковые трансфинитные числа	70
§ 6. Конкретные заместители абстрактного понятия о числе	19	Глава III.	
§ 7. Процесс счета и переход к абстрактной формулировке арифметических положений	20	Измерение скалярных величин и операторная теория рациональных чисел.	
§ 8. Основные операции над множествами и над количественными числами в теории Кантора	21	§ 25. Соотношения скалярного расположения. Скалярные величины	78
§ 9. Бесконечные множества и трансфинитные количественные числа	24	§ 26. Числовая характеристика значений скалярной величины	82
§ 10. Необходимость логической характеристики конечных множеств	27	§ 27. Числовая характеристика значений измеримых величин	84
§ 11. Логическая характеристика индивидуальных классов равномощных множеств	28	§ 28. Аддитивные величины. Задача измерения	89
§ 12. Конечные множества	29	§ 29. Операторная теория рациональных чисел	92
§ 13. Принцип полной индукции	30	§ 30. Аксиома Архимеда	99
§ 14. Принцип полной индукции и суждения об открытых совокупностях	32	§ 31. Соизмеримые и несоизмеримые переходы	102
§ 15. Свойства конечных множеств и системы конечных количественных чисел	39	§ 32. Действительные числа	105
§ 16. Натуральный ряд как бесконечная совокупность	45	§ 33. Построение шкалы числовых отметок на основе процесса измерения	110
Глава II.			
Порядковое натуральное число.			
§ 17. Аксиоматика натурального ряда. Система аксиом Пеано	47	§ 34. Классификация скалярных величин на основе критерия выполнимости операций	115
Глава IV.			
Теории пар.			
§ 35. Переход к теории пар	118		
§ 36. Отрицательные числа как пары положительных чисел	120		

	Стр.
§ 37. Пары как числовые системы с двумя единицами	125
38. Включение положительных чисел в систему пар. Принцип перманентности	126
§ 39. Общие свойства систем относительных чисел. Группа, кольцо, поле	130
40. Дробные числа как пары целых чисел	132
41. Система рациональных чисел как числовое поле	138

Глава V.

Операторная теория действий третьей ступени.

42. Постановка вопроса	140
43. Операторная теория возвышения в степень с дробным показателем.	143
44. Мультипликативное (логарифмическое) измерение	151
§ 45. Операции высших ступеней.	156

Глава VI.

Действительные, числа.

§ 46. Постановка вопроса	161
§ 47. Рациональная числовая прямая	163
§ 48. Определение непрерывности по Дедекинду	164
49. Отсутствие непрерывности в системе рациональных чисел	166
50. Введение иррациональных чисел. Непрерывность системы действительных чисел	168
51. Теорема об ограниченных монотонных последовательностях. Точные границы ограниченного множества.	174
52. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции	176
53. Метод конечного покрытия и метод деления промежутка	180
54. Теорема Вейерштрасса о предельной точке ограниченного множества	184
§ 55. Теорема о равномерной непрерывности.	185
56. Теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих точных границ	189
§ 57. Замечания о теоремах существования	190

	Стр.
§ 58. Всякую плотные множества и их сечения	192
§ 59. Основная лемма	195
§ 60. Двойные последовательности и бесконечные десятичные дроби.	197
§ 61. Основные операции в области действительных чисел	200

Глава VII.

Степенная, показательная и логарифмическая функции.

§ 62. Операция извлечения корня. Степенная функция	206
§ 63. Показательная функция.	208
§ 64. Логарифмическая функция.	212
§ 65. Общие теоремы о взаимно обратных функциях.	214
§ 66. Замечания о многозначных операциях	217
§ 67. Функциональные уравнения, определяющие показательную, степенную и логарифмическую функции	220
§ 68. Теорема Абеля об ассоциативных операциях	223
§ 69. Натуральная показательная функция и натуральный логарифм	234

Глава VIII.

Определение действительных чисел с помощью их рациональных приближений.

§ 70. Постановка вопроса. Фундаментальное неравенство	259
§ 71. Теория ϵ -приближений	264
§ 72. Операции над действительными числами, определенными системами ϵ -приближений	269

Глава IX.

Теория сходящихся последовательностей Кантора.

§ 73. Критерий сходимости Коши и его использование Кантором	277
§ 74. Связь с теорией ϵ -приближений	282
§ 75. Критерий сходимости Коши с точки зрения теории Дедекинда	284
§ 76. Теория действительных чисел по Кантору	286
§ 77. Сечения в области рациональных чисел с точки зрения теории Кантора	292

	Стр.
§ 78. Непрерывность системы действительных чисел в формулировке Кантора	293
§ 79. Операции третьей степени.	295
§ 80. Мощность системы действительных чисел	299

Глава X.

Комплексные числа.

§ 81. Введение	307
§ 82. Комплексные числа как операторы	311
§ 83. Основные действия над комплексными числами	317
§ 84. Возвышение в степень и извлечение корня	319
§ 85. Координатная форма комплексного числа	323
§ 86. Действия над комплексными числами в координатной форме	328
§ 87. Теория пределов в комплексной области	333
§ 88. Показательная и логарифмическая функции	337
§ 89. Переход к теории пар	344
§ 90. Комплексные числа как пары действительных чисел.	346

Глава XI.

Геометрическая теория кватернионов.

§ 91. Векторы-переходы в трехмерном пространстве	351
§ 92. Кватернионы как операторы.	352
§ 93. Сложение кватернионов. Векторы-операторы	354
§ 94. Умножение кватернионов. Версоры	358
§ 95. Сферическая композиция.	360
§ 96. Перемножение векторов-операторов	363
§ 97. Формулы умножения комплексных единиц i, j и k	364
§ 98. Основные законы действий в алгебре кватернионов.	365
§ 99. Вращения вокруг осей в трехмерном пространстве	368

Глава XII.

Числовые поля гиперкомплексных чисел.

§ 100. Гиперкомплексные числа	371
§ 101. Теорема Фробениуса	375

Глава XIII.

Стр.

Делимость чисел. Разложение на простые множители.

§ 102. Предмет теории чисел	371
§ 103. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель двух чисел	382
§ 104. Обобщения. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное нескольких чисел.	387
§ 105. Линейные зависимости между числами, связанные с величинами наименьшего кратного и наибольшего делителя нескольких чисел.	392
§ 106. Алгоритм Евклида	395
§ 107. Непрерывные дроби и их простейшие приложения. Решение неопределенных уравнений первой степени	397
§ 108. Разложение на первоначальные множители	413
§ 109. О простых числах	415
§ 110. Следствия теоремы о разложении на простые множители. Числовые функции $\{x\}$ и $\varphi(x)$	425

Глава XIV.

Теория сравнений.

§ 111. Понятие о сравнении. Классы равноостаточных чисел по данному модулю	43
§ 112. Основные свойства сравнений. Операции сложения и умножения по данному модулю. Признаки делимости чисел	437
§ 113. Операция деления. Делители нуля. Приведенная система вычетов	44
§ 114. Решение сравнений первой степени	44
§ 115. Дроби по простому модулю.	441
§ 116. Теоремы Ферма и Эйлера. Приложения к решению сравнений первой степени.	450
§ 117. Теорема Вильсона	451
§ 118. О числе решений сравнений высших степеней	457
§ 119. Степенные вычеты. Первообразные корни простого модуля	457
§ 120. Теория индексов и ее приложения	461
§ 121. Приложения теории степенных вычетов к вопросам элементарной арифметики.	465
Предметный указатель	475
Список литературы	479

ВВЕДЕНИЕ.

Развитие математики, начиная с середины прошлого столетия, шло под знаком особого внимания к вопросам обоснования.

Мы будем предполагать в общих чертах известным читателю тот процесс, который характеризует в этом смысле развитие геометрической мысли и ее последний этап, отмеченный открытием Лобачевского и последующей тщательной работой над логическим обоснованием геометрии и установлением системы непротиворечивых геометрических аксиом. Аналогичная работа шла параллельно и в отношении логического обоснования математического анализа, являющегося важнейшим орудием математического познания действительности.

И в том и в другом случае основной, исходной базой логических построений оказалось *понятие числа*. Логический анализ арифметических понятий стал, таким образом, неотъемлемой частью указанного процесса, вызванного к жизни насущнейшей потребностью разобраться в недостаточно ясной с логической стороны структуре математических дисциплин, чрезвычайно усложнившихся во время своего бурного роста в XVII и XVIII веках.

По пути анализа понятия числа удалось установить, что ряд обобщений этого понятия, вызывавших сомнения методологического характера с самого начала своего возникновения, допускает строгое логическое обоснование на основе понятия *натурального, т. е. целого положительного числа*.

Содержание этого утверждения распадается на две части, существенно отличающиеся друг от друга.

Во-первых, Гамильтоном (Hamilton) были установлены общие принципиальные основы, на которых может быть построена теория отрицательных и дробных рациональных чисел, если систему натуральных чисел считать заданной. На этой основе впоследствии были построены формальные теории, известные под именем „теорий пар“, не оставляющие уже никаких пробелов в логическом переходе от понятия целого числа к дробным и отрицательным числам. На той же логической основе осуществляется и переход от понятия действительного числа к системе комплексных чисел, а также и дальнейшие обобщения (теория векторов в пространстве, теория кватернионов, гиперкомплексные числа). В этой части задачи обоснования понятия числа основные пути логических построений, а также методологический анализ смыслового значения последовательных обобщений

понятия числа восходят к фундаментальному сочинению Гамильтона „Lectures on Quaternions“, изданному в 1853 году.

Около того же времени (1857) Дедекинду (Dedekind) и, независимо от него, несколько позже Мере (Méry) и Кантору (Cantor) удалось построить на логической основе *теорию действительных чисел*. Отправным пунктом при этом служила система (положительных и отрицательных) *рациональных чисел*. В отличие от построений Гамильтона и примыкающих к нему георий, носящих ярко выраженный алгебраический характер, мы встречаемся здесь с принципиально новым элементом построения — анализом понятия *непрерывности*. Самая постановка вопроса и методы ее решения были здесь тесно связаны с соответствующими проблемами математического *анализа*.

Оставалось еще провести логический анализ и установить аксиомы, лежащие в основе понятия *натурального числа*.

Первый шаг в этом направлении был сделан Германом Грассманом (Grassmann). В изданном им совместно с братом Робертом в 1861 году учебнике арифметики содержатся определения основных операций, достаточные для дальнейших формальных построений, устанавливающих основные законы арифметических действий. В системе аксиом Грассмана понятие натурального числа отражено, однако, лишь в наиболее абстрактном аспекте порядкового числа, в котором система натуральных чисел рассматривается лишь с точки зрения взаимного расположения их в натуральной последовательности 1, 2, 3, 4,...

Дополняющий построение Грассмана анализ самого понятия числа как характеристики свойств множеств или собраний предметов основан на фундаментальных работах основателя теории множеств Кантора, который обратил внимание на понятие *взаимно-однозначного соответствия* и на связанное с этим общее понятие *мощности* множеств. Далее, Кантор последовательно провел логическое разделение понятий *количественного* и *порядкового* числа, рассматривая наравне с *конечными* также и *бесконечные* множества и вводя для характеристики этих последних количественные и порядковые *трансфинитные* числа.

Дальнейшие работы, связанные с именами Дедекинда, Пеано (Peano), Фреге (Frege) и Расселя (Russel), могут быть, в известной мере, охарактеризованы как синтез построений Грассмана и Кантора, в котором основной задачей являлось выделение класса *конечных* множеств и соответственно системы конечных чисел, составляющих предмет изучения обыкновенной арифметики. При этом выяснилась фундаментальная роль в этом как раз отношении *принципа полной индукции*, лежащем в основе построений Грассмана. Этот принцип или эквивалентное ему предложение используется для выделения класса *конечных* множеств и входит, таким образом, как часть, во всякое определение *натурального* числа.

Несмотря на то, что построение теории натуральных чисел было доведено до высокой степени формальной законченности (и даже — для исключения интуиции — записано с помощью особой системы логических обозначений, введенной Пеано и изве-

стой под названием „пазиграфии“), вопрос об обосновании арифметики, в частности, вопрос о *непротиворечивости* аксиом, все же оставался открытым и после этих работ.

В настоящее время не подлежит сомнению то обстоятельство, что вопрос этот не может быть разрешен в рамках чисто формальных арифметических теорий.

С одной стороны, методологическая критика основных логических понятий (уже в XX веке), связанная с именами Брауэра (Brouwer) и Вейля (Weyl) и известная под названием „*интуиционизма*“, весьма остро поставила вопрос о непротиворечивости системы аксиом арифметики и формальной логики и о смысле математических суждений вообще. Можно считать общепризнанным, что то сравнительно непринужденное обращение с основными понятиями „множества“, „соответствия“, „все“, „существует“ и т. д., которое характеризует упомянутые выше работы Пеано, Фреге и Ресселя, во всяком случае нуждается в более глубоком обосновании и анализе, нежели тот, который возможен в рамках формальных логических построений.

В частности, попытки одного из крупнейших математиков современности, Гильберта (Hilbert), поставить вопрос (в несколько иной плоскости) все же на формальную почву и доказать этим путем основное положение о *непротиворечивости систем аксиом логики и арифметики* в их классической формулировке до сих пор не увенчались успехом.

Можно, вообще, думать, что лежащая в основе формальных построений точка зрения на математику как на процесс „писания некоторых знаков по определенным формальным правилам“ характеризует лишь некоторые внешние свойства структуры *отдельных отрезков* математических построений. В эту узкую схему не укладывается все многообразие применения в рамках даже самой математики методов содержательного, неформализованного мышления.

Примечание. В отношении сравнительно недавно предложенного Гентzenом (Gentzen)¹⁾ решения проблемы непротиворечивости было бы преждевременным высказывать здесь какое-либо суждение.

В применении к непосредственно интересующему нас вопросу об обосновании арифметики из изложенного следует, что, с одной стороны, сравнительно законченные формальные построения Грассмана и Пеано отражают лишь одну сторону дела. Применение непосредственного процесса счета и других содержательных методов рассуждения уже в рамках самой арифметики может выйти за пределы первоначальной формальной схемы. С другой стороны, и более широкая задача общего логического обоснования понятия *количественного* числа и соответствующих построений, относящихся ко множествам, приводит, как было указано выше, к неразрешенным методологическим проблемам общего характера, также выходящим за пределы чисто формальной трактовки вопроса.

¹⁾ G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Mathematische Annalen, 112 (1936), стр. 493—565.

Резюмируя, можно сказать, что вопрос об обосновании понятия натурального числа в настоящее время еще далек от своего разрешения.

Имея это в виду, мы в последующем элементарном изложении вопроса о натуральном числе ограничиваемся, оставаясь в рамках классических концепций Кантора, Пеано и Грассмана, следующими элементарными задачами:

1) установить понятие *количественного числа* в связи с вопросом о том, какие отношения действительности находят свое отражение в этом понятии,

2) установить свойства класса *конечных множеств* и соответствующие свойства системы конечных количественных (натуральных) чисел, пользуясь *принципом полной индукции*, рассматриваемым как определение класса конечных множеств,

3) выделить те свойства системы натуральных чисел, которые лежат в основе дальнейших формальных построений, составляющих содержание *грассмановской теории порядкового числа*.

По этому плану и построены первые две главы настоящей книги.

Составляющее предмет изложения дальнейших глав обобщение понятия числа уже не содержит добавочных осложнений по сравнению с теми, которые были только что указаны в отношении понятия натурального числа. В этом смысле оправдывается известное изречение Кронекера (Kronecker) „Der liebe Gott schuf die ganze Zahl, alles übrige ist Menschenwerk“, которое и сам Кронекер вряд ли имел в виду понимать дословно.

ГЛАВА I

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Счет.

В простейших своих применениях к изучению действительности натуральное целое положительное число выступает как *результат счета* предметов какой-либо совокупности.

Процесс счета требует выполнения некоторых предпосылок психологического характера, относящихся к лицу, производящему счет, и некоторых условий, которым должны удовлетворять совокупности, подвергаемые счету. Например, совокупности должны состоять из отдельных, не сливающихся между собой предметов; лицо, производящее счет, должно быть в состоянии отличать эти предметы друг от друга и от предметов, не подлежащих счету и т. п.

На перечислении и исследовании такого рода предпосылок, так же как и на вопросе об историческом развитии процесса счета, мы сейчас останавливаться не будем. Мы попытаемся прежде всего выяснить, *какие именно соотношения действительности находят свое отражение в числовой характеристике совокупностей или множеств предметов.*

§ 2. Множества.

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассматривая какие-либо предметы a, b, c, \dots, d как отдельную группу или совокупность, мы будем говорить, что имеется множество предметов a, b, c, \dots, d , а самые эти предметы будем называть элементами этого множества.

Принадлежность элемента a множеству M будем обозначать знаком *включения*

$$a \subset M$$

(a включается в M , a есть элемент M).

Если все элементы множества M включаются в множество N , то мы будем говорить, что M есть подмножество или *часть* множества N , и также писать

$$M \subset N.$$

Если при этом *не все* элементы N включаются в M , то мы будем называть M *правильной частью* N .

Задание какого-либо определенного множества осуществляется путем указания закона или правила, позволяющего судить о том, *какие элементы включаются в определяемое множество и какие нет*. Это правило может, в частности, сводиться к прямому перечислению элементов множества.

Не останавливаясь на более детальном логическом анализе относящихся сюда вопросов, ограничимся простейшими примерами.

1. Множество букв на этой странице книги.

2. Множество всех букв русского алфавита.

Слово „буква“ имеет несколько различный смысл в этих двух примерах, как это часто бывает в обыденной речи. В первом случае буква „а“ в первой строке и та же буква „а“ в иной строке — различные элементы множества; во втором — речь идет о буквах как таковых, так что для задания множества простым перечислением достаточно однократное выписывание букв алфавита.

Следующие множества могут быть образованы лишь на соответствующей ступени абстракции.

3. Множество всех равнобедренных треугольников.

Здесь, очевидно, необходимо дополнительно указать, при каких условиях два равнобедренных треугольника считаются различными, а при каких совпадающими элементами этого множества.

4. Множество M всех множеств, число элементов которых равно двум.

Элементами множества M служат здесь в свою очередь *множества*. Например, элементами M являются множество букв в слове „тэ“, множество рук нормального человека, множество цифр в двуричной системе счисления и т. д.

5. Множество M нулей в десятичном разложении числа $\pi = 3,141592\dots$

6. Множество, состоящее из одного элемента a в том случае если в десятичном разложении числа π где-нибудь есть одиннадцать нулей под ряд, и из двух элементов a и b — в противном случае.

Образование такого рода множеств и применение к ним законов обычной логики (не вызывающих сомнений в отношении таких конечных множеств, от косвенного задания которых н трудно перейти к прямому перечислению элементов) приобрело в математике сиздавна права гражданства.

Лишь сравнительно недавно было обращено внимание на то, что в отношении множеств, образованных на основе *бесконечных процессов и не допускающих прямого перечисления элементов*, дело обстоит далеко не так просто. Мы вернемся к затронутому здесь вопросу в дальнейшем (§ 14).

Для рассуждений, к которым мы сейчас переходим, достаточно, если читатель будет вкладывать в понятие множества привычное ему содержание, охарактеризованное приведенным выше описательным определением. При этом в первую очередь речь будет идти о самых простых конечных множествах, допускающих прямое перечисление элементов.