

Н. Винер

**Нелинейные задачи в теории
случайных процессов**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
В48

Винер Н.
В48 Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер – М.: Книга по Требованию, 2012. – 158 с.

ISBN 978-5-458-29643-4

Книга представляет собой курс лекций известного математика Н. Винера, прочитанный им в 1958 году в Массачусетском технологическом институте. Рассмотрены понятия случайного процесса, меры в пространстве функций, функционала от случайного процесса. Большое внимание уделено случайному процессу типа «броуновского движения» и связанной с ним мере в пространстве непрерывных функций, введенной автором в 1923 г. И известной под названием меры Винера. Рассматриваются возможности применения изложенных методов к вопросам частотной модуляции, прохождения случайных сигналов через нелинейные системы, к задачам статистической механики и др. Книга будет полезна всем, кто занимается теорией случайных процессов и ее применениями в различных областях.

ISBN 978-5-458-29643-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

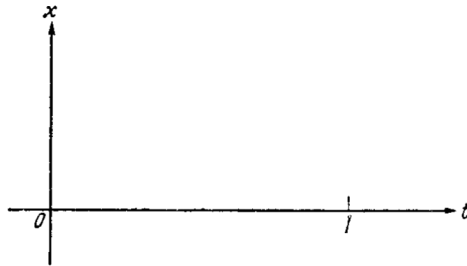
Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Л е к ц и я 1

СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ — ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ И СОСТОЯНИЯ ¹⁾

Я хочу рассмотреть методы определения случайного процесса и, в частности, методы определения спектра процесса, хотя эти методы имеют гораздо более общее применение. Для этого я подвергну разбору броуновское движение. Под таковым я подразумеваю одномерное броуновское движение.



Р и с. 1.1.

Наконец, по крайней мере в первой лекции я буду рассматривать его на отрезке времени $[0,1]$ (рис. 1.1).

Рассмотрим блуждание некоторой частицы. Пусть с течением времени эта частица перемещается случайным образом, так что смещение, которое она получит, отправившись в данный момент времени из данного положения, к другому моменту времени имеет гауссовское распределение, и для неперекрывающихся интервалов времени эти гауссовские

¹⁾ Множество состояний, на котором задается эта функция, в русской литературе по теории вероятностей называют „множеством элементарных событий“. — *Прим. перев.*

распределения независимы. Вначале я буду рассматривать смещения за фиксированные промежутки времени, а затем на основе рассмотрения движения в фиксированные моменты времени я найду распределение траекторий этого движения — сначала на конечном отрезке времени, затем на бесконечном. Далее я собираюсь рассмотреть процессы, которые зависят от этого движения линейным и нелинейным образом.

Нам понадобится формула композиции гауссовских распределений, которые независимы для непересекающихся интервалов времени. Возьмем величину x , которая имеет гауссовское распределение. Вероятность того, что эта величина находится между x_1 и x_2 , равна

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(2\pi a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx. \quad (1.1)$$

Я еще не сказал, как a зависит от времени; для того чтобы разумным способом определить эту зависимость, я рассмотрю сначала композицию двух таких перемещений. Иными словами, я беру частицу, положение которой к концу некоторого промежутка времени имеет гауссовское распределение. Новое смещение частицы из точки, в которую она пришла, также имеет гауссовское распределение. Каково распределение для величины смещения по истечении обоих промежутков времени?

Итак, я отправляюсь от совместной функции распределения

$$\left[\frac{1}{(2\pi a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \right] \left\{ \frac{1}{(2\pi b)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2b}\right] \right\} \quad (1.2)$$

[заметьте, что именно $y-x$, а не y является аргументом второй плотности вероятности в выражении (1.2)] и хочу получить распределение вероятностей для y , если x принимает все возможные значения; иначе говоря, меня интересует интеграл

$$dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \frac{1}{(2\pi b)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2b}\right) dx. \quad (1.3)$$

Легко вычислить интеграл в (1.3); это тривиально, и нам нет необходимости этим заниматься. Ответ дается равенством

$$\begin{aligned} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \frac{1}{(2\pi b)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2b}\right] dx = \\ = dy \frac{1}{[2\pi(a+b)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(a+b)}\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Это и есть закон композиции гауссовских распределений. Заметим, что при композиции двух гауссовских распределений значения параметра a суммируются. Если мы теперь учтем, что блуждания на неперекрывающихся интервалах гауссовские и независимые и что величина смещения зависит только от длины интервала времени и не зависит от начального момента, то мы увидим (так как a и b складываются), что распределение для величины смещения за некоторое время t равно

$$\frac{1}{(2\pi k)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2k}\right), \quad (1.5)$$

где k зависит от t линейно. Нормируем время так, чтобы k было равно t :

$$\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \quad (1.6)$$

Заметьте, что при композиции гауссовских распределений эти временные параметры также складываются.

Теперь я собираюсь сопоставить траектории частиц со значениями переменной α , где α меняется от 0 до 1. Это отображение я хочу провести подробно. Заметим, во-первых, что все случайные движения частиц где-нибудь заканчиваются и что траектории частиц отображаются на интервал α от 0 до 1. На данном этапе я не отделял различные области значений α ; я взял всю область α от 0 до 1 и сопоставил ее с множеством всех траекторий.

Рассмотрим броуновское движение в два момента времени: $t=1/2$ и $t=1$ (рис. 1.2). Я введу четыре класса броуновских траекторий. Заметим, что в момент $t=1/2$ есть две возможности: частица может находиться под осью t или над осью, вероятность попадания на ось равна нулю. Это напоминает бросание монеты, при котором вероятность

попадания на ребро равна нулю. Мы бросаем монету дважды: при $t=1/2$ и при $t=1$. Если иметь в виду, что может выпасть только герб или решетка, то существует возможность выпадения комбинаций герб — герб, герб — решетка, решетка — герб, решетка — решетка. Что это за возможности выпадения комбинации герб — герб, решетка — решетка и

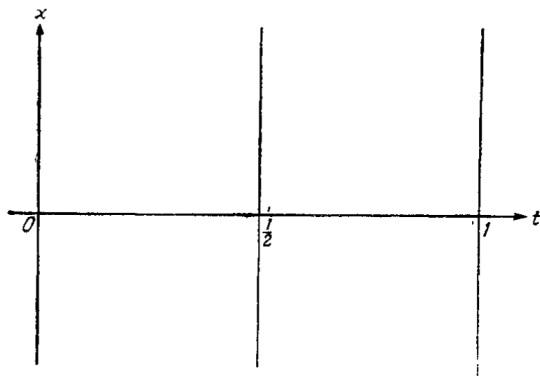


Рис. 1.2.

т. д.? Величины a и b в уравнении (1.4), соответствующем двум бросаниям, равны $1/2$. Распределение задается выражением

$$\frac{1}{[2\pi(\frac{1}{2})]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})}\right] \frac{1}{[2\pi(\frac{1}{2})]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})}\right] dx dy. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) есть вероятность того, что частица в момент $t=1/2$ находится между x и $x+dx$, а в момент $t=1$ между y и $y+dy$. Поэтому вероятность того, что частица находится, скажем, под осью при $t=1/2$ (т. е. x отрицательно при $t=1/2$) и x отрицательно при $t=1$, равна

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{[2\pi(\frac{1}{2})]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})}\right] \times \\ \times \frac{1}{[2\pi(\frac{1}{2})]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})}\right] dx dy. \quad (1.8)$$

Этот интеграл имеет вполне определенное значение. Возьмем теперь точку 0 на оси α , и отложим от этой точки интервал AB , длина которого равна величине интеграла (1.8) (рис. 1.3). Скажем, что AB соответствует траекториям,

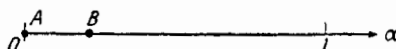


Рис. 1.3.

пересекающим внизу оси $t=1/2$ и $t=1$. Затем возьмем в (1.7) x между 0 и ∞ , а y между $-\infty$ и 0. Вероятность таких значений x и y равна

$$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=-\infty}^0 \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \times \\ \times \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] dx dy. \quad (1.9)$$

Отложим на оси α другой интервал, BC , соответствующий величине интеграла (1.9) (рис. 1.4). [Заметим, что сумма (1.8)

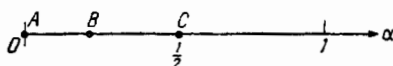
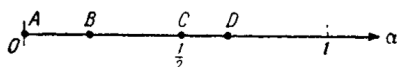


Рис. 1.4.

и (1.9) есть вероятность того, что конец траектории лежит под осью, и равна $1/2$.] Затем интегрируем (1.7) следующим образом:

$$\int_{x=-\infty}^0 \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \times \\ \times \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] dx dy. \quad (1.10)$$

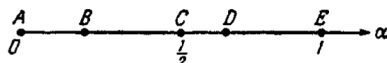


Р и с. 1.5.

Это дает нам третий промежуток, CD , на линии α (рис. 1.5). И, наконец, четвертый промежуток, DE (рис. 1.6), дает

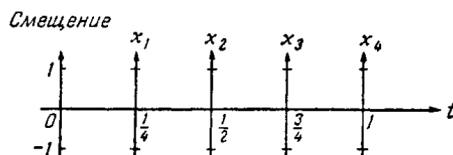
$$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \times \\ \times \frac{1}{\left[2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] dx dy. \quad (1.11)$$

Итак, мы получили четыре сегмента на линии α соответственно четырем вероятностям, сумма которых равна 1.



Р и с. 1.6.

Возьмем более мелкое разбиение множества броуновских траекторий. Построим такое разбиение, чтобы любое новое подмножество заключалось внутри одного и только одного из имевшихся ранее подмножеств и соединение некоторого определенного числа новых подмножеств составляло прежнее целое подмножество. Мы получим более мелкое разбиение



Р и с. 1.7.

линии α , соответствующее областям блуждания броуновского движения. Сначала я разделю мельче отрезок времени $[0, 1]$: я буду работать с четырьмя моментами времени (рис. 1.7). Вероятность того, что частица лежит в заданной области

в каждый из четырех моментов, задается интегралом от

$$\left\{ \frac{1}{\left[2\pi \left(\frac{1}{4} \right) \right]^{1/2}} \right\}^4 \exp \left[-\frac{x_1^2}{2 \left(\frac{1}{4} \right)} \right] \exp \left[-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2 \left(\frac{1}{4} \right)} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{(x_3 - x_2)^2}{2 \left(\frac{1}{4} \right)} \right] \exp \left[-\frac{(x_4 - x_3)^2}{2 \left(\frac{1}{4} \right)} \right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (1.12)$$

по соответствующей области.

Далее я рассматриваю вероятность того, что частица проходит через некоторое отверстие (область значений x), заданное для каждого из четырех моментов времени. Я беру теперь четыре момента времени $1/4$, $1/2$, $3/4$ и 1 и рассматриваю по четыре области для каждого момента. В каждый из этих моментов времени я буду различать не только положительные и отрицательные значения x , но и значения от $-\infty$ до -1 , от -1 до 0 , от 0 до 1 и от 1 до ∞ . Сколько тогда будет типов траекторий? Имеются 4 возможные области для каждого момента времени и 4 последовательных момента, т. е. $4^4 = 256$ типов траекторий. Как определить вероятность каждого из этих типов? Я просто проинтегрирую выражение (1.12) по соответствующей области значений различных x . Получится 256 чисел, сумма которых равна 1. Длина каждого из имевшихся ранее интервалов на линии α равна сумме 64 из этих чисел. Можно получить в определенном порядке 256 неперекрывающихся малых интервалов (неодинаковой длины), по 64 в каждом из прежних интервалов α . Мы получаем сопоставление классов траекторий и маленьких областей значений α .

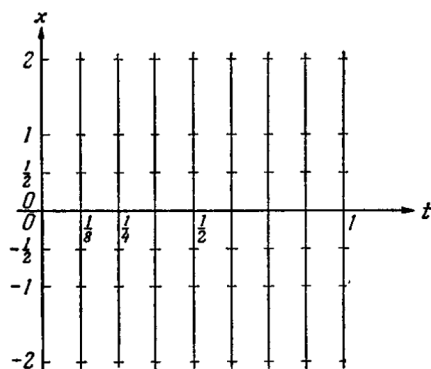
Сделав это, возьмем более мелкое разбиение (рис. 1.8). Во-первых, число моментов времени вырастет до 8, так что для плотности вероятности будем иметь выражение

$$\left\{ \frac{1}{\left[2\pi \left(\frac{1}{8} \right) \right]^{1/2}} \right\}^8 \exp \left[-\frac{x_1^2}{2 \left(\frac{1}{8} \right)} \right] \dots \exp \left[-\frac{(x_8 - x_7)^2}{2 \left(\frac{1}{8} \right)} \right]. \quad (1.13)$$

Я буду интегрировать по областям, полученным следующим способом (этот прием повторяется и в дальнейшем): у нас теперь имеются 8 моментов времени; сохраним все предыдущие деления оси x не только для моментов времени, имевшихся ранее, но и для вновь введенных; затем для

каждого из интервалов, ограниченных с обеих сторон, введем новое деление оси x посередине интервала. (Делить именно пополам не обязательно, но удобно.) Для областей x , простирающихся к $+\infty$, новое деление берется на единицу выше, чем прежде, ограничивавшее эту область снизу; для областей, простирающихся к $-\infty$, — на единицу ниже, чем прежде.

Теперь у нас уже не 4^4 , а 8^8 интервалов, соответствующих этим случайным кривым. Каждый из этих интервалов имеет конечную длину, каждый из них лежит внутри одного

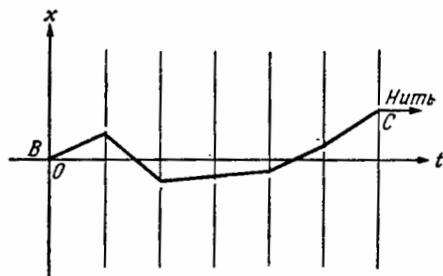


Р и с. 1.8.

из интервалов предыдущего разбиения, и на интервале $0 < \alpha < 1$ они образуют еще более мелкое разбиение. Если продолжать разделять движение в пространстве и во времени все более и более тонко, то количество рангов для α будет возрастать. Легко показать, что при таком разделении (как и при более общем способе разделения) длина каждого из интервалов α стремится к нулю. Если взять любое значение α , не принадлежащее счетному множеству наших делений оси α , то это значение будет лежать в одной из четырех областей, полученных на 1-м этапе разбиения, и в одной из 256 областей, полученных на 2-м этапе, и т. д. Значение α однозначно определяется (за исключением граничных точек интервалов, которые не учитываются) тем, в какие интервалы оно попадает на различных этапах разбиения. Другими словами, мы в состоянии все более и более

тонко отделять те из блужданий, которые соответствуют данной точке α .

Вообще говоря, неверно, что, проделав это, я получу некоторую непрерывную кривую, но я покажу, что можно обойти эту трудность. Можно ввести некоторую величину, которую я назову „прямизной последовательности делений“. Так как 2^n уже не понадобится, скажу просто, что имеется ряд отверстий — по одному отверстию в каждый из произвольного числа моментов времени (рис. 1.9).



Р и с. 1.9.

Предположим, что имеется нить BC , закрепленная в точке O и продетая через эти отверстия. Пусть она туго натянута. Существует по крайней мере одна часть нити, которая имеет наибольший наклон. Наибольший наклон туго натянутой нити меньше, чем наибольший наклон любой другой кривой, проходящей через тот же ряд отверстий. Можно назвать тугую нить кратчайшей из проходящих через данный ряд отверстий. Эта нить покажет нам „гладкость“ этого ряда отверстий следующим образом. Обозначим кратчайшую (для данного ряда отверстий) нить $x = s(t)$; каждому ряду отверстий соответствует своя $s(t)$. Рассмотрим

$$\max \frac{|s(t + \tau) - s(t)|}{|\tau|^{1/4}}. \quad (1.14)$$

Это максимальное значение назовем „шероховатостью“ данного ряда отверстий. Нет других оснований брать в (1.14) $|\tau|$ в степени $1/4$, кроме следующего: степень должна быть равна некоторому числу, меньшему половины. На каждом этапе разбиения имеются ряды отверстий, и на каждом этапе

я выбрасываю все ряды отверстий, для которых „шероховатость“ больше чем A , т. е.

$$\max \frac{|s(t+\tau) - s(t)|}{|\tau|^{1/4}} > A. \quad (1.15)$$

Теперь я могу доказать следующее: сумма длин интервалов α , соответствующих рядам отверстий, которые выбрасываются на каждом из этапов, ограничена. Когда я выбрасываю ряды отверстий, я имею для каждого этапа одно и то же выражение $l(A)$, ограничивающее сумму длин выброшенных интервалов. Множество всех выброшенных рядов отверстий только счетно; сумма длин соответствующих интервалов α сходится, и соединение этих интервалов образует так называемое измеримое множество; мера этого множества не превосходит $l(A)$.

Я мог бы доказать (но не имею времени, чтобы сделать это здесь), что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} l(A) = 0. \quad (1.16)$$

Другими словами, сумма длин интервалов, соответствующих всем рядам отверстий любого из этапов, „гладкость“ которых меньше некоторой величины, ограничена, и, если A растет, эта сумма стремится к нулю. Разрешите мне выбросить ряды отверстий, „гладкость“ которых меньше определенной величины. Это значит, что я выброшу определенное множество значений α , мера которого меньше некоторой малой величины. Остающиеся ряды отверстий будут содержать непрерывные траектории; более того, все эти непрерывные траектории будут удовлетворять одному и тому же условию равномерной непрерывности. Иными словами, Δx стремится к нулю быстрее, чем некоторая функция от Δt .

Привлечем следующую математическую теорему:

Пусть дана последовательность кривых, проходящих через некоторый ряд отверстий и удовлетворяющих определенному условию равномерной непрерывности. Предположим, что отверстия сужаются (в пределе к нулю) и что увеличивается плотность моментов времени, в которые они заданы. Тогда наше условие равномерной непрерывности сжимает кривые теснее и теснее во все большем и большем количестве точек. Последовательность кривых равномерно сходится к предельной кривой, удовлетворяющей тому же