

Журнал Квант 1974 №2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
Ж92

Ж92 Журнал Квант 1974 №2 / – М.: Книга по Требованию, 2022. – 68 с.

ISBN 978-5-458-29902-2

ISBN 978-5-458-29902-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Заполненная таблица полностью определяет операцию. В таблицах 2—5 приведены примеры разных операций на множестве из двух элементов. Читателю будет полезно описать таблицами все остальные операции на этом множестве (всего их 16; советуем их найти).

В таблице 6 приведен пример операции на множестве $M_3 = \{a, b, c\}$ из трех элементов. Подсчитайте, сколько операций существует на M_3 .

В известных нам из арифметики случаях операциям присвоены названия: скажем, сложение, вычитание, умножение. В общем случае, о котором только что шла речь, операции специальных названий не имеют. Лишь для удобства ту или иную операцию иногда называют умножением, еще реже — сложением, хотя

вполне можно было бы воспользоваться любым другим, специально выдуманным, названием. То же самое относится и к символам, которыми обозначаются результаты применения операций. Например, если a и b — числа, то, складывая их, мы получаем число $a + b$ (используется символ «+»), вычитая — получаем число $a - b$ (символ «-») и т. д. В общем случае таких «связывающих» символов у нас нет, но их можно придумать. Например, будем обозначать через $a * b$ результат применения той или иной определенной операции к паре (a, b) . Если a и b — числа, а рассматриваемая операция — сложение, то символ «*» становится символом «+». Например, операцию, описанную таблицей 3, можно описать и так:

$$\begin{aligned} a * a &= a, \\ a * b &= a, \\ b * a &= b, \\ b * b &= b. \end{aligned}$$

	a	b
a		a
b	b	

Табл. 1"

	a	b
a	a	b
b	b	a

Табл. 2

	a	b
a	a	a
b	b	b

Табл. 3

	a	b
a	b	a
b	b	b

Табл. 4

	a	b
a	a	b
b	a	a

Табл. 5

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Табл. 6

Если при данной операции парам (a, b) и (b, a) сопоставляется один и тот же элемент, то есть $a * b = b * a$, то говорят, что элементы a и b *коммутируют* относительно данной операции или являются *перестановочными* (относительно данной операции). Так, например, относительно операции, описанной в таблице 2, элементы a и b коммутируют, а относительно операции, описанной в таблице 3, эти же элементы не коммутируют. Если операция такова, что относительно нее коммутируют все пары, то говорят, что она *коммутативна*. Конечно, сложение и умножение целых чисел — коммутативные операции, таблицы 2 и 6 тоже задают коммутативные операции.

Докажите, что таблица Кэли коммутативной операции симметрична относительно главной диагонали (так называют линию, идущую из левого верхнего угла таблицы в правый нижний угол).

Сформулируем теперь в общем виде еще одно свойство, которым может обладать (или не обладать) операция. Пусть a, b и c — три (не обязательно

различных) элемента множества M . Если $a * (b * c) = (a * b) * c$ для этих элементов, то их называют ассоциирующими.

Подчеркнем, что в обеих частях последнего равенства элементы a, b, c , независимо от расстановки скобок, выписываются в одном и том же порядке. В этом смысле тройка элементов a, b, c является упорядоченной.

Так, например, элементы b, a, b из M_2 относительно операции, описанной в таблице 3, — ассоциирующие, а относительно операции из таблицы 5 не являются ассоциирующими (проверьте это!). Операция, относительно которой все тройки элементов множества M являются ассоциирующими, называется ассоциативной. Сложение и умножение целых чисел — операции не только коммутативные, но и ассоциативные. Читателю будет полезно придумать пример такой операции, которая была бы коммутативной, но не ассоциативной.

Теперь мы готовы дать определение кольца. Кольцо — это множество M с двумя специфическими операциями. Одну из них принято называть сложением и обозначать элемент, сопоставляемый ему паре (a, b) , через $a + b$, а другую принято называть умножением и обозначать элемент, сопоставляемый паре (a, b) , через ab . Специфика этих операций заключена в следующих пяти требованиях, которые к ним предъявляются:

сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, то есть для всех пар (a, b) и для всех троек (a, b, c) элементов из M должны иметь место равенства:

$$1) a + b = b + a;$$

$$2) (a + b) + c = a + (b + c);$$

3) в множестве M должен существовать такой элемент 0 , что $a + 0 = a$ при всех a из M ; этот элемент 0 принято называть нулем;

4) для каждого a из M должен существовать такой элемент c из M , что $a + c = 0$; элемент c называют

противоположным элементу a и часто обозначают через $-a$ (так что в данном случае $c = -a$);

5) от умножения требуется лишь одно: оно должно быть дистрибутивно связано со сложением, то есть для любых a, b, c из M должны иметь место равенства

$$a(b + c) = ab + ac;$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

(различать эти два равенства надо потому, что умножение не предполагается коммутативным). Часто указанное свойство называют «распределительностью умножения относительно сложения».

Вот что такое кольцо. Очень важно иметь в виду, что из требований 1) — 4) следует «единственность» нуля и «единственность противоположного элемента». Означает это следующее: а) если 0_1 и 0_2 — два элемента кольца M , удовлетворяющие требованию 3), то $0_1 = 0_2$; б) если $a + c_1 = a + c_2 = 0$, то $c_1 = c_2$. Иными словами: в кольце только один нуль, и каждый элемент кольца имеет лишь один противоположный элемент. В самом деле, ведь в силу 1) и 3)

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Этим доказано а). Далее, если к обеим частям равенства

$$a + c_1 = a + c_2$$

прибавить, скажем, c_1 , то получится

$$c_1 + (a + c_1) = c_1 + (a + c_2),$$

или, в силу 2),

$$(c_1 + a) + c_1 = (c_1 + a) + c_2,$$

или, ввиду того что $a + c_1 = c_1 + a = 0$, получаем

$$0 + c_1 = 0 + c_2,$$

или $c_1 = c_2$, чем и доказывается б).

Примерами колец могут служить известные нам уже множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех полиномов с вещественными коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения. Если внимательно присмотреться, то станет ясно следующее обстоятельство:

в названных примерах колец умножение подчинено нескольким требованиям, помимо требования 5). Перечислим их, продолжая нумерацию:

6) *умножение коммутативно*, то есть $ab = ba$ при всех a и b ;

7) *умножение ассоциативно*, то есть $(ab)c = a(bc)$ при всех a , b и c ;

8) *в кольце существует такой элемент e , что $ae = a$ для всех a .*

Если кольцо M удовлетворяет условию 6), то его называют *коммутативным*; если оно удовлетворяет условию 7), то его называют *ассоциативным*; наконец, если M удовлетворяет условию 8), то говорят, что M *обладает единицей* и обозначают элемент e символом 1.

Следовательно, примеры колец, о которых говорилось выше, — это примеры колец коммутативных, ассоциативных и обладающих единицей. Именно о таких кольцах мы будем говорить ниже. Но сразу отметим, что в теории колец значительное место занимают разделы о кольцах, не подчиненных тем или иным требованиям из числа 6) — 8) (например, о некоммутативных или о неассоциативных кольцах).

Сейчас мы построим еще один пример кольца.

Напомним, что для любых двух целых чисел a и b , где $b \neq 0$, существуют такие целые числа q и r , что

$$a = bq + r \quad (1)$$

и одновременно

$$0 \leq r < |b|. \quad (2)$$

Число q называют *частным*, а число r — *остатком* от деления a на b . Советуем читателю, повторяя эту тему школьной арифметики, доказать, что числа q и r , упомянутые выше, единственны, то есть если

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2,$$

где $0 \leq r_1, r_2 < |b|$, то $r_1 = r_2$ и $q_1 = q_2$.

Рассмотрим множество всевозможных остатков от деления целых чисел на фиксированное число n . Легко сообразить, что это множество

состоит из чисел $0, 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим его через Z_n . Введем на Z_n две операции: сложение и умножение. Конечно, обычное сложение или обычное умножение целых чисел не являются операциями на Z_n : ведь числовая сумма или числовое произведение остатков от деления на n может быть больше, чем n , и не принадлежать Z_n . Поэтому, определяя операции на Z_n , нужно элементы этого множества рассматривать не как числа, а как-то иначе. Условимся под символом $\bar{k}$, где k — число из Z , понимать остаток от деления на n числа k . В частности, если $0 \leq k < n$, то символ $\bar{k}$ означает то же самое число k , но рассматриваемое как остаток из Z_n .

Назовем *суммой* двух остатков $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из Z_n остаток $\overline{a+b}$:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}. \quad (3)$$

Конечно, такое определение было бы совершенно безукоризненным, если бы было сказано, что a и b — остатки от деления на n : тогда $\overline{a+b}$ — остаток от деления на n вполне определенного целого числа — числа $a+b$. Но по причинам, которые будут ясны ниже, мы не требуем неравенств $0 \leq a, b < n$ — числа a и b предполагаются любыми. В этом случае естественно высказать следующее сомнение: допустим, a_1, a_2, b_1, b_2 — разные целые числа, но $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ и $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$; тогда, согласно сказанному, сумма остатков $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$ — это, с одной стороны, остаток $\overline{a_1 + b_1}$, а с другой — остаток $\overline{a_2 + b_2}$. Действие можно считать определенным только в том случае, если $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, а это равенство нужно доказывать.

Вот его доказательство. Пусть, в соответствии с (1), $a_i = nq_i' + r'$, $i = 1, 2$, и $b_j = nq_j'' + r''$, $j = 1, 2$, где r' и r'' — остатки. Тогда $\overline{a_1 + b_1} = \overline{n(q_1' + q_1'') + r' + r''}$ и $\overline{a_2 + b_2} = \overline{n(q_2' + q_2'') + r' + r''}$. С другой сторо-

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Табл. 7. Сложение в Z_3

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Табл. 8. Сложение в Z_4

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 9. Умножение в Z_3

ны, $a_2 + b_2 = n(q_2' + q_2'') + r' + r''$,
и снова

$$\overline{a_2 + b_2} = \overline{r' + r''}.$$

Следовательно, $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$,
что и требовалось доказать.

Итак, одна операция на Z_n определена. Она называется *сложением*, а результат ее применения к двум остаткам из Z_n , как уже говорилось, называется суммой.

Предложение 1. Сложение на Z_n удовлетворяет требованиям 1) — 4), перечисленным в определении кольца.

Доказательство. Благодаря равенству (3), которое подробно обсуждалось, выше, коммутативность и ассоциативность введенного сложения непосредственно следуют из коммутативности и ассоциативности сложения целых чисел. Аксиома 3) о существовании нуля выполняется благодаря существованию остатка $\bar{0}$ (его дают числа, кратные n): $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$. Наконец, противоположным остатку $\bar{a}$ служит, очевидно, остаток $-\bar{a}$, так что $-\bar{a} = -a$, и аксиома 4) также выполняется.

Вот несколько таблиц сложения в Z_n (см. табл. 7—8).

Введем теперь в Z_n умножение. Положим для $\bar{a}, \bar{b}$ из Z_n

$$\overline{ab} = \overline{ab} \quad (4)$$

и назовем $\overline{ab}$ *произведением* $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а само действие — *умножением*. Конечно, и в этом случае нужно доказать, что определение корректно, то есть нужно убедиться в следую-

щем:

если $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ и $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, то $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_2 b_2}$.

Пусть, в самом деле, $a_i = q_i' n + r'$, $i = 1, 2$, и $b_j = q_j'' n + r''$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{a_1 b_1} &= \overline{(q_1' n + r')(q_1'' n + r'')} = \\ &= \overline{n(nq_1' q_1'' + r' q_1'' + r'' q_1') + r' r''} = \\ &= \overline{r' r''} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{a_2 b_2} &= \overline{n(nq_2' q_2'' + r' q_2'' + r'' q_2') + r' r''} = \\ &= \overline{r' r''}. \end{aligned}$$

Предложение 2. Умножение на Z_n удовлетворяет аксиомам 5) — 8), перечисленным в определении кольца.

Доказательство. Дистрибутивная связь со сложением, а также коммутативность и ассоциативность умножения следуют, благодаря (4), из аналогичных свойств умножения целых чисел. Роль единицы для умножения играет остаток $\bar{1}$.

Итак, Z_n — кольцо коммутативное, ассоциативное и обладающее единицей.

Умножение в каком бы то ни было кольце R существенно характеризуется тем, в каких случаях оказывается выполненным равенство

$$ab = 0. \quad (5)$$

Так, например, в кольце Z целых

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 10. Умножение в Z_4

чисел равенство (5) выполняется лишь тогда, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для Z_3 (см. табл. 9). Но в кольце Z_6 , например, равенство (5) справедливо при $a = \bar{2}$ и $b = \bar{3}$, то есть произведение ненулевых сомножителей оказывается здесь равным нулю. Принято говорить, что элемент a кольца R является *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и если существует такой элемент $b \neq 0$ в R , что $ab = 0$. Таким образом, остаток $\bar{2}$ в Z_6 является делителем нуля; с другой стороны, в рассмотренных выше кольцах Z и Z_3 делителей нуля нет совсем.

Наряду с равенством (5) умножение в кольце характеризуется и тем,

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 11. Умножение в Z_6

какие его элементы удовлетворяют равенству

$$xy = 1. \quad (6)$$

Такие элементы называют *обратимыми*. В кольце Z множество обратимых элементов состоит всего лишь из 1 и -1 ; в кольце Z_3 обратимы все элементы, кроме 0, а в кольце Z_6 обратимы только остатки $\bar{1}$ и $\bar{5}$, потому что $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$. (Советуем читателю проверить, что в Z_6 все остальные элементы x не являются обратимыми.)

Мы познакомились, таким образом, с понятием кольца, рассмотрели простейшие примеры и первые структурные характеристики этого нового объекта: делители нуля и обратимые элементы. Теперь можно приступить к изучению таких важных вопросов, как, например, вопрос о простых элементах кольца и разложении на простые множители. Этой цели мы сейчас перед собой не ставим: ей естественно посвятить отдельный разговор.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

1. Докажите, что множество полиномов с действительными коэффициентами с обычным сложением и умножением является кольцом без делителей нуля. Каково множество обратимых элементов этого кольца?

2. Составьте таблицы сложения и умножения в Z_6 и Z_7 и докажите, что в этих кольцах не только нет делителей нуля, но и что каждый ненулевой элемент в них обратим.

3. Докажите, что свойствами, о которых говорится в предыдущей задаче, обладает любое кольцо Z_p при простом числе p .

4. Докажите, что в кольце Z_n каждый ненулевой элемент либо обратим, либо является делителем нуля.

5. Докажите утверждение 4 для любого кольца, обладающего единицей, состоящего из конечного числа элементов и ассоциативного.

А.Б.ШВАРЦБУРГ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ



Магнитная стрелка, помещенная в сосуд с водой, служила путешественникам для ориентации в море еще в средние века. Долгое время считалось, что стрелка указывает на север, точнее — на Полярную звезду. Однако наблюдения при дальних морских путешествиях и на суше показали, что это неверно. Поэтому мореплавателям особенно важно было знать:

Куда указывает стрелка компаса?

Христофор Колумб по пути в Новый Свет обратил внимание на важное свойство магнитной стрелки. Вскоре после отплытия (в сентябре 1492 года), продвигаясь на запад от берегов Пиренейского полуострова, он заметил, что магнитная стрелка все больше отклоняется от направления север — юг. Наблюдения по Солнцу показали, что за четыре дня конец стрелки сместился на целое деление (шкала компаса состояла из 32 делений, так что каждое соответствовало углу в $11\frac{1}{4}^\circ$). Многие моряки восприняли это неожиданное и непонятное явление как плохое предзнаменование. Рассказывают даже, что капитану, во избежание волнений на борту, пришлось заявить команде, что сместилась Полярная звезда, вызвав этим смещение стрелки. Однако по мере приближения к Америке смещение стало уменьшаться, и постепенно стрелка приблизилась к привычному положению.

Таким образом было установлено два важных факта: 1) магнитная стрелка может отклоняться от направления север — юг; 2) величина отклонения изменяется в зависимости от места наблюдения.

Величину угла между географическим меридианом и направлением стрелки (в горизонтальной плоскости) называют склонением.

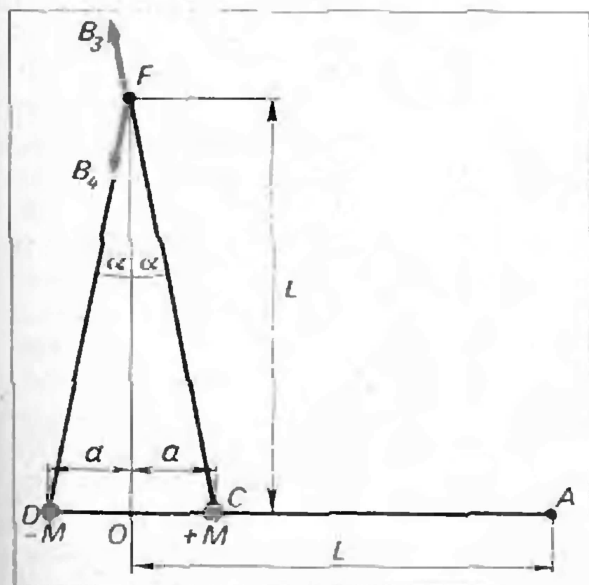
Представлению о том, что магнитная стрелка направлена строго на север, был нанесен еще один удар: ученые обнаружили, что стрелка не устанавливается горизонтально; точнее, было замечено, что в северном полушарии ее северный конец отклоняется вниз. Наименьший угол между направлением стрелки и горизонтальной плоскостью назвали наклоном. Наклонение в разных местах также оказалось различным, причем распределение величины склонения и наклона по поверхности Земли выглядело чрезвычайно сложно. После этого возникло естественное предположение, что причина отклонения стрелки как-то связана с Землей. Такое предположение получило развитие в знаменитой книге английского естествоиспытателя Гильберта «О магните, магнитных телах и великом магните Земли», которая увидела свет еще в 1600 году. Чтобы объяснить поведение магнитной стрелки, автор уподобляет земной шар стержнеобразному магниту, уже знакомому ученым в то время. Подобная модель во многом сохранила свое значение и сегодня. С помощью та-

кой модели можно приближенно описать магнитное поле Земли, однако это довольно грубое описание. На поверхности Земли магнитное поле обнаруживает отступления от этой модели, а далеко от Земли, в космосе, такая модель хорошо описывает магнитное поле Земли.

Магнитный диполь

Электрическое поле двух зарядов, раздвинутых на расстояние l , носит название поля электрического диполя. Хотя в природе нет магнитных зарядов, существуют магнитные поля, картина силовых линий которых подобна картине силовых линий электрического поля диполя. Таково, например, поле намагниченного стержня на достаточно больших расстояниях от него. По аналогии с электрическим такое поле называют полем магнитного диполя. При описании такого поля можно считать (хотя на самом деле это не так), что оно создается двумя «магнитными массами», помещенными на концах намагниченного стержня (см. рисунок). В течение многих лет ученые так и рассуждали, уподобляя магнитные массы электрическим зарядам.

Найдем сначала индукцию в «далекой» точке A на оси диполя такой,



что расстояние $OA = L \gg DC$. В этой точке вектор магнитной индукции B направлен по прямой DC , то есть по оси диполя. Численное значение B можно найти по аналогии с законом Кулона, поскольку мы пользуемся аналогией с электрическими зарядами. Значение индукции поля «магнитной массы» — M в точке A составляет

$$B_1 = -\frac{kM}{(L+a)^2}.$$

Для поля электрического заряда было бы $E = \frac{k'Q}{(L+a)^2}$. Здесь k и k' — коэффициенты, зависящие от выбора системы единиц. В этой же точке индукция поля «магнитной массы» M равна

$$B_2 = \frac{kM}{(L-a)^2}.$$

Используя принцип суперпозиции, найдем результирующее значение индукции в точке A :

$$B_{||} = B_1 + B_2 = 4 \frac{kMaL}{(L^2 - a^2)^2}.$$

Так как $L \gg a$, можно считать, что

$$B_{||} = 4 \frac{kMa}{L^3}.$$

Величина $2kMa$ носит специальное название — магнитный момент диполя; обозначим эту важную величину через p , тогда

$$B_{||} = \frac{2p}{L^3}. \quad (1)$$

Найдем теперь индукцию в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Индукция поля, созданного «магнитной массой» M в точке F (см. рисунок), направлена по прямой FC и составляет

$$B_3 = \frac{kM}{(FC)^2}.$$

Индукция B_4 в этой же точке, созданная полюсом $-M$, численно равна B_3 , а направлена по прямой DF . Проектируя векторы индукции B_3 и B_4 на ось OF и CD , увидим, что сумма проекций на ось FO равна 0. Результирующая проекция на ось CD составит

$$B_{\perp} = 2B_3 \sin \alpha = 2 \frac{kMa}{(FC)^2 FC}.$$

Используя определение момента диполя $p = 2kMa$ и замечая, что при больших расстояниях FC ($FC \gg 2a$) можно приближенно положить $FC = L$, запишем формулу для величины магнитной индукции в плоскости, перпендикулярной оси диполя:

$$B_{\perp} = \frac{p}{L^3}. \quad (2)$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что поле диполя сложнее поля точечного заряда: величина индукции зависит не только от расстояния до источника поля, но и от угла радиуса-вектора точки, в которой измеряется индукция с осью диполя. При изменении этого угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ индукция поля (на том же расстоянии L) уменьшается вдвое.

Теперь применим модель магнитного диполя к описанию магнитного поля Земли. Представим себе, что внутри земного шара находятся две «магнитные массы», образующие диполь. Ось диполя продолжена так, что пересекает поверхность Земли. Точки пересечения называются магнитными полюсами. Величина индукции магнитного поля вблизи полюсов вдвое больше, чем на магнитном экваторе. Непосредственные измерения показывают, что вблизи магнитных полюсов $B = 0,7 \cdot 10^{-4}$ тл, а вблизи экватора $B = 0,4 \cdot 10^{-4}$ тл. Если не интересоваться специально областями вблизи полюса или экватора, то для оценки принимают среднее значение $B = 0,5 \cdot 10^{-4}$ тл.

С помощью формул (1) или (2) можно узнать дипольный момент, соответствующий определенным значениям индукции. Считая, что радиус Земли равен $R_0 = 6400$ км, получим, что величина магнитного момента Земли составляет

$$p = 8 \cdot 10^{15} \text{ тл} \cdot \text{м}^3.$$

Вариации и аномалии магнитного поля

Одним из первых пунктов, где систематически начали измерять ве-

личину магнитного склонения, был Лондон. Вот значения склонения по годам: в 1540 году — $7,2^\circ$; в 1560 — $9,6^\circ$; в 1580 — $10,9^\circ$. Оказывается, склонение меняется со временем, причем скорость этого изменения не постоянна. После 1580 года начинается уменьшение склонения. Около 1660 года значение этой величины перешло через нуль и стало отрицательным, то есть стрелка стала отклоняться не к востоку, а к западу. Угол отклонения возрастал и в 1820 году составил около 24° . Потом западное склонение стало уменьшаться и сейчас составляет около 16° .

Сейчас значения склонения измеряются на Земле в нескольких десятках тысяч пунктов. Результаты измерений наносят на так называемые магнитные карты. На этих картах проведены линии, соединяющие пункты с одинаковым значением склонения (так же как на географических картах — точки, лежащие на одинаковой высоте над уровнем моря).

Таким образом, из-за изменения склонения с течением времени — так называемых вариаций — магнитные карты теряют ценность, и через несколько лет их нужно составлять заново. Склонение магнитной стрелки нельзя объяснить с помощью представлений о постоянном магнитном диполе, расположенном в центре Земли. Такие представления описывают лишь усредненное поведение магнитного поля. На Земле существует немало магнитных аномалий, характеризующихся значительным отступлением величины и направления магнитного поля от дипольной модели. Так, в южной оконечности Южной Америки индукция магнитного поля падает до $2,5 \cdot 10^{-5}$ тл — меньше, чем на магнитном экваторе. Некоторые аномалии связаны с залеганием магнитных материалов. Такова, например, знаменитая Курская магнитная аномалия, где индукция магнитного поля превышает величину $2 \cdot 10^{-4}$ тл. Это больше значения индукции вблизи магнитных полюсов Земли.

Магнитосфера Земли и солнечный ветер

До сих пор речь шла о магнитном поле на поверхности Земли. Однако магнитное поле Земли играет важную роль в физических процессах, протекающих на больших высотах, там, где «дует» солнечный ветер. Солнечным ветром называют поток газа, радиально удаляющийся по всем направлениям от Солнца. Газ солнечного ветра полностью ионизирован и состоит из протонов и электронов. В таком состоянии он хорошо проводит электрический ток.

Солнечный ветер не достигает Земли, этому препятствует создаваемое Землей магнитное поле. Поток идущих от Солнца частиц отклоняется и обтекает Землю в области, называемой магнитосферой. Магнитосфера расположена на большом расстоянии от земной поверхности, намного большем, чем радиус Земли. Поэтому магнитное поле здесь значительно слабее, чем на поверхности Земли. Тем не менее магнитосфера все же играет роль своеобразного «щита», прикрывающего Землю от проникновения частиц из космоса. Расчет показывает, что поток частиц, распространяющихся в плоскости магнитного экватора, затормозится далеко от поверхности Земли, на расстоянии примерно в 8—9 земных радиусов.

С другой стороны, поток солнечного ветра, движущийся вдоль магнитной оси Земли в направлении вблизи магнитного полюса, встречает на своем пути лишь очень слабую, стремящуюся к 0, горизонтальную составляющую магнитного поля Земли. Поэтому такие потоки частиц подходят гораздо ближе к поверхности Земли и вызывают сильные возмущения в ионосфере Земли.

Геомагнитное динамо

В последнее время благодаря успехам космонавтики появилась возможность непосредственно измерить магнитное поле на поверхности ближай-

ших к нам планет Солнечной системы. Оказалось, что на Луне или совсем нет собственного магнитного поля, или его индукция, во всяком случае, меньше одной десяти тысячной индукции магнитного поля Земли*). После этого вопрос о причинах существования магнитного поля Земли и о его изменениях приобрел особую остроту. Магнитное поле Земли можно приближенно описать, если предположить, что оно индуцируется некоторым электрическим током, текущим глубоко в недрах Земли. Действительно, картина силовых линий электрического поля кольца с током подобна картине магнитных силовых линий поля намагниченного стержня, которым мы заменяли магнитное поле Земли. Физические причины, приводящие к существованию такого тока, пока еще не установлены окончательно. Существует несколько теорий, пытающихся объяснить происхождение этого тока. В последнее время среди геофизиков пользуется популярностью так называемая «теория геомагнитного динамо» или, короче, «динамо-теория». Расскажем вкратце, в чем состоят физические основы этой теории.

Результаты геологических исследований позволяют считать, что в центре Земли находится жидкое электропроводящее ядро. Радиус ядра составляет около 3900 км. Согласно «динамо-теории», токи в ядре образуются за счет электромагнитной индукции при вращательном движении проводящего ядра в магнитном поле. Магнитное поле создается этими же токами. Таким образом, магнитное поле само себя поддерживает, подобно тому, как это происходит в динамо-машине (отсюда и пошло название теории). Однако еще до начала работы такой машины должно существовать некоторое «затравочное» поле.

*) Подробнее о магнитном поле Луны см. статью: Г и н ц б у р г М. А. Измерение магнитных полей на Луне. «Квант», 1973, № 11.

«Затравочное» поле, необходимое для «запуска динамо» могло быть создано различными физическими механизмами. Одно из наиболее простых объяснений связано с тем, что небольшое намагничивание присуще любому вращающемуся телу. Предположение о существовании такого намагничивания высказывал еще П. Н. Лебедев. В его опытах делалась попытка обнаружить намагничивание, создаваемое вращающимся диском. Хотя техника эксперимента того времени и не позволила надежно зафиксировать возникновение намагничивания, впоследствии опыты были повторены другими учеными на более совершенных установках. В частности, было экспериментально измерено намагничивание стержня, возникающее при вращении этого стержня вокруг продольной оси. Оценки показывают, что индукция поля, возникающая при вращении Земли, составляет ничтожно малую величину, порядка 10^{-11} индукции поля Земли. Однако столь малое поле, возникнув, могло усиливаться за счет действия «геомагнитного динамо», как описано выше. Источником энергии, необходимой для создания поля, могло служить вращение Земли.

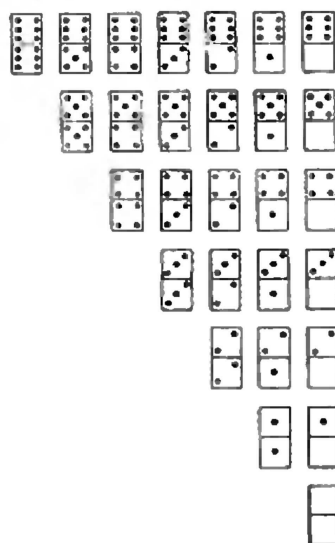
Эту теорию нельзя считать окончательной, и вопрос происхождения магнитного поля Земли во многом остается открытым. Поскольку эта проблема связана с особенностями состояния вещества вблизи центра Земли, объяснение магнетизма Земли было бы важным результатом и для геологии, и для астрономии. Решение этой проблемы, вероятно, помогло бы связать факт отсутствия дипольного магнитного поля на Луне с внутренним строением этой планеты.

Задача-пасьянс

Тщательно перемешаем кости домино и разложим их лицевой стороной вниз в виде треугольника



Мы хотим разместить их в таком виде:



Для этого откроем нижнюю кость и поместим ее на предназначенное ей место. Кость, которая занимала это место, открываем и помещаем на соответствующее ей место, и так далее.

Пасьянс считается удавшимся, если такими действиями нам удастся перевернуть все кости (то есть если место нижней кости будет занято лишь на последнем ходу).

Какова вероятность такого исхода? (Или в какой части случаев пасьянс удастся?)

Е и Э Парилис