

Бурбаки Н.

**Топологические векторные
пространства**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Б91 **Бурбаки Н.**
Топологические векторные пространства / Бурбаки Н. – М.: Книга по Требо-
ванию, 2013. – 419 с.

ISBN 978-5-458-27288-9

Данная книга объединяет выпуски XV, XVIII и XIX известной монографии Н. Бурбаки "Элементы математики", составляющие единственное в мировой литературе руководство по общей теории топологических векторных пространств.

ISBN 978-5-458-27288-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие переводчика	11
Способ пользования этим трактатом	17
Глава I. Топологические векторные пространства над нормированным телом	21
§ 1. Топологические векторные пространства	21
1. Определение топологического векторного пространства	21
2. Нормированные пространства над нормированным телом	23
3. Окрестности начала в топологическом векторном пространстве над нормированным телом	25
4. Признаки непрерывности и равностепенной непрерывности	28
5. Равномерная структура и пополнение топологического векторного пространства	30
6. Векторные подпространства и факторпространства топологического векторного пространства	32
7. Произведение топологических векторных пространств	34
8. Топологическая прямая сумма подпространств	35
9. Один метод топологизации векторных пространств	39
Упражнения	41
§ 2. Линейные многообразия в топологическом векторном пространстве	44
1. Замыкание линейного многообразия	44
2. Прямые и замкнутые гиперплоскости	47
3. Конечномерные векторные подпространства	48
4. Локально компактные топологические векторные пространства	50
Упражнения	52
§ 3. Метризуемые топологические векторные пространства	54
1. Окрестности нуля в метризуемом топологическом векторном пространстве	54
2. Свойства метризуемых векторных пространств	56
3. Непрерывные линейные функции на метризуемом векторном пространстве	56
Упражнения	60
Глава II. Выпуклые множества и локально выпуклые пространства	63
§ 1. Выпуклые множества	64
1. Определение выпуклого множества	64
2. Пересечения выпуклых множеств. Произведения выпуклых множеств	66

3. Выпуклая оболочка множества	67
4. Выпуклые конусы	68
5. Упорядоченные векторные пространства	71
6. Выпуклые множества в топологических векторных пространствах	73
Упражнения	75
§ 2. Локально выпуклые пространства	80
1. Определение локально выпуклого пространства	80
2. Два метода введения локально выпуклой топологии	82
3. Топологическая прямая сумма семейства локально выпуклых	
пространств	84
4. Индуктивные пределы локально выпуклых топологий	84
5. Строгий индуктивный предел последовательности подпро-	
странств	87
Упражнения	89
§ 3. Отделение выпуклых множеств	92
1. Теорема Хана — Банаха (геометрическая форма)	92
2. Отделение выпуклых множеств в топологических векторных	
пространствах	94
3. Отделение выпуклых множеств в локально выпуклом простран-	
стве	96
4. Положительные линейные формы на упорядоченном векторном	
пространстве	99
Упражнения	100
§ 4. Компактные множества в топологических векторных пространствах	104
1. Выпуклые оболочки компактных множеств	104
2. Экстремальные точки компактных выпуклых множеств	105
Упражнения	110
§ 5. Полуноормы	114
1. Определение выпуклой функции	114
2. Непрерывность выпуклых функций	116
3. Полуноормы	118
4. Полуноормы в локально выпуклых пространствах	120
5. Полуноормы в факторпространствах и произведениях пространств	
.	123
6. Полилинейные непрерывные отображения произведения локально	
выпуклых пространств в локально выпуклое пространство	124
7. Теорема Хана — Банаха (аналитическая форма)	126
Упражнения	127
§ 6. Комплексные локально выпуклые пространства	131
1. Топологические векторные пространства над \mathbb{C}	131
2. Комплексные локально выпуклые пространства	133
3. Теорема Хана — Банаха	135
Упражнения	137
Приложение к главе II. Неподвижные точки компактных выпуклых мно-	
жеств	139
Упражнения	141

Глава III. Пространства непрерывных линейных отображений	143
§ 1. Бочечные пространства	143
1. Определение бочечного пространства	143
2. Свойства бочечных пространств	144
Упражнения	145
§ 2. Ограниченные множества в топологических векторных пространствах	146
1. Определение ограниченных множеств	146
2. Свойства ограниченных множеств	147
3. Образ при непрерывном отображении	149
4. Ограниченные множества в строгом индуктивном пределе	151
5. Квазиполные пространства	152
Упражнения	153
§ 3. Пространства непрерывных линейных отображений	160
1. Пространства $L_{\otimes}(E, F)$	160
2. Условие отделимости пространства $L_{\otimes}(E, F)$	163
3. Связи между $L(E, F)$ и $L(\hat{E}, F)$	163
4. Ограниченные множества в $L_{\otimes}(E, F)$	164
5. Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$	166
6. Теорема Банаха — Штейнгауза	171
7. Полные множества в $L_{\otimes}(E, F)$	175
Упражнения	177
§ 4. Гипонепрерывные билинейные отображения	183
1. Раздельно непрерывные билинейные отображения	183
2. Гипонепрерывные билинейные отображения	184
3. Продолжение гипонепрерывного билинейного отображения	186
4. Гипонепрерывность отображения $(u, v) \rightarrow v \circ u$	188
5. Равностепенно гипонепрерывные множества билинейных отображений	189
Упражнения	191
Глава IV. Двойственность в топологических векторных пространствах	195
§ 1. Слабые топологии	195
1. Векторные пространства в двойственности	195
2. Слабые топологии	197
3. Поляры	198
4. Ортогональные подпространства	201
5. Подпространства и факторпространства пространства, наделенного слабой топологией	201
6. Произведения слабых топологий	203
Упражнения	204
§ 2. Сопряженное к отделимому локально выпуклому пространству	211
1. Слабая и ослабленная топологии	211
2. Свойства слабого сопряженного	212
3. Топологии, согласующиеся с заданной двойственностью	215

4. Множества, ограниченные в ослабленной топологии	219
5. Характеризация слабо непрерывных линейных форм на сопряженном пространстве	220
6. Характеризация слабо замкнутых выпуклых множеств в сопряженном к пространству Фреше	222
7. Сопряженное к подпространству; сопряженное к факторпространству	224
8. Сопряженное к произведению	225
9. Сопряженное к пространству непрерывных линейных отображений	226
Упражнения	228
§ 3. Сильная топология в сопряженном к отделимому локально выпуклому пространству	235
1. Определение сильной топологии	235
2. Свойства сильного сопряженного	236
3. Второе сопряженное. Рефлексивные пространства	237
4. Монтелевские пространства	240
Упражнения	242
§ 4. Сильная и слабая непрерывность	251
1. Сопряженное к слабо непрерывному линейному отображению	251
2. Слабая и сильная непрерывность	254
Упражнения	257
§ 5. Двойственность банаховских пространств	262
1. Слабая и сильная топологии в сопряженном к нормированному пространству	262
2. Второе сопряженное к нормированному пространству. Рефлексивные банаховские пространства	265
3. Непрерывные линейные отображения нормированного пространства в локально выпуклое пространство	267
4. Сопряженное к подпространству и факторпространству нормированного пространства	268
Упражнения	270
Глава V. Гильбертовы пространства (элементарная теория)	279
§ 1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства	279
1. Эрмитовы формы	279
2. Положительные эрмитовы формы	281
3. Предгильбертовы и гильбертовы пространства	283
4. Выпуклые множества в предгильбертовом пространстве	285
5. Векторные подпространства и проекторы	289
6. Сопряженное к гильбертову пространству	291
Упражнения	293
§ 2. Ортогональные семейства в гильбертовом пространстве	301
1. Внешняя гильбертова сумма гильбертовых пространств	301
2. Гильбертова сумма ортогональных подпространств гильбертова пространства	303

3. Ортонормальные семейства	307
4. Ортонормализация	309
Упражнения	311
Исторический очерк (к главам I—V)	318
Библиография	332
Сводка результатов	334
Введение	334
§ 1. Топологические векторные пространства; окрестности, полунормы, ограниченные множества	334
Топологические векторные пространства	334
Локально выпуклые пространства	336
Ограниченные множества	337
§ 2. Линейные и полилинейные отображения	339
Непрерывные линейные отображения	339
Гомоморфизмы	340
Билинейные отображения	341
§ 3. Подпространства; факторпространства; произведения; прямые суммы	343
Подпространства	343
Факторпространства	344
Произведения топологических векторных пространств	344
Конечные прямые суммы	345
Различные способы введения топологии	347
Гильбертова сумма гильбертовых пространств	348
§ 4. Выпуклость	349
Выпуклые множества	349
Отделение выпуклых множеств	350
Компактные выпуклые множества	351
Проекция на выпуклое множество в предгильбертовом пространстве	352
Выпуклые функции	352
Конусы	353
§ 5. Пространства непрерывных линейных отображений	354
\mathcal{C} -топологии в $L(E, F)$	354
Ограниченные множества в $L_{\mathcal{C}}(E, F)$	355
Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$	356
§ 6. Двойственность	357
Векторные пространства в двойственности	357
Поляры	358
Подпространства, факторпространства, произведения	358
Топологии, согласующиеся с двойственностью	359
Сильное сопряженное	360
Сопряженное отображение	361
§ 7. Основные типы локально выпуклых пространств	361
Бочечные пространства	361
Монтелевские пространства	363

Пространства Фреше	363
Банаховские пространства	364
Гильбертово пространство	365
Приложение к Сводке результатов. Некоторые топологические вектор- ные пространства функционального анализа	368
Словарь	369
<i>Приложение I.</i> Перевод некоторых мест из других книг „Элементов математики“ Н. Бурбаки, на которые имеются ссылки в этой книге .	380
<i>Приложение II.</i> Объяснение обозначений, заимствованных из других книг „Элементов математики“ Н. Бурбаки	392
<i>Приложение III.</i> Объяснение терминов, заимствованных из других книг „Элементов математики“ Н. Бурбаки	394
Указатель обозначений	402
Указатель терминов	403
Определение и аксиомы главы I	вклейка 1
Определения главы II	вклейка 2
Определения главы III	вклейка 3
Определения главы IV	вклейка 4
Диаграмма различных типов топологических векторных пространств	вклейка 5

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Государственное издательство физико-математической литературы и Издательство иностранной литературы приступили к переводу на русский язык известного трактата Н. Бурбаки „Элементы математики“. Все появившиеся до сих пор выпуски этого трактата относятся к первой его части, озаглавленной „Фундаментальные структуры анализа“ и распадающейся на следующие шесть книг:

Книга I „Теория множеств“,

Книга II „Алгебра“,

Книга III „Общая топология“,

Книга IV „Функции одной вещественной переменной“,

Книга V „Топологические векторные пространства“,

Книга VI „Интегрирование“.

В совокупности эти книги должны дать теоретико-множественную аксиоматическую основу для построения всей современной математики*). Из них закончены пока книги III, IV и V. Книга III издается в русском переводе (тремя отдельными выпусками) Физматгизом. Настоящее же издание содержит всю книгу V (вышедшую во французском издании тремя отдельными выпусками, из которых первый, появившийся в 1953 г., содержал главы I—II, второй, появившийся в 1955 г., — главы III—V и словарь, а третьим был „выпуск результатов“, также вышедший в 1955 г.). При переводе учтены исправления к этой книге, приложенные к дальнейшим выпускам трактата Бурбаки, и выправлены также другие замеченные опечатки.

Среди книг „Элементов математики“ Н. Бурбаки книга V „Топологические векторные пространства“, несомненно, выделяется насыщенностью новыми результатами (полученными в большинстве уже после войны) и, если можно так выразиться, особой злободневностью. Объясняется это чрезвычайной быстротой развития

*) См. „Способ пользования этим трактатом“, стр. 17.

теории топологических линейных пространств в последние годы и важной ролью, которую в этом развитии сыграла школа Бурбаки.

Общее понятие топологического линейного пространства и несколько более специальное (но единственно важное пока для анализа) понятие локально выпуклого пространства были введены А. Н. Колмогоровым, А. Н. Тихоновым и И. фон Нейманом в 1934—1935 гг. Но вплоть до конца тридцатых годов главным предметом теории топологических линейных пространств все еще продолжали оставаться нормированные пространства; однако интерес все больше концентрировался на изучении их слабой топологии. Последнее объяснялось тем, что лишь в терминах слабой топологии (а не одной только слабой сходимости последовательностей) оказалось возможным правильно ставить и решать задачи теории двойственности для произвольных (не обязательно сепарабельных) нормированных пространств. Отсюда оставался лишь один шаг до исследования слабой топологии любых локально выпуклых пространств. Этот шаг сделали В. Л. Шмульян (1940) и Ж. Дьедонне (1942). Последний *) построил полную теорию *слабой* двойственности линейных пространств, почти имитировавшую теорию двойственности для конечномерного, т. е. чисто алгебраического, случая. Существенно дальше продвинулся В. Л. Шмульян. Его работа „О линейных топологических пространствах“ **) содержала уже, хотя и в недостаточно развернутом еще виде, основной результат *общей* теории двойственности локально выпуклых пространств. Война прервала исследования В. Л. Шмульяна, а в 1944 г. он погиб на фронте. Окончательную форму упомянутому результату В. Л. Шмульяна придал Макки ***) в своих работах 1945—1946 гг. ****). Эти работы, содержавшие также другие важные результаты и понятия, знаменовали уже полное преодоление общей теорией рамок нормированных пространств.

Но новые рамки — общих локально выпуклых пространств — были еще слишком широки, и вряд ли теория топологических

*) J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. École Norm. (3), т. 59 (1942), стр. 107—139.

**) V. Šmul'jan, Über lineare topologische Räume, Mat. сборн., нов. сер., т. 7 (1940), стр. 425—448.

***) См. гл. IV, § 2, п° 3.

****) См. библиографию к Историческому очерку, XIV а) и б).

линейных пространств так быстро развивалась бы дальше, не получи она мощного импульса извне, давшего также надежный компас для выбора перспективных направлений исследования и разумной специализации понятий. Этот импульс был дан теорией „распределений“ (обобщенных функций) Л. Шварца*). Возникновение этой теории (окончательно оформленной и систематически разработанной Л. Шварцем) отвечало назревшей потребности математического анализа в возможно более широких функциональных пространствах, где свободно действовали бы дифференциальные операторы, т. е. в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций и сопряженных к ним пространствах обобщенных функций. Однако эти пространства ненормируемы и большей частью даже неметризуемы (как, например, пространства „финитных“ функций и „распределений“ Л. Шварца). Это сделало совершенно очевидной недостаточность и стеснительность старых банаховских рамок и важность более общих концепций также — и прежде всего — для новых приложений функционального анализа и дало мощный толчок развитию общей теории топологических линейных пространств, совершенно изменившему лицо этой теории.

На этом этапе, во всяком случае вплоть до 1955 года, когда было завершено французское издание настоящей книги, ведущая роль в разработке теории топологических линейных пространств, безусловно, принадлежит математикам школы Бурбаки. Достаточно указать основоположные работы Ж. Дьёдонне и Л. Шварца „Двойственность в пространствах (\mathcal{F}) и $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ “**, Н. Бурбаки „О некоторых топологических векторных пространствах“***) и А. Гротендика „О пространствах (\mathcal{F}) и $(\mathcal{D}\mathcal{F})$ “****); особо следует отметить также фундаментальную монографию А. Гротендика „Топологические

*) См. библиографию к Историческому очерку, XVI.

**) J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces (\mathcal{F}) et $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. I (1950), стр. 61—101. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 77—107.

***) N. Bourbaki, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. 2 (1951), стр. 5—16. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 109—117.

****) A. Grothendieck, Sur les espaces (\mathcal{F}) et $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, Summa Bra-sens Mathematicae, т. 3, вып. 6 (1954), стр. 57—123. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 3 (1958), стр. 81—127.

тензорные произведения и ядерные пространства^{*}), влияние которой только начинает еще сказываться.

Все это и наложило на рассматриваемую книгу трактата Бурбаки печать особой оригинальности и злободневности. Вместе с тем эта книга до сих пор играет роль единственного руководства, по которому можно изучить основы современной теории топологических линейных пространств. Но нужно при этом иметь в виду, что эта книга — вовсе не учебник в обычном смысле и даже не специальная монография: она является органической частью трактата Бурбаки, всецело подчиненной общему его замыслу и плану. По-видимому, именно этим объясняется, например, то, что в ней совершенно не отражены исследования А. Гротендика по тензорным произведениям локально выпуклых пространств и ядерным пространствам. Однако каждый изучивший эту книгу сможет уже свободно читать литературу по любым специальным вопросам теории топологических линейных пространств.

Являясь пятой книгой трактата Н. Бурбаки, книга „Топологические векторные пространства“ содержит многочисленные ссылки на предшествующие книги трактата; кроме того, в ней широко используются, без специальных пояснений, введенные там обозначения и термины. Ввиду этого пришлось снабдить перевод книги тремя приложениями. Первое из них содержит, в виде примечаний, перевод тех, существенных для понимания текста книги, мест из других книг трактата, на которые имеются ссылки. Во втором приложении дано разъяснение стандартных обозначений, заимствованных из других книг трактата. Наконец, третье приложение представляет собой толковый словарь, где в алфавитном порядке расположены в основном те (взяты из других книг трактата) термины, которые либо присущи только языку этого трактата, либо приобрели в этом языке не совсем общепринятый смысл. Ввиду перенасыщенности трактата Бурбаки своей особой терминологией, читателю, еще не знакомому с ней, пожалуй, следовало бы хотя бы бегло просмотреть это приложение, прежде чем приступать к чтению самой книги. Не менее полезно было бы предварительно ознакомиться со свод-

^{*}) A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American Mathematical Society, n° 16 (1955).