Бурбаки Н.

Топологические векторные пространства

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.

Б91 Топологические векторные пространства / Бурбаки Н. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 419 с.

ISBN 978-5-458-27288-9

Данная книга объединяет выпуски XV, XVIII и XIX известной монографии Н. Бурбаки "Элементы математики", составляющие единственное в мировой литературе руководство по общей теории топологических векторных пространств.

ISBN 978-5-458-27288-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Государственное издательство физико-математической литературы и Издательство иностранной литературы приступили к переводу на русский язык известного трактата Н. Бурбаки „Элементы математики". Все появившиеся до сих пор выпуски этого трактата относятся к первой его части, озаглавленной „Фундаментальные структуры анализа" и распадающейся на следующие шесть книг:

Книга I „Теория множеств",
Книга II „Алгебра",
Книга III „Общая топология",
Книга IV „Функции одной вещественной переменной",
Книга V „Топологические векторные пространства",
Книга VI „Интегрирование".

В совокупности эти книги должны дать теоретико-множественную аксиоматическую основу для построения всей современной математики *). Из них закончены пока книги III, IV и V. Книга III издается в русском переводе (тремя отдельными выпусками) Физматгизом. Настоящее же издание содержит всю книгу V (вышедшую во французском издании тремя отдельными выпусками, из которых первый, появившийся в 1953 г., содержал главы I—II, второй, появившийся в 1955 г., — главы III—V и словарь, а третьим был „выпуск результатов", также вышедший в 1955 г.). При переводе учтены исправления к этой книге, приложенные к дальнейшим выпускам трактата Бурбаки, и выправлены также другие замеченные опечатки.

Среди книг „Элементов математики" Н. Бурбаки книга V „Топологические векторные пространства", несомненно, выделяется насыщенностью новыми результатами (полученными в большинстве уже после войны) и, если можно так выразиться, особой злободневностью. Обьясняется это чрезвычайной быстротой развития

*) См. „Способ пользования этим трактатом", стр. 17.

теории топологических линейных пространств в последние годы и важной ролью, которую в этом развитии сыграла школа Бурбаки.

Общее понятие топологического линейного пространства и несколько более специальное (но единственно важное пока для анализа) понятие локально выпуклого пространства были введены А. Н. Колмогоровым, А. Н. Тихоновым и И. фон Нейманом в 1934—1935 гг. Но вплоть до конца тридцатых годов главным предметом теории топологических линейных пространств все еще продолжали оставаться нормированные пространства; однако интерес все больше концентрировался на изучении их слабой топологии. Последнее объяснялось тем, что лишь в терминах слабой топологии (а не одной только слабой сходимости последовательностей) оказалось возможным правильно ставить и решать задачи теории двойственности для произвольных (не обязательно сепарабельных) нормированных пространств. Отсюда оставался лишь один шаг до исследования слабой топологии любых локально выпуклых пространств. Этот шаг сделали В. Л. Шмульян (1940) и Ж. Дьедонне (1942). Последний*) построил полную теорию *слабой* двойственности линейных пространств, почти имитировавшую теорию двойственности для конечномерного, т. е. чисто алгебраического, случая. Существенно дальше продвинулся В. Л. Шмульян. Его работа „О линейных топологических пространствах" **) содержала уже, хотя и в недостаточно развернутом еще виде, основной результат *общей* теории двойственности локально выпуклых пространств. Война прервала исследования В. Л. Шмульяна, а в 1944 г. он погиб на фронте. Окончательную форму упомянутому результату В. Л. Шмульяна придал Макки***) в своих работах 1945—1946 гг. ****). Эти работы, содержавшие также другие важные результаты и понятия, знаменовали уже полное преодоление общей теорией рамок нормированных пространств.

Но новые рамки — общих локально выпуклых пространств — были еще слишком широки, и вряд ли теория топологических

*) J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. École Norm. (3), т. 59 (1942), стр. 107—139.

**) V. Šmulian, Über lineare topologische Räume, Мат. сборн., нов. сер., т. 7 (1940), стр. 425—448.

***) См. гл. IV, § 2, n°3.

****) См. библиографию к Историческому очерку, XIV а) и б).

линейных пространств так быстро развивалась бы дальше, не получи она мощного импульса извне, давшего также надежный компас для выбора перспективных направлений исследования и разумной специализации понятий. Этот импульс был дан теорией „распределений“ (обобщенных функций) Л. Шварца *). Возникновение этой теории (окончательно оформленной и систематически разработанной Л. Шварцем) отвечало назревшей потребности математического анализа в возможно более широких функциональных пространствах, где свободно действовали бы дифференциальные операторы, т. е. в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций и сопряженных к ним пространствах обобщенных функций. Однако эти пространства ненормируемы и большей частью даже неметризуемы (как, например, пространства „финитных“ функций и „распределений“ Л. Шварца). Это сделало совершенно очевидной недостаточность и стеснительность старых банаховских рамок и важность более общих концепций также — и прежде всего — для новых *приложений* функционального анализа и дало мощный толчок развитию общей теории топологических линейных пространств, совершенно изменившему лицо этой теории.

На этом этапе, во всяком случае вплоть до 1955 года, когда было завершено французское издание настоящей книги, ведущая роль в разработке теории топологических линейных пространств, безусловно, принадлежит математикам школы Бурбаки. Достаточно указать основоположные работы Ж. Дьёдонне и Л. Шварца „Двойственность в пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{LF})$“ **), Н. Бурбаки „О некоторых топологических векторных пространствах“ ***) и А. Гротендика „О пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{DF})$“ ****); особо следует отметить также фундаментальную монографию А. Гротендика „Топологические

---

*) См. библиографию к Историческому очерку, XVI.

**) J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. I (1950), стр. 61—101. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 77—107.

***) N. Bourbaki, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. 2 (1951), стр. 5—16. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 109—117.

****) A. Grothendieck, Sur les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$, Summa Brasiliensis Mathematicae, т. 3, вып. 6 (1954), стр. 57—123. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 3 (1958), стр. 81—127.

тензорные произведения и ядерные пространства" *), влияние которой только начинает еще сказываться.

Все это и наложило на рассматриваемую книгу трактата Бурбаки печать особой оригинальности и злободневности. Вместе с тем эта книга до сих пор играет роль единственного руководства, по которому можно изучить основы современной теории топологических линейных пространств. Но нужно при этом иметь в виду, что эта книга — вовсе не учебник в обычном смысле и даже не специальная монография: она является органической частью трактата Бурбаки, всецело подчиненной общему его замыслу и плану. По-видимому, именно этим объясняется, например, то, что в ней совершенно не отражены исследования А. Гротендика по тензорным произведениям локально выпуклых пространств и ядерным пространствам. Однако каждый изучивший эту книгу сможет уже свободно читать литературу по любым специальным вопросам теории топологических линейных пространств.

Являясь пятой книгой трактата Н. Бурбаки, книга „Топологические векторные пространства" содержит многочисленные ссылки на предшествующие книги трактата; кроме того, в ней широко используются, без специальных пояснений, введенные там обозначения и термины. Ввиду этого пришлось снабдить перевод книги тремя приложениями. Первое из них содержит, в виде примечаний, перевод тех, существенных для понимания текста книги, мест из других книг трактата, на которые имеются ссылки. Во втором приложении дано разъяснение стандартных обозначений, заимствованных из других книг трактата. Наконец, третье приложение представляет собой толковый словарь, где в алфавитном порядке расположены в основном те (взятые из других книг трактата) термины, которые либо присущи только языку этого трактата, либо приобрели в этом языке не совсем общепринятый смысл. Ввиду перенасыщенности трактата Бурбаки своей особой терминологией, читателю, еще не знакомому с ней, пожалуй, следовало бы хотя бы бегло просмотреть это приложение, прежде чем приступать к чтению самой книги. Не менее полезно было бы предварительно ознакомиться со свод-

---

*) A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American Mathematical Society, n° 16 (1955).