

П.П. Кастерин

**О распространении волн в
неоднородной среде. Часть 1**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
П11

П11 **П.П. Кастерин**
О распространении волн в неоднородной среде. Часть 1 / П.П. Кастерин – М.:
Книга по Требованию, 2021. – 166 с.

ISBN 978-5-458-57795-3

ISBN 978-5-458-57795-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

СОДЕРЖАНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Введение.	IX—XVI

Глава I. Неоднородная среда слоистой структуры.

§ 1 Аналитическая формулировка задачи и общее решение. § 2 Случай безграничной неоднородной слоистой среды. § 3 П л а с т и н к а слоистой структуры Показатель преломления и плотность (фиктивная) неоднородной среды § 4 Дисперсионная кривая Аномальная дисперсия и „абсорбция“. Полосы „абсорбции“ § 5 Полное отражение для бесконечно-толстой пластинки Стоячие колебания внутри пластинки. § 6 Случай, когда волна падает на пластинку под углом Приближенные законы распространения волны в пластинке в этом случае. Смещение областей полного отражения ...

1—25

Глава II. Неоднородная среда, составленная из неподвижных шаровъ.

§ 7 Общие условия исследования. § 8 Выражение для потенциалов скоростей при помощи шаровых функций. § 9 Преобразование выражения для потенциала скоростей в символическую форму Общие свойства употребленных символических операций § 10. Общее разложение потенциала скоростей в ряд по шаровым функциям. § 11 Потенциал волн, падающих на неоднородную пластинку из твердых шаров, в форме тригонометрических рядов Преобразование его в ряд по шаровым функциям Потенциал волн, разбланных шарами, выраженный при помощи шаровых функций § 12 Преобразование потенциала волн, разбланных шарами, в тригонометрическую форму § 13 Общее решение задачи приводится к системе совокупных разностных уравнений с постоянными коэффициентами § 14. Вывод общих основных соотношений между коэффициентами в решении задачи § 15 Интерпретация общего решения задачи. Условие для существования только одной прогресс-

сивной волны. § 16. Изслѣдованіе предѣльнаго случая, когда радіусъ шаровъ безконечно-малъ. Приближенное рѣшеніе задачи въ этомъ случаѣ. § 17. Вычисленіе суммъ $S_{n, \nu}^{(2j, 2j')}$ при помощи рядовъ. § 18. Болѣе точное изслѣдованіе случая, когда длина волны (въ воздухѣ) больше наибольшаго изъ періодовъ структуры неоднородной среды, а радіусъ шаровъ малъ по сравненію съ длиною волны. Отраженіе и прохожденіе волнъ черезъ неоднородную пластинку. Аналогія съ однородной пластинкой. § 19. Дисперсіонная кривая. Зависимость показателя преломленія неоднородной среды отъ степени заполнения пространства шарами. Аномальная дисперсія и „абсорбція“. Видъ дисперсіонной кривой въ полосѣ „абсорбціи“ и зависимость ея отъ разстоянія между шарами. Уравненіе „абсорбціонной“ кривой. „Абсорбціонный“ спектръ опредѣляется неравенствомъ. Полное отраженіе въ случаѣ безконечно толстой пластинки въ области „абсорбціи“. § 20. Стоячія колебанія. Условія образованія дифракціонныхъ волнъ. § 21. Обобщеніе полученнаго рѣшенія на случай безграничной неоднородной среды. Изслѣдованіе стоячихъ волнъ. Положеніе узловъ и пучностей въ неоднородной средѣ по сравненію съ однородной. Длина волны для неоднородной среды. Соответственныя узлы и пучности. § 22. Неоднородная среда, составленная изъ сжимаемыхъ шаровъ. Рѣшеніе въ этомъ случаѣ приводится, съ небольшимъ измѣненіемъ, къ случаю твердыхъ шаровъ. Уравненіе дисперсіонной кривой для длинъ волнъ, большихъ по сравненію съ періодомъ структуры, въ этомъ случаѣ, и для безконечной длины волны. § 23. Теоріи Poisson'a, Mossotti, Clausius'a, Maxwell'я и лорда Rayleigh'я относительно намагничиванія, діэлектрической поляризаціи и электропроводности неоднороднаго проводника являются простѣйшимъ частнымъ случаемъ разсмотрѣнной задачи

26—107

Глава III. Экспериментальное изслѣдованіе распространенія волнъ въ неоднородной средѣ.

§ 24. Опредѣленіе показателя преломленія и дисперсіи въ неоднородной средѣ по методу Кундта. Общее описаніе устройства моделей и способа наблюденій, точность измѣреній. § 25. Результаты измѣреній для трехъ моделей, построенныхъ изъ стеклянныхъ шаровъ. § 26. Особенности въ образованіи „пыльныхъ фигуръ“ въ случаѣ неоднородной среды. Симметрія и диссиметрія этихъ фигуръ. Согласіе полученныхъ результатовъ съ теоріей. § 27. Модели, составленные изъ полыхъ цилиндрическихъ резонаторовъ. Результаты измѣреній. Аномальная дисперсія. Связь между положеніемъ области „абсорбціи“ и собственнымъ тономъ резонаторовъ

108—120

Глава IV. Неоднородная среда, составленная из неподвижных резонаторовъ.

§ 28. Общая постановка задачи для резонаторовъ какого угодно устройства. § 29. Характеристика резонатора. § 30. Связь между параметрами, характеризующими резонаторъ, вытекающая изъ стационарности звукового поля. § 31. Общий планъ рѣшенія задачи. Связь этого рѣшенія съ изслѣдованіями второй главы. § 32. Пульсирующий резонаторъ. Особенности дисперсіонной и „абсорбціонной“ кривыхъ для неоднородной среды, составленной изъ пульсирующихъ резонаторовъ (резонаторовъ Helmholtz'a). § 33. Полые цилиндрическіе резонаторы. Сравненіе выводовъ теоріи и результатовъ опыта въ этомъ случаѣ. § 34. Осцилирующій резонаторъ и его модель. Твердый неподвижный шаръ, какъ резонаторъ. Дисперсіонная и „абсорбціонная“ кривыя для неоднородной среды, составленной изъ осцилирующихъ резонаторовъ. Расшпреніе и измѣненіе положенія полосы „абсорбціи“ въ зависимости отъ числа резонаторовъ въ единицѣ объема.— Общее вліяніе эффектовъ „тренія“ на видъ дисперсіонныхъ и абсорбціонныхъ кривыхъ для неоднородныхъ средъ.

121—144

Глава V. Свободныя стационарныя колебанія въ неоднородной средѣ.

§ 35. Условія образованія свободныхъ стоячихъ колебаній въ неоднородной средѣ. § 36. Опредѣленіе періодовъ свободныхъ колебаній и связь ихъ съ періодами „абсорбціи“ и полного отраженія.

145—149

Приложеніе: рисунокъ дисперсіонныхъ и „абсорбціонныхъ“ кривыхъ.

ВВЕДЕНИЕ.

Въ теоріи волнъ, разработанной трудами многихъ выдающихся физиковъ и математиковъ во всевозможныхъ направленіяхъ, сравнительно мало затронутъ точнымъ изслѣдованіемъ вопросъ о распространеніи волнъ въ средѣ, однородность которой нарушена какимъ-либо образомъ.

Подобная задача точно разрѣшена Poisson'омъ ¹⁾ только для случая, когда среда преграждена безконечной плоскостью (отражающей и преломляющей), и въ недавнее время Sommerfeld'омъ ²⁾ для случая полу-плоскости (абсолютно непрозрачной и вполне отражающей). Для конечныхъ тѣлъ задача подробно изслѣдована для шара въ трудахъ Stokes'a ³⁾, Clebsch'a ⁴⁾, Brillouin'a ⁵⁾, J. J. Thomson'a ⁶⁾ и лорда Rayleigh'я ⁷⁾, послѣдними разобрана также аналогичная задача для цилиндра (безконечно-длиннаго). Для эллипсоида вращенія задача разрѣшена Abraham'омъ ⁸⁾. Этимъ исчерпывается, на сколько мнѣ извѣстно, область *точно* изслѣдованныхъ задачъ подобнаго рода.

Всѣ проблемы диффракціи разрѣшены только въ приближеніи, при чемъ степень точности этихъ рѣшеній не всегда можетъ быть установлена.

¹⁾ Mém. de l'Institut. T. II. p. 305. 1819. и T. X. p. 317. 1831.

²⁾ Math. Annalen, Bd. 47. p. 317. 1895.

³⁾ Phil. Transact. 2. p. 447—463. 1868.

⁴⁾ Crelle's Journ. LXI. p. 195—262. 1862.

⁵⁾ Ann. de chim. et de phys. T. 2. p. 417. 1894.

⁶⁾ Recent Researches. p. 361. 1893. Oxford.

⁷⁾ Theory of Sound, Chap. XVII. 1896. London.

⁸⁾ Die electr. Schwingungen um einen stabförmigen Leiter. 1897. Berlin.

Въ теоріяхъ преломленія и дисперсіи свѣта, въ которыхъ оптическія среды представляются состоящими изъ однородной среды (эфира) и изъ молекулъ (резонаторовъ), расположенныхъ въ ней, точность вычисленій имѣетъ еще болѣе провизорный характеръ и предѣлы ихъ примѣнимости далеко не очевидны.

Между тѣмъ, именно въ теоріи дисперсіи свѣта все болѣе и болѣе выясняется, какъ намъ кажется, настоящая необходимость болѣе точной аналитической ея разработки: ни одна изъ теорій дисперсіи, напр., не въ состояніи хотя бы только объяснить измѣненіе дисперсіи съ измѣненіемъ плотности тѣла или концентраціи (въ растворахъ), въ особенности въ области аномальной дисперсіи. Проистекаетъ это изъ того обстоятельства, что при самыхъ вычисленіяхъ въ теоріи дисперсіи разстояніе между молекулами игнорируется и, для упрощенія вычисленій, эфиръ и молекулы трактуются, какъ двѣ непрерывныя взаимно проникающія одна другую среды ¹⁾).

Экспериментальныя изслѣдованія, съ одной стороны, эквивалентовъ преломленія, съ другой стороны, аномальной дисперсіи веществъ съ избирательной абсорбціей въ растворахъ показыва-

¹⁾ «Um zunächst die Verwickelungen zu beseitigen, welche die Einführung discontinuirlich vertheilter Molekeln in der Rechnung hervorbringt, Schwierigkeiten, deren Ueberwindung übrigens in den von Cauchy und seinen Nachfolgern ausgebildeten theoretischen Arbeiten gelehrt wird, nehme ich an, dass die ponderablen Atome dicht genug liegen, um alle Theile der zwischen ihnen liegenden Aethermassen in merklich gleichmässiger Weise zu officiren, so als ob der Aether und die mit ihm schwingenden ponderablen Atome zwei sich gegenseitig durchdringende continuirliche Medien bilden, welche sich gegen einander verschieben können. Eine solche Annahme wird erlaubt sein, wenn die Entfernungen der ponderablen Theile von einander verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind». H. v. Helmholtz. Zur Theorie der anomalen Dispersion. Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. II. p. 214. 1883. Leipzig. Эти предположенія Helmholtz'a остались по существу неизмѣненными и во всѣхъ позднѣйшихъ теоріяхъ дисперсіи.

ють несомнінно, какую огромную роль играетъ въ явленіяхъ преломленія и дисперсіи свѣта плотность вещества.

Кромѣ того, изслѣдованія послѣдняго времени такъ расширили скалу свѣтовыхъ (электро-магнитныхъ) волнъ, что напр. въ X-лучахъ мы, по всѣмъ вѣроятностямъ, имѣемъ длины волнъ, уже меньшія не только разстояній между молекулами, но даже меньшія размѣровъ атомовъ, и слѣд. для такихъ волнъ то предположеніе теоріи дисперсіи, которое такъ опредѣленно выражено Helmholtz'омъ въ приведенныхъ нами словахъ, еще менѣе имѣетъ основанія, чѣмъ для волнъ видимаго спектра.

Поэтому намъ казалось не безполезнымъ предпринять точное изслѣдованіе того, какое вліяніе на явленія преломленія и дисперсіи имѣетъ разстояніе между молекулами и его измѣненіе въ той схемѣ, по которой эти явленія представляются современными теоріями дисперсій.

Изслѣдованіе этого вопроса можетъ быть произведено совершенно *независимо* отъ какихъ-либо *спеціальныхъ гипотезъ*, допускаемыхъ въ различныхъ теоріяхъ дисперсіи. Аналитически эту задачу можно формулировать, какъ задачу о распространеніи волнъ въ неоднородной средѣ.

Чтобы лучше уяснить себѣ механизмъ распространенія волнъ въ *такой* средѣ, мы изслѣдуемъ сначала *звуковыя* волны; методы, позволяющіе произвести это изслѣдованіе для звуковыхъ волнъ, применимы и для случая волнъ электро-магнитныхъ, которымъ мы посвятимъ вторую часть нашего труда.

Неоднородную среду для звуковыхъ волнъ мы представляемъ себѣ составленной изъ однородной среды (воздуха) и системы размѣщенныхъ въ ней въ опредѣленномъ порядкѣ (параллелепипедическомъ) тѣлъ (резонаторовъ), обладающихъ другими физическими свойствами, чѣмъ окружающая ихъ однородная среда.

Въ общемъ видѣ задачу нашего изслѣдованія можно формулировать слѣдующимъ образомъ: извѣстны (даны) акустическія свойства однородной среды и размѣщенныхъ въ ней тѣлъ *въ отдѣльности*, опредѣлить акустическія свойства всей системы въ совокупности—неоднородной среды.

Изслѣдованіе произведено для случая установившагося (стационарнаго) распространенія волнъ; періодъ движенія предпола-

гается заданнымъ дѣйствующей на систему внѣшней силой (источникомъ звука); главное вниманіе сосредоточено на изслѣдованіи распространенія *плоской* волны.

Скорости движенія и измѣненія плотности воздуха предполагаются на столько малыми, что произведеніями ихъ и квадратами въ гидродинамическихъ уравненіяхъ, какъ обыкновенно принимается въ Акустикѣ, возможно пренебречь. Отъ явленій тренія (на твердыхъ стѣнкахъ) и вязкости воздуха отвлекаемся. Вообще, вся система предполагается *акустически* строго *консервативной*; тѣ измѣненія (второстепенныя) въ результатахъ нашего изслѣдованія, которыя влечетъ отступленіе отъ послѣдняго условія, указаны въ общихъ чертахъ на соотвѣтствующемъ мѣстѣ.

Поставленная нами задача въ предѣльномъ, частномъ случаѣ, когда длина волны (въ воздухѣ) бесконечно велика по сравненію съ періодомъ структуры неоднородной среды (наименьшими разстояніями между тѣлами, составляющими неоднородную среду), принимаетъ ту же аналитическую формулировку, какъ въ теоріи намагничиванія Poisson'a, или, какъ задача о теченіи электричества (или тепла) въ неоднородномъ проводникѣ, наиболѣе точно изслѣдовавшая въ недавнее время лордомъ Rayleigh'емъ въ статьѣ: «On the Influence of Obstacles arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium»¹⁾.

Это изслѣдованіе лорда Rayleigh'я имѣетъ наиболѣе близкое отношеніе къ разсматриваемой нами задачѣ; разрѣшивъ въ немъ вопросъ объ электропроводности неоднороднаго проводника, лордъ Rayleigh при помощи остроумныхъ соображеній переходитъ отъ разсмотрѣнной имъ задачи къ случаю звуковыхъ волнъ и даетъ величину показателя преломленія неоднородной среды, составленной изъ шаровъ, для длины волны, бесконечно-большой по сравненію съ періодомъ структуры неоднородной среды.

Результаты, полученные лордомъ Rayleigh'емъ такимъ путемъ, вытекаютъ непосредственно изъ нашихъ изслѣдованій, какъ простѣйшій частный случай²⁾.

¹⁾ Phil. Mg. 34. p. 481. 1892.

²⁾ W. van Schaik въ своемъ курсѣ Акустики „Trillingen en Geluid“ (въ нѣмецкомъ переводѣ проф. Н. Ferkner'a „Wellenlehre und Schall“ Braunschweig, 1902), привелъ мои опыты по дисперсіи звука (р. 398), изложенные въ

Въ качествѣ введенія въ предпринятое нами довольно сложное изслѣдованіе, въ первой главѣ мы разсматриваемъ неоднородную среду слоистаго строенія. Уже въ этомъ простѣйшемъ съ математической стороны случаѣ оказывается возможнымъ установить большую аналогію между распространеніемъ волнъ въ неоднородной средѣ и однородной и уяснить методъ, пригодный для изслѣдованій подобнаго рода. Помимо этого, изслѣдованіе слоистой среды представляетъ самостоятельный интересъ, съ одной стороны, какъ теорія извѣстныхъ опытовъ J. Tyndall'я ¹⁾, выясняющихъ причины акустической прозрачности и непрозрачности атмосферы, съ другой стороны, какъ эскизъ теоріи цвѣтной фотографіи по методу Lippmann'a.

Во второй главѣ мы изслѣдуемъ неоднородную среду, простѣйшую съ механической стороны,—именно, систему твердыхъ неподвижныхъ шаровъ, расположенныхъ въ параллелепипедическомъ порядкѣ въ безграничномъ воздушномъ пространствѣ. Эта глава является основной во всемъ изслѣдованіи. Выяснивши методъ для изслѣдованія распространенія волнъ въ подобной неоднородной средѣ безъ какихъ бы то ни было спеціальныхъ ограниченій, кромѣ указанныхъ выше, при общей постановкѣ изслѣдованія, мы подробно изслѣдовали случай, когда длина волны (λ) распространяющихся волнъ больше періода структуры неоднородной среды, и затѣмъ указали, какую форму принимаетъ рѣшеніе подобной задачи для случая сжимаемыхъ шаровъ.

Третья глава посвящена описанію нашихъ экспериментальныхъ изслѣдованій распространенія волнъ въ неоднородныхъ средахъ, составленныхъ изъ твердыхъ неподвижныхъ шаровъ и цилиндрическихъ полыхъ резонаторовъ.

Въ четвертой главѣ мы разсматриваемъ неоднородную среду, составленную изъ неподвижныхъ резонаторовъ какого-угодно типа,

моемъ предварительномъ сообщеніи (см. предисловіе), *теорію* дисперсіи звука *ошибочно* приписываетъ лорду Rayleigh'ю. Лордъ Rayleigh вычислилъ показатель преломленія *только* для *бесконечно-большой* длины волны; теорія же дисперсіи звука была установлена и вкратцѣ изложена въ упомянутомъ предварительномъ сообщеніи *только мною*.

¹⁾ J. Tyndall. Der Schall. (ubers. von A. v. Helmholtz u. Cl. Wiedemann). 1897 Braunschweig. p. 332—422.

и, вводя новое въ ученіи о резонаторахъ понятіе о характеристикѣ резонатора, выясняемъ возможность съ аналитической стороны свести эту задачу на случай твердыхъ шаровъ, изслѣдованный во второй главѣ. Далѣе, въ этой главѣ разобраны нѣкоторые частные случаи, имѣющіе прямое отношеніе къ нашимъ опытамъ съ резонаторами, или же иллюстрирующіе особенности распространенія волнъ среди системы резонаторовъ.

Глава пятая, послѣдняя, содержитъ краткое изслѣдованіе *свободныхъ* (стаціонарныхъ) колебаній въ неоднородной средѣ и опредѣленіе періодовъ этихъ *свободныхъ* колебаній, обусловленныхъ свойствами неоднородной среды, а не періодомъ источника звука.

Приведемъ нѣкоторые, наиболѣе важные результаты, полученные нами въ настоящемъ изслѣдованіи.

Законы распространенія волнъ въ неоднородной средѣ, какого бы типа она ни была, могутъ быть формулированы *аналогично* законамъ распространенія волнъ въ однородной средѣ, вводя двѣ характерныя для неоднородной среды величины: n — *показатель преломленія* и ρ' — *плотность* ея (фиктивную); и та, и другая величины представляютъ вполне опредѣленные функціи не только структуры неоднородной среды, но и длины волны (λ), распространяющихся волнъ.

Неоднородная среда сохраняетъ свои свойства (n и ρ') независимо отъ толщины слоя, черезъ который проходятъ волны, *если только эта толщина не меньше двойнаго періода структуры* неоднородной среды.

Замѣчательный результатъ получается въ томъ случаѣ, когда неоднородная среда представляетъ «пластинку»; отраженіе и прохожденіе волнъ черезъ нее происходитъ такъ, какъ если бы пластинка была совершенно однородна и имѣла показатель преломленія n и плотность ρ' , а толщину *нѣсколько* большую, чѣмъ это слѣдуетъ изъ геометрическихъ соображеній. Для неоднородныхъ средъ, составленныхъ изъ шаровъ или резонаторовъ, этотъ выводъ *вполнѣ строгъ* только для случая, когда длина волны *больше* періода структуры.

Вообще, въ неоднородной средѣ волны распространяются какъ въ *совершенно* прозрачной средѣ, но для всякой неоднородной среды существуютъ такіе періоды для распространяю-