

Шахно К.У.

**Сборник задач по
элементарной математике
повышенной трудности**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Ш31

Шахно К.У.
III31 Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / Шахно
К.У. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 523 с.

ISBN 978-5-458-25488-5

Сборник содержит свыше тысячи задач по элементарной математике, главным образом повышенной трудности. Задачи, по возможности, систематизированы и снабжены решениями. В отдельных случаях в связи с решением задачи и там, где это уместно, приведены вопросы теории. Иногда они предпосланы решению группы задач, объединенных общей идеей. Даны разъяснения по вопросам теории равносильности уравнений, построения графиков, комплексных чисел, обратных тригонометрических функций, математической индукции и некоторым другим вопросам. Сборник рассчитан на лиц, окончивших среднюю школу и желающих продолжать совершенствоваться в методах решения задач или готовиться в вуз. Он может послужить дополнительным пособием учителю при работе в классе, для индивидуальных заданий учащимся, особо интересующимся математикой, студентам педагогических институтов.

ISBN 978-5-458-25488-5

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

29. Доказать равенство

$$a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \\ + c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

30. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы дробь $\frac{ax+b}{mx+n}$ не зависела от x .

31. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы дробь $\frac{ax^3+bx+c}{mx^2+nx+p}$ не зависела от x .

Упростить выражения (32—42):

32. $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}.$

33. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$

34. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$

35. $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$

36. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}.$

37. $\frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \frac{(y^2 - b^2)(z^2 - b^2)}{b^2 (b^2 - c^2)} + \frac{(y^2 - c^2)(z^2 - c^2)}{c^2 (c^2 - b^2)}.$

38. $\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x] - (a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2} \times \\ \times \frac{1}{1 - \left[\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x} \right]^2}.$

39. $\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}.$

40. $\frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}.$

41. $\frac{a^2(c-b)}{bc} + \frac{b^2(a-c)}{ac} + \frac{c^2(b-a)}{ab}.$

42. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} +$

$$+ \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

43. Доказать, что

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9,$$

если $a + b + c = 0$.

44. Доказать, что

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\ = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

45. Доказать, что если

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &= p^2; \\ b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 &= q^2; \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= pq, \end{aligned}$$

то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q},$$

если все величины, входящие в данные равенства, вещественны.

46. Доказать, что если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

то :

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \\ = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2. \end{aligned}$$

47. Доказать, что дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ при любом целом n — не сократима.

48. Доказать, что $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$, если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

49. Доказать, что

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \right)^n = \frac{c_1 a_1^n + c_2 a_2^n + \dots + c_k a_k^n}{c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \dots + c_k b_k^n},$$

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}$, а c_1, c_2, \dots, c_k — любые числа, не равные нулю одновременно.

50. Доказать иррациональность числа $\sqrt{2}$.

51. Почему $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$?

52. Почему: а) $a^0 = 1$; б) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; в) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$,
 $m > 0$; г) $a^1 = a$?

53. Чему равно арифметическое значение $\sqrt{a^2}$?

54. Когда верны формулы: а) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$;

б) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$; в) $\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}} = -\frac{c^2}{b} \sqrt{a}$; г) $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$?

55. Доказать, что если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, то

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} =$$

$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}$$

$(a_k > 0, b_k > 0; k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Упростить выражения (56—112):

$$56. \left[\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

$$57. \frac{\frac{4}{a^3} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) - a^{\frac{2}{3}}.$$

$$58. \frac{\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{4b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2b} + \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{4b^2} + \sqrt[3]{16ab}}}{\frac{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{2b} + b\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}.$$

$$59. \frac{(x-y)^3 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-3} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3(\sqrt{xy} - x)}{x-y}.$$

$$60. \left[\frac{\frac{\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} - \frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{a+b}}{\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \right) (\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab})}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}} \right) (a+b)}} \right]^{-1}.$$

$$61. \frac{(x^2 + y\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} + y^2)(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-2} - \sqrt{xy}}{x - y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

$$62. \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x^{-1}}}\right)(\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y})}{x + y - (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-1}}.$$

$$63. \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \left(\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{a + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + 1}\right).$$

$$64. \left(\frac{\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - \sqrt[4]{a^3}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}} + \sqrt[4]{a^2}}{1 + \sqrt[4]{a^{-1}}} - \sqrt{a}}\right)^5.$$

$$65. \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx}\right)^2 + bx + 3}{x(\sqrt{b} + \sqrt{3x^{-1}})^2}.$$

$$66. \left(\sqrt[3]{\frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{x - a}} - \sqrt[3]{\frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{x + a}}\right)^{-1} \cdot \sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{a^{-2}}{x^{-1}}}.$$

$$67. b \left[\left(\frac{\frac{a\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2b}} - \sqrt[4]{ab} \right) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) - \sqrt[4]{a} \right]^{-4}.$$

$$68. \sqrt[3]{a} - \left(\frac{1 + a\sqrt[3]{a} + a + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{a^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} \right) \times \times \frac{\frac{1 + a}{\sqrt[3]{a} + 1} - \sqrt[3]{a^2}}{a^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{a}}.$$

$$69. \left(x + a^{\frac{3}{2}} : \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{5}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}} \times \times \sqrt[10]{\frac{a}{(x - a)^3}}.$$

$$70. \left(\frac{\frac{a + \sqrt[3]{2a^2x}}{2x + \sqrt[3]{4ax^2}} - 1}{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{2x}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \right)^{-6}.$$

$$71. \frac{(a + a\sqrt{x} + x + x\sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x})^2}{x + x^{-1} - 2} - x^{\frac{3}{2}}a \sqrt{\frac{a^2}{x} + 4a + 4x}.$$

$$72. \frac{\left[x\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} - (x+1)\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^{-2}}{(x-1)^2}} \right]^{\frac{3}{7}}}{\sqrt[7]{x^2-1}}.$$

$$73. \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + \frac{x - \sqrt{ax}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}}.$$

$$74. \left[\sqrt[3]{\frac{a^5 + 2a^4b + 4a^3b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}} + \sqrt[3]{8b^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}} \right] : \left(\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} - b\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{2}} \right).$$

$$75. \frac{\sqrt[3]{(b-3)\sqrt{ab} + (3-b^{-1})\sqrt{ab^{-1}}}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}} \cdot \sqrt{b^3\sqrt{b^2a}}.$$

$$76. \frac{(5 - 4x^2)\sqrt{5} - x\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 - 1} \cdot (-8x)}{\sqrt{(5 - 4x^2)^2 + (4x\sqrt{5})^2}} \times \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2a}}{\sqrt{x^{-1}} + \sqrt{a^{-1}}}.$$

$$77. \left[\frac{\frac{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} + 1}}{\left(x - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\left(x - \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$78. \left\{ \left[\frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 + 2a - b}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 + 2b - a} \right]^2 : \sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}} \right\} \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

$$79. \left(\frac{\sqrt[3]{a^2b^2} + a^3\sqrt{a}}{a^3\sqrt[3]{b} + b^3\sqrt[3]{a}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \right).$$

80.
$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right] \left[\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} \right], \quad x > 0.$$
81.
$$\left(\frac{\frac{1}{6} - \frac{5}{\sqrt[6]{c}}}{\frac{1}{3} - c} - \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{c} - \frac{1}{6}}{a - \frac{1}{3} - \sqrt[3]{c^{-1}}} \right)^{-1} \cdot \frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}.$$
82.
$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}} \right) \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \sqrt{0.2}.$$
83.
$$\left[2 \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{b}} + \frac{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a} + \sqrt[4]{b}} \right)^{-2} \right] : \left(1 + \frac{b}{2a} - 2 \sqrt{\left(\frac{2a}{b} \right)^{-1}} \right).$$
84.
$$\left[\frac{\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}{\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\left(\frac{b}{a} \right)^{-2}} \right] : \left(1 + \frac{2\sqrt{ab} + 2b}{a - b} \right).$$
85.
$$\left[\frac{1}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} \right] : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)} + 1 \right].$$
86.
$$9 \left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{3}{8}}} \right)^{-4} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{40\sqrt{2} + 56} : \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}.$$
87.
$$\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}} \sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}} \right]^{-1} : \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{3a\sqrt{a}}}.$$

$$88. \left\{ \left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt[4]{1+x}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2} \right] (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right\} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{4}}.$$

$$89. x^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2 + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2}{x + \sqrt{xy}} \right]^5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{x^{-1}}}.$$

$$90. x \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)(x - y)^2}{x + y}} + y \sqrt{\frac{(4x^2 - 9y^2)^2(x - y)}{(2x - 3y)^2}} + \\ + \frac{2xy}{x - y} \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^3}{(x + y)^3}} - (x^2 - y^2) \sqrt{\frac{(x + y)^2}{x - y}}.$$

$$91. \frac{(\sqrt{a^2+1}+a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-1\right) - (\sqrt{a^2+1}-a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+1\right)}{\sqrt{a^2+1}+a} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}.$$

$$92. \sqrt{\left(\frac{p^2 + q^2}{p^3 - pq^2} + \frac{2q}{p^2 - q^2} \right) (p^2 + pq)} - \\ - \sqrt{\left(\frac{p}{p - q} - \frac{q}{p + q} - \frac{2pq}{p^2 - q^2} \right) (p + q)}; \quad p > q > 0.$$

$$93. \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1 + (\sqrt{x} + 1)^2(1 - \sqrt{x})^{-2}} \left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1 - \sqrt[4]{x})} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1 + \sqrt[4]{x})} \right]^2 - \frac{1}{2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}.$$

$$94. \frac{8 - x}{2 + \sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2 + \sqrt[3]{x}} \right) + \\ + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}}.$$

$$95. \frac{1 - (m + x)^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{m + x}\right)^2} : \left[1 - \frac{1 - (m^2 + x^2)}{2mx} \right]^{-1}, \text{ если } x = \frac{1}{m-1}.$$

$$96. \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ и $k > 1$.

$$97. (1+x^{-1})^{-2} + (1-x^{-1})^{-2}, \text{ если } x = (1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}.$$

$$98. \left[\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}}(x+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-x)^{-\frac{1}{2}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2},$$

если $x = \sqrt{ab}$ и $a > b > 0$.

$$99. \left[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}} + (x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}} - 2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x = a \frac{m^3 + n^3}{m^3 - n^3}$ и $m > n > 0$.

$$100. \left(x^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{1}{n}} \right)^2 - 4a^2 x^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \text{ если } x = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{2mn}{m-n}}.$$

$$101. \left(a + x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ если } x = 4(a-1) \text{ и } 1) 1 < a < 2; 2) a > 2.$$

$$102. \left[\frac{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2}, \text{ если}$$

$$x = a \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } n > m > 0.$$

$$103. \frac{(m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}}}, \text{ если } x = \frac{2mn}{n^2 + 1}$$

и $m > 0, 0 < n < 1$.

$$104. \left(x^{-2} + a^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-2} + a^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{если } x = \left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$105. \frac{2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

и $a > 0, b > 0$.

$$106. x^3 + 12x, \text{ если } x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5} + 1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5} - 1)}.$$

$$107. x^3 + ax + b, \text{ если } x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

$$108. (x^{-1} + a^{-1})(x + a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1}x^{\frac{1}{n}}, \text{ если}$$

$$x = ab^{\frac{n}{n+1}} \left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}} \right)^{-1}.$$

$$109. \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{-38 + 17\sqrt{5}} - mx}{\sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{-38 + 17\sqrt{5}} + mx} : \sqrt{\frac{1 - nx}{1 + nx}},$$

$$\text{если } x = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2m}{n} - 1} \text{ и } 0 < m < n < 2m.$$

$$110. \sqrt[n]{x^n + \sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}} + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}} - 1,$$

$$\text{если } x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

$$111. \sqrt[n]{a^k x^{n-k}} + \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} - 2\sqrt{bx} + b^2, \text{ если}$$

$$x = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}.$$

$$112. \sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} - 4\sqrt[n]{x^2 - 1} + 1, \text{ если}$$

$$x = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1}.$$

Доказать справедливость равенств (113—115):

$$113. \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \quad n \text{ — натуральное.}$$

$$114. b\sqrt{2} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} = \sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a-b)^3},$$

если $a > |b|$.

$$115. \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2, \text{ если } x \leq 2.$$

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

116. Доказать, что уравнение $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ имеет решение и притом единственное.

117. Доказать, что для совместности уравнений $a_1x + b_1 = 0$ и $a_2x + b_2 = 0$, где $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Выяснить, совместны ли уравнения (118—120):

$$118. x + 1 = 0 \text{ и } x^2 + 5x + 4 = 0.$$

$$119. x^2 + x - 20 = 0 \text{ и } x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$$120. x^2 + ax + 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + a = 0.$$

Выяснить, являются ли равносильными уравнения (121—124):

$$121. 2x = x - 1 \text{ и } 2x + x^2 + 1 = x + x^2.$$

$$122. x^2 = 3x - 2 \text{ и } x^2 + \frac{1}{x-1} = 3x - 2 + \frac{1}{x-1}.$$

$$123. x + 1 = 0 \text{ и } (x+1)\sqrt{x-1} = 0.$$

$$124. \sqrt{(x-6)(x-1)} = \sqrt{14} \text{ и } \sqrt{x-6} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{14}.$$

Решить уравнения (125—134):

$$125. a^2x = a(x+2) - 2.$$

$$126. \frac{x-mn}{m+n} + \frac{x-mp}{m+p} + \frac{x-np}{n+p} = m+n+p.$$

$$127. \frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1;$$

a , b и c — числа одного знака.

$$128. |x-1| = 2.$$

$$129. |x-1| + |x-2| = 1.$$