С.А. Чаплыгин

Механика. Элементарная статика

Часть 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
С11

С.А. Чаплыгин

С11 Механика. Элементарная статика: Часть 1 / С.А. Чаплыгин – М.: Книга по Требованию, 2014. – 80 с.

ISBN 978-5-458-34305-3

Книга, предназначенная для втузов и естественных факультетов университетов, основана на курсе лекций по аналитической статике с изложением общих механических принципов, которые С. А. Чаплыгин, после избрания профессором Московского Университета в 1903 г., читал студентам III курса. Читая курс, С. А. Чаплыгин не стремился к особой популярности, не любил общих рассуждений, никогда не отвлекался в сторону по поводу возможных построений существующих теорий и их приложений или возможной замены другими идеями и направлениями. Не касался он и истории развития науки. Курс носил чисто аналитический характер: он обычно не применял геометрические соображения в тех местах, где можно было сравнительно просто изложить предмет чисто аналитически. Но лекции его выделялись мастерским подбором материала, необычайной лаконичностью и замечательной последовательностью изложения. В немногочисленных написанных им учебниках, а также в изданных студентами под его наблюдением записях его лекций эта сжатость и лаконизм изложения особенно заметны. Естественно, что такой метод изложения требовал от слушателей большого напряжения внимания, большой самостоятельной работы над литературой предмета и хорошей общей подготовки.

ISBN 978-5-458-34305-3

Говорятъ, что эти силы между собой *уравновѣшены*. (Это статическое опредѣленіе равныхъ силъ).

Естественно сравнивать всѣ силы съ силой тяжести, какъ съ простѣйшей намъ извѣстной; и ту основную единицу, въ которой сила тяжести измѣряется, принять за единицу измѣренія силъ вообще. *За единицу силы* тяжести мы будемъ принимать вѣсъ равный одному *килограмму*.

У *силъ* приходится отмѣчать ихъ *величину* и *направленіе*. Если имѣемъ совокупность матеріальныхъ точекъ (твердое тѣло), то приходится говорить и о *точкѣ приложенія силы*.

Точка A называется точкой приложенія силы, если двинется лишь она одна, въ случаѣ представленія тѣла раздробленымъ на мельчайшія части, но съ неизмѣнной физической обстановкой.

Всякій физическій образъ, характеризуемый величиною и направленіемъ называется *векторомъ*, поэтому *сила* есть *векторъ*.

Чтобы изобразить силу P, надо отложить изъ точки приложенія прямолинейный отрѣзокъ въ данномъ направленіи и такой длины, чтобы единица масштаба въ немъ заключалась бы P разъ.

Итакъ, *величина, направленіе и точка приложенія характеризуютъ силу*.

Укажемъ теперь тѣ основныя начала, которыя должны быть почерпнуты изъ опыта.

Единственными аксіомами механики являются законы Ньютона.

Эти законы не могутъ быть введены въ элементарную статику, такъ какъ они опираются на понятія кинематическія, не подлежащія введенію въ статику. Мы введемъ только слѣдствія изъ нихъ.

Начала статики.

1. *Двѣ противоположно направленныя силы P и Q, равныя между собой и дѣйствующія на концы неизмѣняемаго стержня по его направленію, взаимно уравновѣшиваются.*

Это предложеніе очевидно, но тѣмъ не менѣе приходится ставить его на видъ. Оно принимается безъ доказательства, при томъ опредѣленіи равныхъ силъ, которое было дано раньше.

2. *Двѣ силы P и Q, дѣйствующія на одну и ту же точку въ одномъ и томъ же направленіи, эквивалентны (равносильны) одной силѣ R, равной ихъ суммѣ, иными словами—*

равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку, въ одномъ и томъ же направленіи, равна ихъ суммѣ и направлена въ ту же сторону, какъ и данныя силы ($R = P + Q$).

Простымъ слѣдствіемъ этого начала является способъ сложенія сколькихъ угодно силъ, дѣйствующихъ по одной и той же прямой.

3. *Двѣ силы* P *и* Q, *дѣйствующія на точку* A *подъ нѣкоторымъ угломъ могутъ быть замѣнены одной, дѣйствующей по нѣкоторому среднему направленію (внутри угла) и лежащей въ плоскости данныхъ силъ.*

Если P *и* Q *равны между собой, то равнодѣйствующая ихъ дѣлитъ уголъ между направленіями силъ пополамъ.*

4. *Если имѣемъ какую-нибудь совокупность силъ, дѣйствующихъ на тѣло, то мы не измѣнимъ ихъ дѣйствій прибавленіемъ или отнятіемъ уравновѣшенныхъ силъ.*

5. *Мы можемъ наложить на уравновѣшенное тѣло какія угодно связи (условія, стѣсняющія движеніе), не нарушая его равновѣсія.*

6. *Дѣйствіе равно противодѣйствію.* (Это третій законъ *Ньютона*).

Вопросъ, который приходится разрѣшать въ элементарной статикѣ, представляетъ двѣ задачи:

1. *Эквивалентность силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, или замѣна однѣхъ силъ другими.*
2. *Равновѣсіе силъ.*

Теорема о параллелограммѣ силъ.

Равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ, по величинѣ и направленію равна діагонали параллелограмма, построеннаго на данныхъ силахъ.

Раздѣлимъ доказательство этой теоремы на двѣ части:

1. Равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ, направлена по діагонали параллелограмма, построеннаго на нихъ.

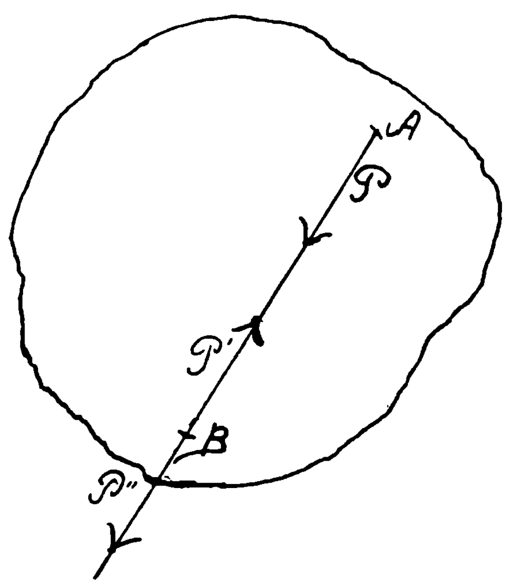
2. Равнодѣйствующая этихъ силъ по величинѣ равна діагонали такого параллелограмма.

Для доказательства этой теоремы надо имѣть въ виду два положенія:

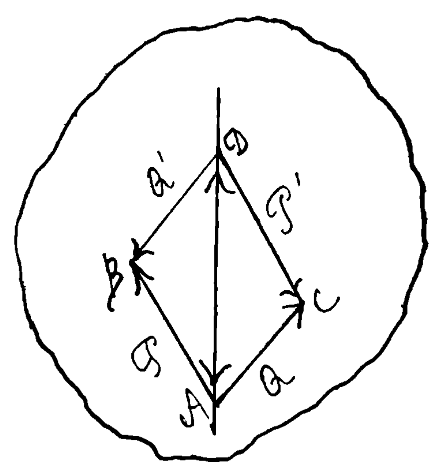
а) *точку приложенія силы* P, *дѣйствующей въ какой-нибудь точкѣ* A *твердаго тѣла, можно переносить по ея направленію въ любое мѣсто.*

Пусть мы хотимъ перенести точку приложенія A силы P въ точку B. Пользуясь основнымъ началомъ 4, мы въ точкѣ B можемъ приложить по направленію силы P двѣ уравновѣшенныя силы $P' = P'' = P$.

Получимъ три равныя силы; при чемъ силы P и P'' взаимно уравновѣшиваются, какъ дѣйствующіе на концы неизмѣняемаго стержня AB (аксіома первая). Остается сила P', равная данной силѣ P, приложенная къ точкѣ B по направленію силы P. Слѣдовательно положеніе наше доказано.



Черт. 1.



Черт. 2.

b) *Совокупность двухъ силъ $P = Q$, дѣйствующихъ подъ угломъ на точку A, уравновѣшивается совокупностью силъ P и Q' (гдѣ $P' = Q' = P = Q$), приложенной въ вершинѣ ромба, построеннаго на данныхъ силахъ, по направленіямъ соотвѣтственно противоположнымъ даннымъ.*

Это положеніе является слѣдствіемъ третьей аксіомы.

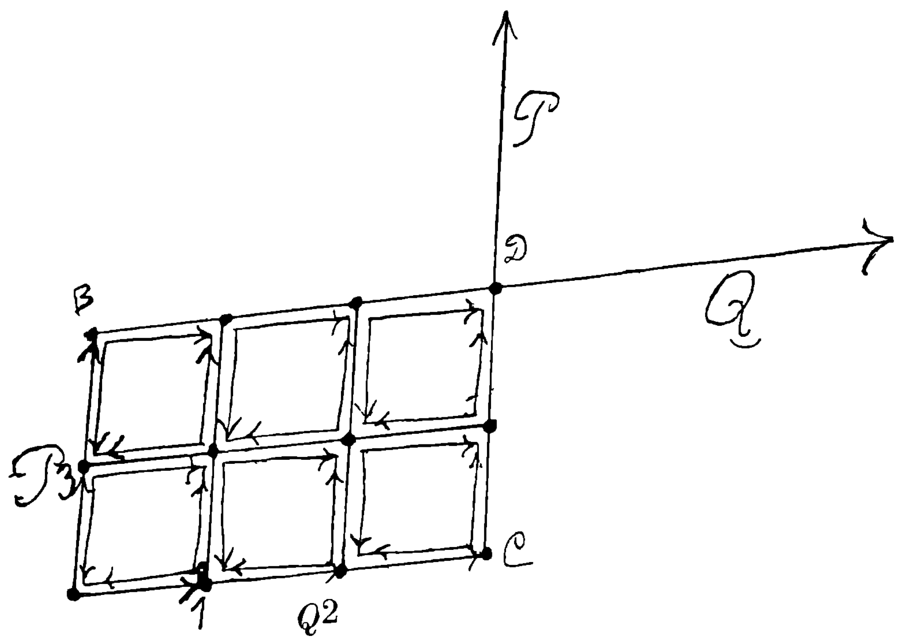
Даны двѣ равныя силы P и Q, приложенныя къ точкѣ A и дѣйствующія подъ угломъ; построимъ на нихъ ромбъ. Вообразимъ къ точкѣ D приложенныя двѣ силы Q' и P', $P' = Q' = P = Q$, въ направленіи соотвѣтственно противоположномъ даннымъ. Пусть R есть равнодѣйствующая силъ P и Q, а R' есть равнодѣйствующая силъ P' и Q. По величинѣ $R = R'$, такъ какъ равнодѣйствующая двухъ силъ можетъ зависѣть лишь отъ ихъ величинъ и угла между ними. А эти условія одинаковы какъ для совокупности силъ P и Q, такъ и для P' и Q'. Но эти силы R и R' направлены противоположно другъ другу. На основаніи начала касіомы перваго дѣйствія силъ взаимно уравновѣшиваются. И положеніе наше доказано.

Приступимъ теперь къ доказательству первой части нашей теоремы о *параллелограммѣ силъ.*

Здѣсь намъ могутъ представиться два случая:

a) случай *соизмѣримыхъ силъ,*

b) случай *несоизмѣримыхъ силъ.*



Черт. 3.

Первый случай.

Имѣемъ двѣ силы P и Q; общая ихъ мѣра р. Напр. $P =$ $= 2$ р. $Q = 3$ р., Построимъ параллелограммъ на данныхъ силахъ и покажемъ, что силы P и Q, не измѣняя ихъ дѣйствія, можно перенести въ точку D въ противоположную вершину параллелограмма, параллельно самимъ себѣ.

На точку A дѣйствуютъ: сила $Q = 3$ р. и $P = 2$ р. Раздѣлимъ AB на двѣ равныя части, AC — на 3 равныя части.

Черезъ точки дѣленія проведемъ параллели сторонамъ параллелограмма. Въ результатѣ получимъ рядъ ромбовъ. Точки ихъ вершинъ дадутъ намъ идеальную рѣшетку, если всѣ точки дѣленія представимъ себѣ неизмѣнно соединенныя съ точкой A.

На основаніи второй аксіомы къ точкѣ A можно приложить вмѣсто силы $Q = 3p$, три равныя силы p. Одну изъ этихъ силъ оставимъ приложенной къ точкѣ A, вторую перенесемъ въ точку 1, а третью—въ точку 2 (положеніе 1, стр. 5).

Подобнымъ же образомъ поступимъ и съ силой P: разбиваемъ ее на двѣ равныя силы p, одну изъ которыхъ оставимъ въ точкѣ A, другую приложимъ въ точку 3. Воспользовавшись вторымъ положеніемъ (стр. 6), мы прибавимъ (на основаніи начала 4) къ каждому изъ полученныхъ ромбовъ совокупность четырехъ уравновѣшенныхъ силъ (см. чертежъ). Эти новыя силы нужно представить себѣ приложенными къ соотвѣтственнымъ точкамъ рѣшетки по сторонамъ составляющихъ ее ромбовъ; на чертежѣ это не такъ (только для ясности чертежа).

Разсматривая чертежъ, мы увидимъ, что всѣ силы, кромѣ силъ, направленныхъ по BD и CD, попарно уравновѣшиваются, какъ силы равныя, дѣйствующія на одну и ту же точку въ противоположныхъ направленіяхъ. Итакъ, мы теперь имѣемъ по линіи BD три равныя силы, равнодѣйствующая которыхъ есть $Q = 3p$, а по линіи CD—двѣ силы, равнодѣйствующая ихъ $P = 2p$. Обѣ эти силы мы можемъ теперь перенести въ точку D.

Получимъ данныя силы Q и P, приложенныя къ точкѣ D и направленныя $\parallel$ своимъ прежнимъ положеніямъ. Если бы равнодѣйствующая R силъ P и Q не проходила бы черезъ D, то укрѣпивъ тѣло въ этой точкѣ, мы увидѣли бы, что сила R стремится повернуть тѣло вокругъ точки укрѣпленія. Съ другой стороны, представляя данныя силы перенесенными въ точку D, мы убѣдились бы, что онѣ не могутъ произвести на тѣло никакого дѣйствія, ибо точка D неподвижа.

Получаемъ различное дѣйствіе однѣхъ и тѣхъ же силъ при одной и той же обстановкѣ, чего не можетъ быть. Остается признать, что равнодѣйствующая должна пройти черезъ точку D. Слѣдовательно, *равнодѣйствующая двухъ соизмѣримыхъ силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ, направлена по діагонали параллелограмма, построеннаго на данныхъ силахъ.*

Что и требовалось доказать.

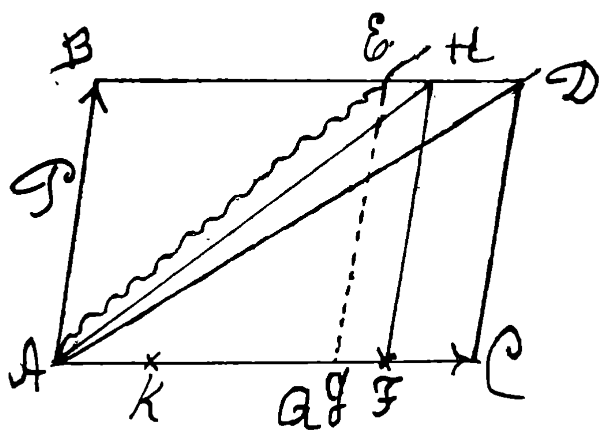
Случай несоизмѣримыхъ силъ.

Положимъ, что имѣемъ двѣ силы P и Q, по величинѣ несоизмѣримыя. Докажемъ нашу теорему отъ противнаго положенія. Пусть равнодѣйствующая данныхъ силъ не проходитъ черезъ точку D, а проходитъ черезъ E. Раздѣлимъ отрѣзокъ AB (величина силы P) на части меньшія по величинѣ отрѣзка ED. Пусть такихъ частей будетъ m.

$$\frac{AB}{m} < ED = GC.$$

Отмѣчаемъ по AC, начиная отъ точки A, такія же части. Такъ какъ $\frac{AB}{m} < AE$, то, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія упадетъ въ точку F между G и C (см. чертежъ $EG \parallel AB$).

Силу Q можно представить по началу 2-му, какъ равнодѣйствующую двухъ силъ AF и $AK = FC$, приложенныхъ въ точкѣ A. Такимъ образомъ въ точкѣ A приложены три силы: AB, AF и AK. Но изъ построенія ясно, что силы AB и AF соизмѣримы.

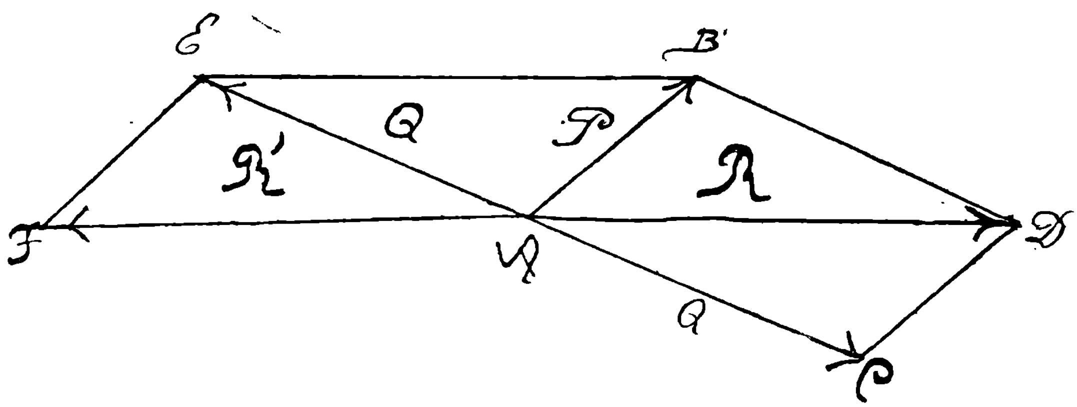


Черт. 4.

Слѣдовательно, по доказанному равнодѣйствующая ихъ R' пройдетъ черезъ точку H, по діагонали параллелограмма, построеннаго на нихъ. А въ такомъ случаѣ равнодѣйствующая R силъ R' и AK (т.-е. равнодѣйствующая данныхъ силъ P и Q) по началу третьему должна направиться внутри угла HAC и не можетъ совпасть съ направленіемъ по EA, что противорѣчитъ нашему положенію. Это противорѣчіе устранится, если точка E сольется съ точкой D. Слѣдовательно первая часть нашей теоремы доказана и для случая несоизмѣримыхъ силъ.

Приступимъ теперь къ доказательству второй части этой теоремы, а именно, докажемъ, что *равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ подъ угломъ, по величинѣ равна діагонали параллелограмма, построеннаго на нихъ*.

Приложимъ къ точкѣ A силу $R' = R$, но противоположно направленную (R равнодѣйствующая данныхъ силъ P и Q). Сила R' уравновѣшиваетъ силу R, а слѣдовательно, она уравновѣшиваетъ замѣняемую ею совокупность силъ P и Q. Значитъ мы имѣемъ три силы P, Q и R' взаимно уравновѣшенныя; разъ это такъ, то каждая изъ этихъ силъ уравновѣшиваетъ двѣ остальныя. Разсмотримъ силу Q. По только-что сказанному, она должна уравновѣшивать совокупность силъ P и R'; отсюда ясно, что равнодѣйствующая P и R' должна быть равна Q, но противоположно ей направлена. Слѣдовательно, намъ извѣстны: сила P, по величинѣ и направленію, сила R' по направленію и сила $Q' = Q$ (равнодѣйствующая силъ P и R') по величинѣ и направленію. Съ другой стороны мы знаемъ, что равнодѣйствующая Q' должна быть направлена по діагонали параллелограмма, построеннаго на данныхъ силахъ. Въ этомъ параллелограммѣ мы знаемъ одну изъ сторонъ



Черт. 5.

и направленіе другой стороны и діагонали. Изъ этихъ данныхъ легко построимъ параллелограммъ и затѣмъ докажемъ, что $AF = R' = AD$, т.-е. $R = AD$.

$\Delta AEB = \Delta ABD$, какъ половины одного и того же параллелограмма. По той же причинѣ $\Delta EFA = \Delta AEB$; отсюда:

$\Delta AEF = \Delta ABD$. Слѣдовательно $AE = AD$; но такъ какъ $AE = R'$, а $R' = R$, то $AD = R$, и теорема наша окончательно доказана.

Сложеніе многихъ пересѣкающихся силъ.

Зная способъ сложенія двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ*), легко найти способъ сложенія сколькихъ угодно силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, послѣдовательнымъ сложеніемъ.

*) Если двѣ силы не приложены къ одной точкѣ, то ихъ можно перенести въ точку пересѣченія ихъ направленія, по положенію (стр 6).

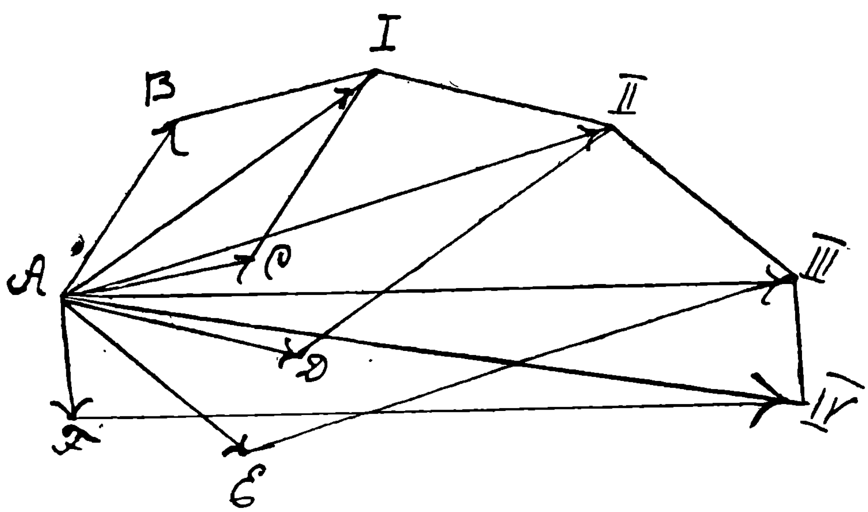
Нужно сначала сложить двѣ какія-нибудь силы, затѣмъ ихъ равнодѣйствующую съ какой-либо третьей изъ данныхъ силъ и т. д.

Легко усмотрѣть геометрическую особенность въ построеніи окончательной равнодѣйствующей: мы получаемъ однообразно направленную ломаную линію AB I II III IV, звенья которой представляютъ данныя силы по величинѣ и направленію, а замыкающая равнодѣйствующую.

Ломаная AB I II III IV называется *силовымъ многоугольникомъ.*

Результатъ сложенія силъ не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ силъ, такъ какъ совокупность силъ должна давать вполнѣ опредѣленное дѣйствіе.

Не трудно показать это и геометрически. Любопытнымъ частнымъ случаемъ является случай трехъ силъ, пересѣкающихся въ



Черт. 6.

одной точкѣ. Въ этомъ случаѣ вмѣсто правила силового многоугольника можно прилагать *правило параллелепипеда: равнодѣйствующая есть діагональ параллелепипеда, ребрами котораго будутъ составляющія силы.*

Не трудно видѣть, что оба правила равноцѣнны въ этомъ случаѣ.

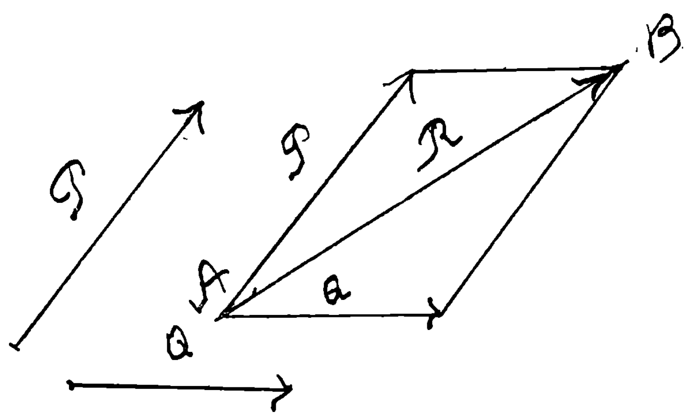
Можетъ случиться, что *ломаная сама собой замкнется*, тогда R будетъ равна нулю, слѣдовательно совокупность такихъ силъ будетъ находиться въ *равновѣсіи.*

Напримѣръ, представимъ для нашего чертежа 6 еще силу $P_4 = R$, но противоположно ей направленную. Ясно, что совокупность силъ P_1, P_2, P_3, P_4 будетъ въ равновѣсіи.

Разложеніе силы на нѣсколько пересѣкающихся силъ.

Разложить силу на нѣсколько составляющихъ силъ это— задача *вообще неопредѣленная.*

При разложеніи данной силы поэтому необходимо имѣть еще нѣкоторыя дополнительныя свѣдѣнія. Если требуется одну силу замѣнить двумя пересѣкающимися, то могутъ представиться разнообразные случаи:



Черт. 7.

1. Данную силу R разложить на двѣ силы P и Q, опредѣляемыя по своимъ направленіямъ.

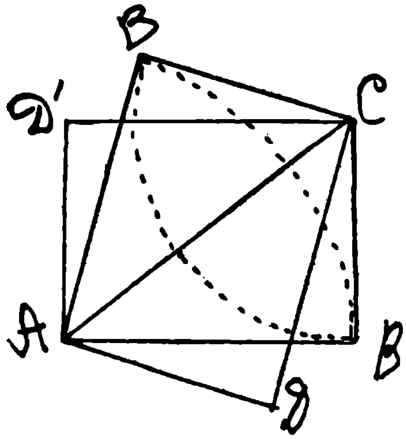
Изъ точекъ A и B (концовъ отрѣзка R) отложимъ линію $\parallel P$ и $\parallel Q$; получимъ параллелограммъ, стороны котораго дадутъ искомыя величины. Такимъ образомъ величины силъ P и Q опредѣлятся вполнѣ.

2. Разложить данную силу R на двѣ силы P и Q, данныя своими величинами, т.-е. найти направленіе P и Q.

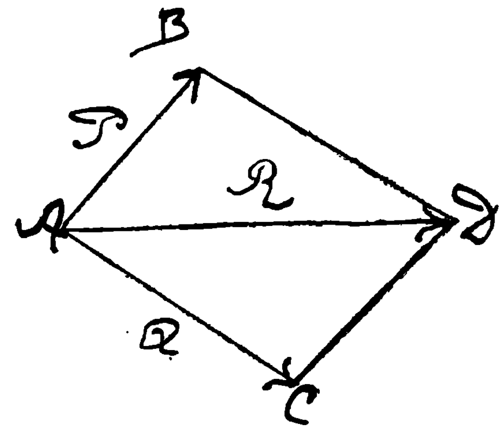
Надо изъ концовъ R провести дуги радіусами P и Q; соединяя точки пересѣченія этихъ дугъ съ концами R, получимъ рѣшеніе данной задачи. Такъ какъ точекъ пересѣченія двѣ, то задача имѣетъ два рѣшенія.

3. Даны силы R и P по величинѣ и направленію. Найти третью силу Q такимъ образомъ, чтобы R была равнодѣйствующей для P и Q, т.-е. разложить R на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна равна P.

Соединяемъ точку A съ точкой D и достраиваемъ параллелограммъ. AC и будетъ искомой величиной.



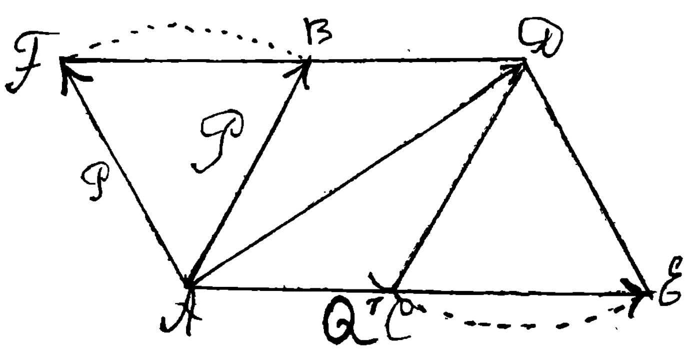
Черт. 8.



Черт 9.

4. Разложить данную силу R на двѣ P и Q: изъ которыхъ одна дана по величинѣ, а другая по направленiю.

Изъ точки A откладываемъ AC по направленiю силы Q, изъ D проводимъ дугу радiуса P. AC пересѣчетъ эту дугу въ двухъ точкахъ (общiй случай) C и E.



Черт. 10.

Построивъ параллелограмъ на AC и CD, получимъ силу $P = AB$, а построивъ □ на AE и ED—получимъ силу $P = AF$. Слѣдовательно мы имѣемъ два рѣшенiя. Въ частномъ случаѣ, когда $P \perp Q$, имѣемъ одно рѣшенiе.

Разложенiе силы на три составляющiя.

Если силу R надо разложить на три силы, данныя своими направленiями, то стоитъ только построить параллелепипедъ по направленiямъ 3-хъ его реберъ и по дiагонали (данной по величинѣ и направленiю), чтобы разрѣшить вопросъ.