

Д.А. Варшалович

Квантовая теория углового момента

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Д11

Д11 **Д.А. Варшалович**
Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович – М.: Книга по Требованию, 2024. – 442 с.

ISBN 978-5-458-33184-5

Книга представляет собой справочное издание по квантовой теории углового момента и аппарату неприводимых тензоров. Она содержит как основные результаты теории, так и обширный материал, необходимый для практических расчетов. Детально обсуждаются различные математические свойства D-функций Вигнера, спиноров, сферических функций и шаровых тензоров, коэффициентов Клебша—Гордана, 6/-и 9/- символов, а также различные суммы и интегралы от произведений этих функций. Даны алгебраические и численные таблицы. Книга предназначена для специалистов, работающих в области атомной, молекулярной и ядерной физики, квантовой химии, кинетики, физики плазмы и квантовой оптики и радиофизики. Она может быть полезна также для студентов старших курсов физических специальностей.

ISBN 978-5-458-33184-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Каждому из значений $\epsilon\pi\alpha j$ отвечает $(2j+1)$ функция, соответствующая различным значениям квантового числа m . Они описывают состояния системы, различающиеся лишь ориентацией в пространстве.

При повороте системы координат $(2j+1)$ функция $\Psi_{\epsilon\pi\alpha j m}(r)$ с различными m преобразуются линейно друг через друга, не затрагивая функций с другими значениями квантовых чисел:

$$\Psi_{\epsilon\pi\alpha j m'}(r') = \sum_m \Psi_{\epsilon\pi\alpha j m}(r) D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma),$$

где коэффициенты преобразования $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ являются элементами матрицы конечного вращения в j -представлении. Эти матричные элементы представляют собой функции углов Эйлера α, β, γ , определяющих поворот системы координат. Они называются обобщенными сферическими функциями или D -функциями Вигнера.

Если система с угловым моментом j и его проекцией m состоит из двух подсистем с моментами j_1 и j_2 , то ее волновая функция $\Psi_{j_1 j_2 j m}$ может быть построена из волновых функций подсистем по формуле

$$\Psi_{j_1 j_2 j m}(r_1, r_2) = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \Psi_{j_1 m_1}(r_1) \Psi_{j_2 m_2}(r_2).$$

Величины $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$, называемые коэффициентами векторного сложения (коэффициентами Клебша—Гордана), играют важную роль в квантовой механике. С их помощью можно построить волновые функции сложных систем (ядер, атомов, молекул). Однако при этом возможны различные схемы связи угловых моментов. Преобразование волновых функций при переходе от одной схемы связи к другой осуществляется с помощью $6j$ -, $9j$ - и других $3nj$ -символов.

Волновые функции Ψ_{jm} являются частными случаями неприводимых тензоров. Понятие неприводимого тензора одно из основных в теории углового момента. Неприводимым тензорам ранга λ называется совокупность любых $(2\lambda+1)$ величин $\mathfrak{M}_{\lambda\mu}$, преобразующихся при повороте системы координат по закону

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} \mathfrak{M}_{\lambda\mu'} D_{\mu'\mu}^{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Многие физические величины сами являются неприводимыми тензорами. Например, энергия — тензор нулевого ранга (скаляр), спин и магнитный момент — тензор первого ранга (вектор), квадрупольный момент — тензор второго ранга и т. д. В общем случае любые физические величины и соответствующие им операторы могут быть представлены в виде линейной комбинации неприводимых тензоров (мультитпольное разложение).

Использование неприводимых тензоров для описания физических величин существенно облегчает задачу вычисления матричных элементов, т. е. выражений типа

$$\langle \epsilon' \pi' \alpha' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} | \epsilon \pi \alpha j m \rangle = \int \Psi_{\epsilon' \pi' \alpha' j' m'}^*(r) \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} \Psi_{\epsilon \pi \alpha j m}(r) dr,$$

где интегрирование понимается в обобщенном смысле — интегрирование по всем непрерывным переменным и суммирование по дискретным переменным.

Согласно теореме Вигнера-Эккарта, вся зависимость таких матричных элементов от ориентации системы координат, т. е. от индексов m, m', μ , определяется коэффициентом Клебша-Гордана

$$\langle \epsilon' \pi' \alpha' j' m' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda\mu} | \epsilon \pi \alpha j m \rangle = C_{jm\lambda\mu}^{j'm'} \langle \epsilon' \pi' \alpha' j' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda} | \epsilon \pi \alpha j \rangle.$$

Инвариантный множитель $\langle \epsilon' \pi' \alpha' j' | \hat{\mathfrak{M}}_{\lambda} | \epsilon \pi \alpha j \rangle$ называется приведенным матричным элементом. Теорема Вигнера-Эккарта позволяет свести задачи вычисления вероятностей процессов, угловых распределений, поляризаций и т. д. к вычислению стандартных сумм произведений коэффициентов векторного сложения.

Все это делает аппарат квантовой теории углового момента универсальным и чрезвычайно удобным для проведения различных практических расчетов.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теория угловых моментов и неприводимых тензоров, по существу, является развитием классического векторного и тензорного исчисления. В настоящей главе приведены определения и основные соотношения векторного и тензорного исчисления, используемые в последующих главах. Подробное изложение этих вопросов имеется в книгах [11, 34, 35].

1.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ОРТЫ

В квантовой теории углового момента широко используются декартовы, сферические и циклические координаты.

1. Декартовы координаты

В декартовой системе координат положение точки в пространстве определяется заданием трех чисел x, y, z , т. е. трех расстояний до координатных плоскостей (рис. 1.1). Радиус-вектор данной точки r может быть записан в виде

$$r = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

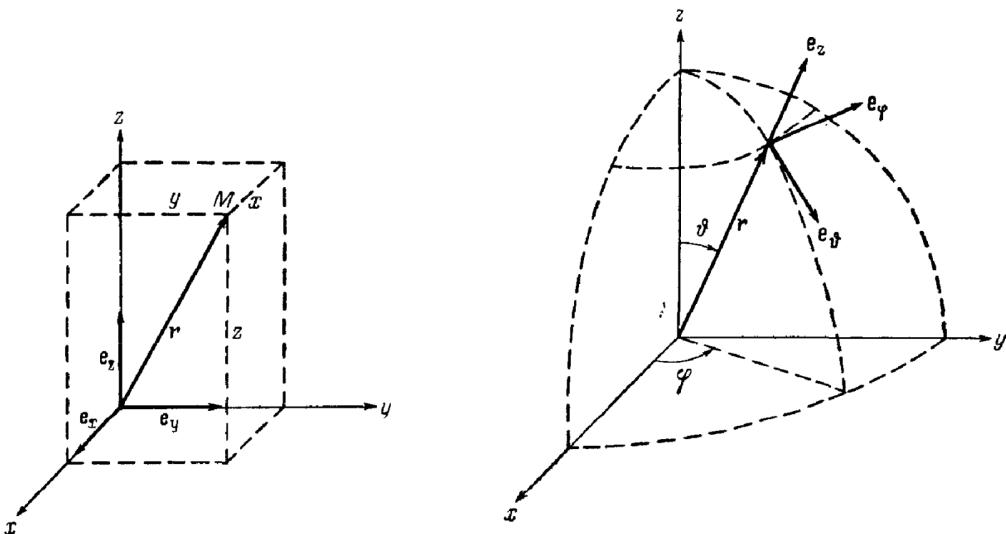


Рис. 1.1. Декартова система координат.

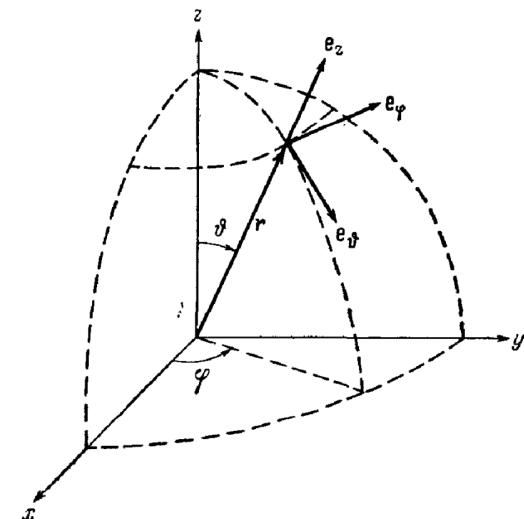


Рис. 1.2. Сферическая система координат.

Ковариантные декартовы орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ образуют вещественный ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad (i, k = x, y, z), \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i, \quad (i = x, y, z). \quad (3)$$

Контравариантные декартовы орты \mathbf{e}^i ($i = x, y, z$) совпадают с ковариантными

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В дальнейшем будет использоваться только *правая система координат*. В правой системе координат

$$[\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k] = \epsilon_{ikl} \mathbf{e}_l, \quad (i, k, l = x, y, z), \quad (5)$$

$$\epsilon_{ikl} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_l. \quad (6)$$

В развернутой записи

$$[\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_x, \quad [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_y. \quad (7)$$

2. Сферические координаты

В сферической системе координат положение точки в пространстве определяется величинами r, ϑ, φ , где r — длина радиуса-вектора, ϑ — полярный угол, φ — азимутальный угол (рис. 1.2). Углы ϑ и φ называются *сферическими углами* вектора \mathbf{r} . Декартовы и сферические координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & 0 &\leq r < \infty, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & \vartheta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & 0 &\leq \vartheta \leq \pi, \\ z &= r \cos \vartheta, & \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left(\tan \varphi = \frac{y}{x} \right), & 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Радиус-вектор \mathbf{r} записывается в виде

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (9)$$

Ковариантные сферические орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ изображены на рис. 1.2. Они образуют вещественный ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = r, \vartheta, \varphi), \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_\alpha^* = \mathbf{e}_\alpha, \quad (\alpha = r, \vartheta, \varphi). \quad (11)$$

Контравариантные сферические орты $\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\vartheta, \mathbf{e}^\varphi$ совпадают с ковариантными

$$\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha \quad (\alpha = r, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ образуют правую систему

$$[\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\vartheta] = \mathbf{e}_\varphi, \quad [\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi] = \mathbf{e}_r, \quad [\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r] = \mathbf{e}_\vartheta. \quad (13)$$

Сферические орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta$ и \mathbf{e}_φ в отличие от декартовых ортов зависят от углов ϑ, φ , что необходимо учитывать при дифференцировании векторов.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\vartheta, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_r \sin \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (14)$$

Действие оператора ∇ (см. 1.3) на сферические орты дается формулами

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_r) = \frac{2}{r}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{e}_\vartheta) = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (\nabla \cdot \mathbf{e}_\varphi) = 0, \quad (15)$$

$$[\nabla \times \mathbf{e}_r] = 0, \quad [\nabla \times \mathbf{e}_\vartheta] = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad [\nabla \times \mathbf{e}_\varphi] = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta. \quad (16)$$

3. Циклические координаты

В теории угловых моментов широко используются циклические координаты.

Ковариантные циклические координаты x_μ , где $\mu = \pm 1, 0$, определяются соотношениями

$$x_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{i\varphi},$$

$$x_0 = z = r \cos \vartheta, \quad (17)$$

$$x_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \vartheta e^{-i\varphi}.$$

Контравариантные циклические координаты x^μ , где $\mu = \pm 1, 0$, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{-i\varphi}, \\ x^0 &= z = r \cos \theta, \\ x^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Связь между ковариантными и контравариантными циклическими координатами имеет вид

$$\begin{aligned} x^\mu &= (-1)^\mu x_{-\mu}, & x_\mu &= (-1)^\mu x^{-\mu}, & (\mu = \pm 1, 0). \\ x^\mu &= x_\mu^*, & x_\mu &= x^{\mu*}, \end{aligned} \quad (19)$$

Циклические ковариантные орты e_μ , где $\mu = \pm 1, 0$, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} e_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \\ e_0 &= e_z, \\ e_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y). \end{aligned} \quad (20)$$

Циклические контравариантные орты e^μ , где $\mu = \pm 1, 0$, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y), \\ e^0 &= e_z, \\ e^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y). \end{aligned} \quad (21)$$

Ковариантные и контравариантные циклические орты связаны между собой так:

$$\begin{aligned} e^\mu &= (-1)^\mu e_{-\mu}, & e_\mu &= (-1)^\mu e^{-\mu}, & (\mu = \pm 1, 0). \\ [e^\mu]_\sigma &= e_\mu e_\sigma^* = \delta_{\mu\sigma}, & e_\mu &= e^{\mu*}, \end{aligned} \quad (22)$$

Циклические орты образуют комплексный ортонормированный базис

$$e_\mu e^\nu = e_\mu e_\nu^* = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = \pm 1, 0). \quad (23)$$

Векторные произведения циклических ортов выражаются через коэффициенты Клебша—Гордана (см. гл. 8)

$$\begin{aligned} e_\mu \times e_\nu &= i\sqrt{2} C_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda, \\ e^\mu \times e^\nu &= -i\sqrt{2} C_{\mu\nu}^\lambda e^\lambda, \end{aligned} \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (24)$$

Эти же формулы можно записать в виде, аналогичном (5):

$$\begin{aligned} e_\mu \times e_\nu &= -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} e_\lambda, \\ e^\mu \times e^\nu &= i\epsilon_{\mu\nu\lambda} e^\lambda, \end{aligned} \quad (\mu, \nu, \lambda = \pm 1, 0), \quad (25)$$

где $\epsilon_{\mu\nu\lambda} = +1$, если индексы μ, ν, λ образуют четную циклическую перестановку из $+1, 0, -1$; $\epsilon_{\mu\nu\lambda} = -1$, когда индексы μ, ν, λ образуют нечетную перестановку из $+1, 0, -1$; и $\epsilon_{\mu\nu\lambda} = 0$, если хотя бы два индекса равны.

В развернутой записи

$$\begin{aligned} e_{+1} \times e_0 &= ie_{+1}, & e_0 \times e_{-1} &= ie_{-1}, & e_{+1} \times e_{-1} &= ie_0, \\ e^0 \times e^{+1} &= ie^{+1}, & e^{-1} \times e^0 &= ie^{-1}, & e^{-1} \times e^{+1} &= ie^0. \end{aligned} \quad (26)$$

Циклические ковариантные и контравариантные компоненты (см. 1.2) ортов e_μ и e^μ даются формулами

$$\begin{aligned} [e_\mu]_\sigma &= (-1)^\sigma \delta_{\sigma-\mu}, & [e_\mu]^\sigma &= \delta_{\sigma\mu}, \\ [e^\mu]_\sigma &= \delta_{\sigma\mu}, & [e^\mu]^\sigma &= (-1)^\sigma \delta_{\sigma-\mu}. \end{aligned} \quad (27)$$

4. Спиральные орты

Из сферических ортов e_r, e_θ, e_φ тоже можно образовать циклические комбинации

$$\begin{aligned} e'_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_\theta + ie_\varphi), & e'^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_\theta - ie_\varphi), \\ e'_0 &= e_r, & e'^0 &= e_r, \\ e'_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\theta - ie_\varphi), & e'^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\theta + ie_\varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Орты e'_μ ($\mu = \pm 1, 0$) будем называть *ковариантными спиральными ортами*, а орты e'^μ ($\mu = \pm 1, 0$) — *контравариантными спиральными ортами* (терминология поясняется ниже в 6.3. 6).

Для спиральных ортов e'_μ и e'^μ справедливы те же формулы (22)–(26), что и для циклических ортов e_μ, e^μ .

5. Связь между различными ортами

a. Декартовы и сферические орты

$$\begin{aligned} e_x &= e_r \sin \vartheta \cos \varphi + e_\theta \cos \vartheta \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi, \\ e_y &= e_r \sin \vartheta \sin \varphi + e_\theta \cos \vartheta \sin \varphi + e_\varphi \cos \varphi, \\ e_z &= e_r \cos \vartheta - e_\theta \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (29)$$

Декартовы и циклические орты

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{-1} - e_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-1} - e^{+1}), \\ e_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{-1} + e_{+1}) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{-1} + e^{+1}), \\ e_z &= e_0 = e^0. \end{aligned} \quad (30)$$

Декартовы и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} e_x &= -e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) + e'_0 \sin \vartheta \cos \varphi + e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi), \\ e_y &= -e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) + e'_0 \sin \vartheta \sin \varphi + e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi), \\ e_z &= e'_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta + e'_0 \cos \vartheta - e'_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

Декартовы и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} e_x &= -e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) + e'^0 \sin \vartheta \cos \varphi + e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi), \\ e_y &= -e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) + e'^0 \sin \vartheta \sin \varphi + e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi), \\ e_z &= e'^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta + e'^0 \cos \vartheta - e'^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (32)$$

б. Сферические и декартовы орты

$$\begin{aligned} e_r &= e_x \sin \vartheta \cos \varphi + e_y \sin \vartheta \sin \varphi + e_z \cos \vartheta, \\ e_\theta &= e_x \cos \vartheta \cos \varphi + e_y \cos \vartheta \sin \varphi - e_z \sin \vartheta, \\ e_\varphi &= -e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Сферические и циклические ковариантные орты

$$e_r = -e_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} + e_0 \cos \vartheta + e_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi},$$

$$\begin{aligned} e_\theta &= -e_{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} - e_0 \sin \vartheta + e_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi}, \\ e_\varphi &= e_{+1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + e_{-1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (34)$$

Сферические и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned} e_r &= -e^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} + e^0 \cos \vartheta + e^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \\ e_\theta &= -e^{+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} - e^0 \sin \vartheta + e^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi}, \\ e_\varphi &= -e^{+1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - e^{-1} \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Сферические и спиральные орты

$$\begin{aligned} e_r &= e'_0 = e'^0, \\ e_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e'_{-1} - e'_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e'^{-1} - e'^{+1}), \\ e_\varphi &= \frac{i}{\sqrt{2}} (e'_{-1} + e'_{+1}) = -\frac{i}{\sqrt{2}} (e'^{-1} + e'^{+1}). \end{aligned} \quad (36)$$

в. Циклические и декартовы орты

$$\begin{aligned} e_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (e_x + ie_y), \quad e^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (e_x - ie_y), \\ e_0 &= e_z, \quad e^0 = e_z, \\ e_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x - ie_y), \quad e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x + ie_y). \end{aligned} \quad (37)$$

Циклические ковариантные и сферические орты

$$\begin{aligned} e_{+1} &= -e_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} - e_\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} - e_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ e_0 &= e_r \cos \vartheta - e_\theta \sin \vartheta, \\ e_{-1} &= e_r \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} + e_\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} - e_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (38)$$

Циклические контравариантные и сферические орты

$$\begin{aligned} e^{+1} &= -e_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{-i\varphi} - e_\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{-i\varphi} + e_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ e^0 &= e_r \cos \vartheta - e_\theta \sin \vartheta, \\ e^{-1} &= e_r \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta e^{i\varphi} + e_\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{i\varphi} + e_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (39)$$

Циклические ковариантные и контравариантные орты

$$\begin{aligned} e_{+1} &= -e^{-1}, \quad e^{+1} = -e_{-1}, \\ e_0 &= e^0, \quad e^0 = e_0, \\ e_{-1} &= -e^{+1}, \quad e^{-1} = -e_{+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Циклические ковариантные и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} e_{+1} &= e'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - e'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + e'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ e_0 &= e'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + e'_0 \cos \vartheta - e'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathbf{e}_{-1} = \mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}.$$

Циклические контравариантные и спиральные ковариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{+1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}'_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'_0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}^{-1} &= -\mathbf{e}'_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (42)$$

Циклические ковариантные и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{+1} &= -\mathbf{e}'^{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} - \mathbf{e}'^{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}'^{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'^0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'^{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}_{-1} &= -\mathbf{e}'^{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'^{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (43)$$

Циклические контравариантные и спиральные контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{+1} &= \mathbf{e}'^{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}'^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}'^{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}'^{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}'^0 \cos \vartheta - \mathbf{e}'^{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}^{-1} &= \mathbf{e}'^{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'^0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}'^{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (44)$$

Формулы (41)–(44) могут быть записаны в компактном виде с помощью *D*-функций Вигнера (см. гл. 4)..

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mu &= \sum_v D_{-v-\mu}^1(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_v = \sum_v (-1)^v D_{v-\mu}^1(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'^v, \\ \mathbf{e}^\mu &= (-1)^\mu \sum_v D_{-v\mu}^1(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'_v = \sum_v (-1)^{\mu+v} D_{v\mu}^1(0, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}'^v, \\ &(\mu, v = \pm 1, 0). \end{aligned} \quad (45)$$

г. Спиральные ковариантные и декартовы орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) - \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) + \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) - \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (46)$$

Спиральные контравариантные и декартовы орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^{+1} &= -\mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi) - \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}'^0 &= \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}'^{-1} &= \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi) + \mathbf{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi) - \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (47)$$

Сpirальные и сферические орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi), \quad \mathbf{e}'_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi), \\ \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}'^0 = \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\varphi), \quad \mathbf{e}'_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi). \end{aligned} \quad (48)$$

Сpirальные ковариантные и циклические ковариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (49)$$

Сpirальные контравариантные и циклические ковариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}'^0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (50)$$

Сpirальные ковариантные и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} - \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (51)$$

Сpirальные контравариантные и циклические контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} + \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}'^0 &= -\mathbf{e}_{+1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos \vartheta + \mathbf{e}_{-1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= \mathbf{e}_{+1} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} e^{i\varphi} - \mathbf{e}_0 \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}_{-1} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (52)$$

[Формулы (49)–(52) могут быть записаны в компактном виде с помощью D -функций Вигнера (см. гл. 4).]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_\mu &= \sum_v D_{v\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}_v = \sum_v (-1)^v D_{-v\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}^v, \\ \mathbf{e}'^\mu &= \sum_v (-1)^\mu D_{v-\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}_v = \sum_v (-1)^{\mu+v} D_{-v-\mu}^1(\varphi, \vartheta, 0) \mathbf{e}^v, \end{aligned} \quad (53)$$

$(\mu, v = \pm 1, 0).$

Сpirальные ковариантные и контравариантные орты

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{+1} &= -\mathbf{e}'_{-1}, \quad \mathbf{e}'_{-1} = -\mathbf{e}'_{+1}, \\ \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}'^0, \quad \mathbf{e}'^0 = \mathbf{e}'_0, \\ \mathbf{e}'_{-1} &= -\mathbf{e}'_{+1}, \quad \mathbf{e}'_{+1} = -\mathbf{e}'_{-1}. \end{aligned} \quad (54)$$

1. 2. ВЕКТОРЫ, ТЕНЗОРЫ

Векторами и тензорами называются величины, компоненты которых определенным образом преобразуются при поворотах системы координат. Закон преобразования декартовых компонент векторов и тензоров рассмотрен ниже в 1.4 (формулы (46)–(51)), закон преобразования циклических компонент векторов и неприводимых тензоров обсуждается в гл. 3.

1. Компоненты векторов

Всякий вектор может быть разложен по базисным ортам, т. е. представлен в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha}. \quad (1)$$

Величины A_{α} называются *ковариантными компонентами* вектора, а A^{α} — *контравариантными компонентами*.

$$A_{\alpha} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}, \quad A^{\alpha} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^{\alpha}. \quad (2)$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A^x \mathbf{e}_x + A^y \mathbf{e}_y + A^z \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Ковариантные декартовы компоненты векторов не отличаются от контравариантных.

В сферических координатах

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + A_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = A^r \mathbf{e}_r + A^{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + A^{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (4)$$

Ковариантные сферические компоненты векторов не отличаются от контравариантных.

В циклических координатах

$$\mathbf{A} = A^{+1} \mathbf{e}_{+1} + A^0 \mathbf{e}_0 + A^{-1} \mathbf{e}_{-1} = A_{+1} \mathbf{e}^{+1} + A_0 \mathbf{e}^0 + A_{-1} \mathbf{e}^{-1}. \quad (5)$$

Ковариантные и контравариантные циклические компоненты векторов связаны соотношениями

$$A_{\mu} = (-1)^{\mu} A^{-\mu}, \quad A^{\mu} = (-1)^{\mu} A_{-\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (6)$$

Если \mathbf{A} — вещественный вектор, т. е. $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, то

$$A_{\mu}^* = A^{\mu}, \quad A^{\mu*} = A_{\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (7)$$

Если \mathbf{A} — комплексный вектор, то

$$A_{\mu}^* = (A^*)^{\mu}, \quad A^{\mu*} = (A^*)_{\mu}, \quad (\mu = \pm 1, 0). \quad (8)$$

Разложение вещественного вектора \mathbf{A} по циклическим ортам

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}^{\mu} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu}^* \mathbf{e}^{\mu*} = \sum_{\mu} A^{\mu*} \mathbf{e}_{\mu}^* = \\ &= \sum_{\mu} A_{\mu} \mathbf{e}_{\mu}^* = \sum_{\mu} A_{\mu}^* \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} A^{\mu} \mathbf{e}^{\mu*} = \sum_{\mu} A^{\mu*} \mathbf{e}^{\mu} = \\ &= \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{-\mu} \mathbf{e}_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A^{-\mu} \mathbf{e}^{\mu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Разложение произвольного вектора \mathbf{A} по спиральным ортам

$$\mathbf{A} = A'^{+1} \mathbf{e}'_{+1} + A'^0 \mathbf{e}'_0 + A'^{-1} \mathbf{e}'_{-1} = A'_{+1} \mathbf{e}'^{+1} + A'_{+0} \mathbf{e}'^0 + A'_{-1} \mathbf{e}'^{-1}. \quad (10)$$

Для спиральных компонент векторов справедливы те же формулы (6)–(9), что и для циклических.

Связь между компонентами векторов в различных системах координат такая же, как связь между соответствующими ортами. Она дается формулами 1.1(29)–1.1(54), в которых следует произвести замену $\mathbf{e}_{\alpha} \rightarrow A_{\alpha}$ и $\mathbf{e}^{\alpha} \rightarrow A^{\alpha}$. В частности,

$$\begin{aligned} A_{+1} &= -A^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y), \quad A_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{-1} - A_{+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^{-1} - A^{+1}), \\ A_0 &= A^0 = A_z, \quad A_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (A_{-1} + A_{+1}) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (A^{-1} + A^{+1}), \\ A_{-1} &= -A^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y), \quad A_z = A_0 = A^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Матричная форма записи соотношений между декартовыми, циклическими контравариантными и сферическими компонентами векторов дана в табл. 1.1 и 1.2.

ТАВЛИЦА 1.1
МАТРИЧНАЯ ФОРМА СВЯЗИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ВЕКТОРОВ

Декартовы координаты	Циклические координаты	Сферические координаты
$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ Связь с циклическими компонентами	$\mathbf{A} = A^{+1} \mathbf{e}_{+1} + A^0 \mathbf{e}_0 + A^{-1} \mathbf{e}_{-1}$ Связь с декартовыми компонентами	$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ Связь с декартовыми компонентами
$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = M(x, y, z \leftarrow +1, 0, -1) \begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ Связь со сферическими компонентами	$\begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix} = M(+1, 0, -1 \leftarrow x, y, z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ Связь со сферическими компонентами	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow x, y, z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ Связь с циклическими компонентами
$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = M(x, y, z \leftarrow r, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$ Связь с декартовыми компонентами	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = M(+1, 0, -1 \leftarrow r, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ Связь с циклическими компонентами	$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow +1, 0, -1) \begin{pmatrix} A^{+1} \\ A^0 \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ Связь с сферическими компонентами

ТАВЛИЦА 1.2
МАТРИЦЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ДЕКАРТОВЫ, ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОНТРАВАРИАНТНЫЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРОВ

$M(x, y, z \leftarrow +1, 0, -1)$	$M(+1, 0, -1 \leftarrow x, y, z)$
$+1 \quad 0 \quad -1$	$x \quad y \quad z$
$x \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$+1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$
$y \quad z$	
$M(x, y, z \leftarrow r, \vartheta, \varphi)$	$M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow x, y, z)$
$r \quad \vartheta \quad \varphi$	$x \quad y \quad z$
$x \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$	$r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$
$y \quad z$	
$M(+1, 0, -1 \leftarrow r, \vartheta, \varphi)$	$M(r, \vartheta, \varphi \leftarrow +1, 0, -1)$
$r \quad \vartheta \quad \varphi$	$+1 \quad 0 \quad -1$
$+1 \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & -\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$r \begin{pmatrix} -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & \cos \vartheta & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ -\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\sin \vartheta & \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$
$0 \quad -1$	
-1	