

Д. Гильберт

Основания геометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д11 **Д. Гильберт**
Основания геометрии / Д. Гильберт – М.: Книга по Требованию, 2024. –
184 с.

ISBN 978-5-458-27057-1

Книга Д. Гильберта, одного из самых выдающихся современных математиков, "Grundlagen der Geometrie", перевод которой сейчас предлагается русским читателям, представляет собой выдающееся явление в мировой литературе. Первое издание ее, вышедшее в 1899 г., было восторженно встречено математическим миром и дало ни с чем несравнимый могучий толчок исследованиям об основах геометрии. Не будет преувеличено, если мы скажем, что едва ли после 1899 года вышла хотя бы одна работа по этому вопросу, которая в той или иной степени не опиралась бы на работы Гильберта.

ISBN 978-5-458-27057-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

СОДЕРЖАНИЕ.

Стр.

От Евклида до Гильберта. Вступительная статья А. В. Васильева	VII- XXII
--	-----------

Основания геометрии. Д. Гильберт.

Введение	
--------------------	--

Глава I. Пять групп аксиом.

§ 1. Элементы геометрии и пять групп аксиом	2
§ 2. Группа аксиом I: аксиомы сочетания	3
§ 3. Группа аксиом II: аксиомы порядка	4
§ 4. Следствия из аксиом сочетания и порядка	5
§ 5. Группа аксиом III: аксиомы конгруэнтности	9
§ 6. Следствия из аксиом конгруэнтности	11
§ 7. Группа аксиом IV: аксиома параллельности	18
§ 8. Группа аксиом V: аксиомы непрерывности	20

Глава II. Взаимная непротиворечивость и независимость аксиом.

§ 9. Взаимная непротиворечивость аксиом	22
§ 10. Независимость аксиомы параллельности (не-евклидова геометрия)	24
§ 11. Независимость аксиом конгруэнтности	25
§ 12. Независимость аксиом непрерывности V (не-архимедова геометрия)	27

Глава III. Учение о пропорциях.

§ 13. Комплексные системы чисел	31
§ 14. Доказательство теоремы Паскаля	33
§ 15. Исчисление отрезков, основанное на теореме Паскаля	40
§ 16. Пропорции и теоремы о подобии	44
§ 17. Уравнения прямых и плоскостей	46

Глава IV. Учение о площадях в плоскости.

§ 18. Равносоставленность и равновеликость многоугольников	50
§ 19. Параллелограммы и треугольники с равными основаниями и высотами	52
§ 20. Мера площади для треугольников и многоугольников	54
§ 21. Равновеликость и мера площади	57

Глава V. Теорема Дезарга.

	Стр
§ 22. Теорема Дезарга и ее доказательство для плоскости с помощью аксиом конгруэнтности	61
§ 23. Недоказуемость теоремы Дезарга в плоскости без помощи аксиом конгруэнтности	63
§ 24. Введение исчисления отрезков без помощи аксиом конгруэнтности на основе теоремы Дезарга	68
§ 25. Коммутативный и ассоциативный закон сложения в новом исчислении отрезков	70
§ 26. Ассоциативный закон умножения и оба дистрибутивных закона в новом исчислении отрезков	71
§ 27. Уравнение прямой на основе нового исчисления отрезков	76
§ 28. Совокупность отрезков, рассматриваемая как комплексная числовая система	80
§ 29. Построение пространственной геометрии с помощью Дезарговой числовой системы	81
§ 30. Значение теоремы Дезарга	83

Глава VI. Теорема Паскаля.

§ 31. Две теоремы о доказуемости теоремы Паскаля	85
§ 32. Коммутативный закон умножения в архимедовой числовой системе	86
§ 33. Коммутативный закон умножения в не-архимедовой числовой системе	89
§ 34. Доказательство обеих теорем о теореме Паскаля (не-паскалева геометрия)	90
§ 35. Доказательство любой теоремы о точках пересечения с помощью теорем Дезарга и Паскаля	91

Глава VII. Геометрические построения на основе аксиом I—IV.

§ 36. Геометрические построения с помощью линейки и эталона длины	93
§ 37. Аналитическое представление координат точек, которые могут быть построены	96
§ 38. Представление алгебраических чисел и целых рациональных функций в виде суммы квадратов	98
§ 39. Критерий выполнимости геометрических построений с помощью линейки и эталона длины	100

Заключение	104
----------------------	-----

Отчет о работах Гильберта, представленных в 1903 г. Казанскому Физико-Матем. Обществу на соискание международной премии имени Лобачевского.—А. Пуанкаре	105
---	-----

Примечания	137
----------------------	-----

От редактора.

Книга Д. Гильберта, одного из самых выдающихся современных математиков, „Grundlagen der Geometrie“, перевод которой сейчас предлагается русским читателям, представляет собой выдающееся явление в мировой литературе. Первое издание ее, вышедшее в 1899 г., было восторженно встречено математическим миром и дало ни с чем несравнимый могучий толчок исследованиям об основах геометрии *). Не будет преувеличено, если мы скажем, что едва ли после 1899 года вышла хотя бы одна работа по этому вопросу, которая в той или иной степени не опиралась бы на работы Гильберта.

Кроме этой основной работы Гильберт написал еще несколько статей об основах геометрии, арифметики и логики, которые собраны в качестве приложений в немецком издании. Мы не даем перевода этих приложений, так как они по большей части слишком трудны для неспециалистов и не имеют, разумеется, того широкого интереса, как его *Festschrift* **). С содержанием главнейших из этих статей читатель познакомится по отчету А. Пуанкаре, написанному им для Казанского Физико-Математического Общества по поводу представления работ Гильберта на соискание международной премии имени Лобачевского ***). Этот отчет,

*) Последующие издания вышли в 1903, 1909, 1913 и в 1922 гг. В 1900 и 1902 гг. появились переводы на французском и английском языках.

**) Вот перечень этих работ: I. Прямая линия, как кратчайшее расстояние между двумя точками. II. Теорема о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике. III. Новое обоснование геометрии Болиаи-Лобачевского. IV. Об основаниях геометрии. V. О поверхностях постоянной Гауссовой кривизны. VI. Понятие о числе (русский перевод этого приложения, сделанный мною, помещен в сборнике „Об основаниях арифметики“, изданном Казанским студенческим физико-математическим кружком). VII. Об основаниях логики и арифметики.

**) Как известно, премия была присуждена Гильберту в 1903 г.

VIII

который может служить блестящим комментарием к Гильберту, мы приложили к предлагаемому переводу Grundlagen.

Выяснению места работы Гильберта среди других работ об обоснованиях геометрии мы посвятили нашу вступительную статью—„От Евклида до Гильберта“.

За почти четверть века, которая прошла с момента выхода в свет первого издания Grundlagen появилось, большое количество статей, посвященных вопросам, затронутым в работе Гильберта. Эти критические исследования внесли некоторые частичные поправки и дополнения к работе Гильберта. Большинство из них приняты были Гильбертом во внимание в последующих изданиях. Тем не менее многие из таких поправок и дополнений только указаны в подлиннике, а некоторые и вовсе не отразились даже на последнем 5-ом немецком издании (1922-го года).

Поэтому мы сочли полезным дать примечания, в которых эти поправки рассмотрены более подробно. В этих же примечаниях читатель найдет пояснения к более трудным местам Grundlagen. Примечания к русскому изданию составлены О. А. Вольбергом.

Все примечания подлинника помещены в качестве подстрочных и отмечены звездочками [*), *)]. Примечания к русскому переводу отмечены цифрами [¹), ²)], и помещены в конце книги.

Разумеется перевод сделан без всяких отступлений от подлинника, если не считать исправления нескольких явных опечаток, оговоренных, впрочем, в примечаниях.

Пользуюсь случаем принести благодарность О. А. Вольбергу и А. А. Чебышеву-Дмитриеву за ценную помощь, оказанную ими при издании книги.

А. В.

От Евклида до Гильберта.

(Вступительная статья).

А. В. Васильева.

В течение двух тысячелетий „Начала“ Евклида считались неподражаемым образцом научного изложения. Из небольшого числа первоначальных понятий и основных положений (аксиом и постулатов) развивается путем логической дедукции ряд теорем, выражающих собою свойства и отношения геометрических фигур и тел.

Для основоположников современного математического естествознания, для Леонарда-да-Винчи, для Кеплера, для Галилея изложение Евклида являлось недостижимым образцом точности (*certezza*), математические символы и фигуры, изучаемые в „Началах“, — иероглифами, которыми написаны законы природы. По образцу „Начал“ не только Спиноза писал *Этику more geometrico*, но и великий основатель классической и небесной механики изложил в „Математических началах естественной философии“ на подобие теорем синтетической геометрии результаты, выведенные им с помощью метода флюксий. Для Канта аксиомы Евклидовой геометрии суть синтетические априорные суждения, и так как мы не можем представить себе пространства, в котором эти аксиомы не имели бы места, то не только пространство есть трансцендентная, независящая от опыта форма чистого зрения, но и аксиомы геометрии Евклида имеют такое же трансцендентное происхождение. Таков исходный пункт „Критики чистого разума“, имевшей такое влияние на философию XIX века.

До сих пор изучение Евклида является, по нашему мнению, необходимым для всякого преподавателя геометрии, который желает сделать из изучения этой науки школу логического мышления. В Англии, в Италии до последнего времени первые книги Евклида с небольшими изменениями являются учебниками геометрии.

Такое громадное значение творения одного из великих греческих геометров Александрийского периода объясняется тем, что Евклид построил здание геометрии на основаниях, заложенных трудами нескольких поколений греческих мыслителей, математиков и философов. Восточные цивилизации (Египетская, Вавилонская, Индийская, Эгейская) накопили для целей землемерия и архитектуры, для измерения полей в долине Нила, для постройки алтарей и дворцов в долинах Ганга и Евфрата многочисленные геометрические факты и правила, но только греческому гению удалось создать из них науку геометрии.

Едва ли когда-нибудь из разрозненных сведений, дошедших до нас в греческой математической и философской литературе, удастся воссоздать историю греческой геометрии до Евклида *). Достоверным можно считать, однако, то значение, которое имела в этой истории та философская греческая школа, которая искала гармонию мира и в свойствах целых чисел и в свойствах правильных многогранников. Французский историк математики Поль Таннери считает несомненным, что в Пифагорейской школе уже была сделана и первая попытка создать систему геометрии в сочинении, носившем название „Предание по Пифагору“. Несомненно такое влияние Пифагорейской школы и на творца атомистической гипотезы Демокрита, которого можно считать изобретателем метода неделимых, и на Платона, диалоги которого придают такое значение геометрии („геометрия есть учение о вечном“) и в школе которого была разработана теория конических сечений.

*) В настоящее время наилучшими источниками для истории геометрии до Евклида могут служить следующие книги: C. A. Bretschneider, — *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*. Leipz. Teubner 1870 г.; — M. Cantor, — *Geschichte der Mathematik*. Leipzig, Teubner, 3-te Auflage, Bd. I. 1907 г.; — P. Tannery, — *Mémoires Scientifiques*. Vol. I et II. Paris 1912. G. Loria, — *Le Scienze esatte nell'antica Grecia*. II ed. Milano. Hoepli 1914.

Диалектическая борьба теорий единого и многого, возникавшая, повидимому, в Пифагорейской школе, направила философскую мысль греков уже в пятом веке на те вопросы об отношении между прерывным и непрерывным, конечным и бесконечным, которые возникли снова в XVII и XVIII веках, в связи с открытием анализа бесконечно-малых, и в последнее время приобрели такое значение в философии математики, благодаря гениальным идеям Георга Кантора. Доказательством той глубины мысли, которою отличались воззрения греков на эти вопросы, служат знаменитые апории Зенона. Но в то же время та же диалектическая борьба не могла не повести и к тому критицизму по отношению ко всем отвлечениям, представителем которого явился Протагор. Апории Зенона, нападки на математиков Протагора и способствовали той строгости и точности понятий и выводов, которая отличает и Начала Евклида, и сочинения других великих геометров Александрийского периода, Архимеда и Аполлония.

О жизни Евклида дошли до нас только скудные сведения. В историческом отрывке, сохранившемся в сочинении одного из комментаторов Евклида — Прокла (410—485 по Р. Х.), мы узнаем об Евклиде, что он был моложе учеников Платона, но старше и Архимеда и Эратосфена. (Отсюда можно заключить, что „акме“—расцвет деятельности Евклида—относится к 305—283 г. до Р. Х., к времени царствования Птолемея I). Из того же отрывка мы узнаем, что Евклид по своим философским воззрениям принадлежал к школе Платона, что он составил „Начала“, собрал в одно целое многое, принадлежащее Евдоксу Книдскому, закончил начатое Фезтетом и дал „неоспоримые доказательства тому, что было недостаточно точно доказано его предшественниками“.

Если в общем Начала Евклида представляют образец глубоко продуманного и выдержанного сочинения, то изучение их обнаружило в них и крупные недостатки. Одним из них является то, что Евклид во многих доказательствах обращается к интуиции или пользуется понятиями, неформулированными в основных определениях и положениях. Так, например, уже в первом предложении первой книги Евклид допускает почерпнутое из интуиции предположение.

что две окружности пересекаются всегда в точке, — предположение, как мы теперь знаем, связанное с вопросом о непрерывности линий. В четвертом предложении той же книги он прибегает к движению для доказательства равенства треугольников. К интуиции он обращается и тогда, когда вводит понятие о точке, лежащей между двумя точками на прямой, и не считает нужным давать какие-либо указания относительно расположения фигур в плоскости. Другим недостатком является формулировка определений и основных положений*). Так, напр., формулировки определения точки, прямой, плоскости, положения о равенстве совмещающихся фигур не отличаются ни ясностью, ни определенностью.

Таковы некоторые „пятна“ в бессмертном творении Александрийского ученого. Многие из „пятен“ открылись критическому уму математиков только в XIX столетии. Но некоторые из них обратили на себя внимание и великих греческих геометров, работавших непосредственно после Евклида (Архимеда, Аполлония, Эратосфена, Птолемея), и первых его комментаторов.

Так, Архимед в своем сочинении „О сфере и цилиндре“ считает нужным для теории измерения площадей и объемов определить прямую линию, как кратчайшее расстояние между двумя точками, и выставить новый постулат, существенное значение которого уяснено только в XIX столетии. Этот постулат Архимеда сформулирован им в следующих словах**): „из двух неравных линий, двух неравных поверхностей или двух неравных тел большая величина может оказаться меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз“.

*) Необходимо, впрочем, отметить, что многие из недостатков объясняются, может быть, неточностью дошедших до нас переводов и копий греческого первоначального текста. Наилучшие издания Евклида в настоящее время суть: 1. L. Heiberg, — *Euclidis Opera omnia*, Leipzig, Teubner 1883—1888 (7 томов) и английское издание Heath'a (Cambridge University Press. 1908) в трех томах, снабженное комментариями. На русский язык „Начала“ Евклида были переведены в 1739, 1769 и 1789 гг. и затем в 1819 и 1835 гг. Петрушевским. Новейший перевод принадлежит проф. Ващенко-Захарченко в 1880 г. (в нем отсутствуют 7, 8 и 9 книги).

***) Постулат этот был, повидному, употребляем еще Евдоксом Книдским.

Знаменитый астроном Птолемей основывал свое доказательство постулата о параллельных прямых, заменяя его другим, по которому если две прямые параллельны в одном направлении, то они параллельны и в другом.

Сочинения, посвященные истолкованию „Начал“ Евклида, появились чрезвычайно рано. Так, уже во втором столетии до Р. Х. появились комментарии Геминуса Родосского. К сожалению, ни комментарии Геминуса, ни комментарии Герона Александрийского, Паппуса, Теона, Симилиция или вовсе не дошли до нас, или дошли в виде отрывков в передаче Прокла и Анариция *). В сочинении Прокла, жившего в пятом столетии по Р. Х., изложены попытки греческих геометров или доказать постулат о параллельных линиях на основании других аксиом или заменить его иным более очевидным. Попытки строгого обоснования теории параллельных линий продолжались и далее. Важнейшие и наиболее интересные из них принадлежат арабскому геометру Насир-Эддину, английскому ученому Валлису, занимавшему в Оксфордском университете кафедру „Евклида“, иезуиту Саккери, который в замечательном сочинении „Евклид очищенный от всякого пятна“ указал на возможность трех допущений, названных им гипотезами острого, прямого и тупого угла, французскому математику Лежандру — автору первого сочинения, в котором основы геометрии изложены по плану, отличному от Начал Евклида **). Но ко всем

*) Лучшее издание Прокла принадлежит Фридлейну (G. Friedlein—Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii Leipzig. 1873). Анариций — арабский геометр Абуль Аббас an Nairizi. Латинский перевод его комментариев найден лишь в 1896 г. в библиотеке Краковского университета профессором Курце и издан в виде дополнения к изданию „Начал“ Гейбегга. (Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii edidit M. Curtze. Leipzig. 1899).

**) Знакомство с различными построениями теории параллельных линий чрезвычайно полезно и даже необходимо для преподавателей геометрии в средней школе. Как источники для этого знакомства можно указать: сочинение академика В. Я. Буняковского „Параллельные линии“ (1853 г.), статью Зонке о параллельных линиях в „Allgemeine Encyclopedie der Wissenschaften und Künste“, Ersch'a и Grubera (Dritte sektion elfter Teil, s. 368. Leipzig 1838) и, наконец, прекрасное сочинение Штекеля и Энгеля „Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss“. Leipzig, 1895.

попыткам обоснования теории параллельных линий, известным Лобачевскому, он приложил слова: „из всех этих доказательств можно некоторые назвать остроумными, но все вообще ложными, недостаточными в своих основаниях и без должной строгости в суждении“. Он и сам, как можно заключить из записи лекций по геометрии, читанных им в период от 1815 до 1817 г., пытался дать различные способы для ее обоснования; но уже в 1823 году в учебнике геометрии, представленном им для напечатания на казенный счет в виде „классической книги“, он становится на другую точку зрения и заявляет, что „все до сих пор данные доказательства не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими“ *). Через три года в заседании Физико-математического отделения 12 февраля 1826 года Лобачевский дал уже ту систему, построенную на положении, противоречащем постулату Евклида, которая обессмертила его имя.

Славу открытия неевклидовой геометрии с Лобачевским разделяют Гаусс, который еще в 1799 году (письмо к Вольфгангу Болиау) усомнился в истинности Евклидовой геометрии, нашел некоторые результаты неевклидовой геометрии, но не опубликовал своих открытий „крика ради боогийцев“, и Иоганн Болиау, венгерский офицер, который к сочинению своего отца в 1833 г. присоединил „Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве“.

Построение геометрии, независимой от постулату Евклида, имело прежде всего тот результат, что вызвало критическое отношение к тем основаниям, на которых была построена геометрия Евклида. Попытки такой критики мы находим и ранее Гаусса и Лобачевского **), но с открытием

*) Подробнее см. мою статью: Отношение Лобачевского к теории параллельных линий (приложение к переводу книги Вонола „не евклидова Геометрия“, перевод проф. А. Р. Кулишера). Учебник Лобачевского издан Казанским Физико-математическим Обществом в 1910 г. В приложении помещены относящиеся к теории параллельных линий выдержки из лекций 1815—1817 гг. См. также мою биографию Лобачевского (Русский биографический словарь).

**) Так еще в XVI веке философ Петр Рамус, энергичный враг схоластики, жертва Варфоломеевской ночи, выступил с резкою критикой