Л. М. Чичагов

Ручная математическая энциклопедия

Книга 5. Теории дифференциального и интегрального исчислений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л. М. Чичагов
Л11 Ручная математическая энциклопедия: Книга 5. Теории дифференциального и интегрального исчислений / Л. М. Чичагов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 330 с.

ISBN 978-5-458-53296-9

ISBN 978-5-458-53296-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНІЕ.

I. Ежели изъ двухъ *перемѣнныхъ* количествъ величина одного зависитъ отъ величины другаго; то первое называется *функціею* втораго, именуемаго *перемѣннымъ независимымъ*. Такъ въ уравненіяхъ $y=\sqrt{(a+bx)}$, $y=a^x$, $y=snx$, и пр. количество y есть функція независимаго перемѣннаго x.

II. Въ приложенныхъ примѣрахъ зависимость y отъ x опредѣлена: но при общемъ разсматриваніи свойствъ функцій на опредѣленность зависимости между функціею и независимымъ перемѣннымъ не обращаютъ вниманія; тогда для изображенія функціи въ неопредѣленномъ видѣ употребляютъ буквы F, f, ф, φ, ψ, и пр. Такъ выраженія

$y=F(x)$, $y=f(x)$, и пр. показываютъ, что y есть функція x; притомъ различныя *характеристики* F, f, и пр. означаютъ различные способы соединенія перемѣннаго x съ количествами постоянными, изображаемыми всегда первыми буквами Латинскаго алфавита: a, b, c, ...

III. Функціи раздѣляются на *Алгебраическія* и *Трансцендентныя*: въ первыхъ перемѣнныя количества никогда не бываютъ показателями степеней, вторыя же суть функціи логариѳмическія и содержащія количества угло-линейныя.

IV. Ежели функція z зависитъ отъ многихъ перемѣнныхъ y, x, v; то въ неопредѣленномъ видѣ изображаютъ ее такимъ образомъ: $z=F(y, x, v)$. — Ежели z, есть функція количества y, которое само зависитъ отъ x, т. е. ежели $z=F(y)$, $y=f(x)$, то будетъ $z=F(fx)$, или z будетъ *функція функціи*.

V. Ежели независимое перемѣнное получитъ прямое или обратное приращенiе Δx, то и функцiя увеличится или уменьшится количествомъ Δy, также прямымъ или обратнымъ; такъ что изъ

$$y = \mathrm{F}(x)$$

получаемъ

$$y + \Delta y = \mathrm{F}(x + \Delta x),$$

отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x} \ldots (1).$$

VI. Когда приращенiе Δx есть количество *безконечно малое*, или количество, которое можетъ уменьшаться произвольно, никогда непревращаясь въ *нуль*, или количество, которое можетъ быть менѣе всякаго даннаго; тогда и приращенiе Δy будетъ количество безконечно малое (Алг. стр. 144): ибо при $\Delta x = o$, также $\Delta y = o$. Такiя приращенiя независимаго перемѣннаго и функцiи называются ихъ *диффеpенціалами*, и изображаются буквою ∂, поставляемою предъ x и y: такъ ∂x и ∂y суть дифференціалы количествъ x и y.

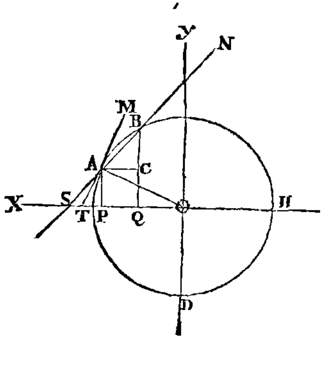
VII. Пусть будетъ $x^2 = r^2 - y^2$, гдѣ r есть количество постоянное; ежели x и y получатъ приращенія Δx, Δy, то по урав. (1) выйдетъ

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{2y + \Delta y}{2x + \Delta x} \ldots, (2).$$

Когда приращенія Δx, Δy будутъ уменьшаться, тогда ихъ отношеніе станетъ приближаться къ $-\frac{y}{x}$, такъ что $-\frac{y}{x}$ есть предѣлъ отношенія приращеній. Но если вмѣсто Δx, Δy поставимъ дифференціалы ∂x, ∂y, и въ дроби $-\frac{2y + \partial y}{2x + \partial x}$ сіи дифференціалы уничтожимъ; то получимъ

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x} \ldots (3)$$

дифференціальное отношеніе *нетогное*, поелику отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ достигаетъ своего предѣла только при $\Delta x = o$, $\Delta y = o$. Посредствомъ таковыхъ дифференціальныхъ отношеній можно съ величайшею удобностью разрѣшать многосложнѣйшіе вопросы Геометрическіе и вообще Физико-Математическіе: *для полученія результатовъ тогныхъ надобно только изклюгать отношеніе* $\frac{\partial x}{\partial y}$ *или* $\frac{\partial y}{\partial x}$.



Ежели въ кругѣ BHD за начало координатъ примемъ центръ O; то OP и OQ будутъ абсциссы, PA и BQ соотвѣтствующія имъ ординаты, AC и BC приращенія абсциссы и ординаты. Проведши пересѣкающую SABN, составимъ подобные тр—ки SPA, ACB, въ которыхъ

$$\frac{SP}{AP}=\frac{AC}{BC}, \text{ или } SP=\frac{\Delta x}{\Delta y}\cdot y.$$

Уменьшая приращенія Δx, Δy, будемъ приближать точку B къ A, отъ чего *подъ-пересѣкающая* SP станетъ приближаться къ *подъ-касательной* TP: сдѣлавши $\Delta x=o$, $\Delta y=o$, составимъ точное уравненіе

$$TP=\frac{o}{o}\cdot y,$$

которое своею неопредѣленностью показываетъ, что оно выражаетъ подъ-касательную не одного круга, но и всякой кривой линеи: потому что въ предыдущемъ разсужденіи никакимъ условіемъ не было означено, что точки A и B находятся на окружности (Алг. стр. 143). Но если проведемъ радіусъ $AO = r$, то изъ прямоугольнаго тр—ка PAO получимъ уравненіе

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

отличающее кругъ отъ прочихъ кривыхъ линей. Составивши изъ него уравненіе (2), найдемъ, что для разсматриваемаго вопроса неопредѣленное выраженіе

$$\frac{0}{0} = -\frac{y}{x},$$

и потому подъ-касательная круга будетъ

$$TP = -\frac{y^2}{x}.$$

Таковъ есть прямой и точный способъ опредѣлять подъ — касательныя не только въ кругѣ, но и во всѣхъ кривыхъ линеяхъ.

Помощію дифференціальныхъ отношеній разрѣшается сей вопросъ такимъ образомъ: перемѣнивши Δx, Δy на ∂x, ∂y, получимъ сперва неточное выраженіе подъ—касательной

$$TP = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot y;$$

Когда же посредствомъ уравненія (3) изключимъ $\frac{\partial x}{\partial y}$, тогда для точной величины подъ—касательной получимъ опять

$$TP = -\frac{y^2}{x} \; (*).$$

(*) Ученіе о дифференціальныхъ отношеніяхъ изобрѣтено *Лейбницемъ*, разпространено *Бернулліями*, приведено въ систему *Маркизомъ Лопиталемъ*. Въ послѣдствіи *Нютонъ* хотѣлъ замѣнить его *теоріею флюксій*

По причинѣ простоты вопроса, оба рѣшенія равно незатруднительны; но въ другихъ изысканіяхъ, особенно Физико - Математическихъ, дифференціальныя отношенія способствуютъ разрѣшать съ величайшею удобностью вопросы, неприступные для прямыхъ способовъ.

VIII. Правила для нахожденія дифференціаловъ, или дифференці-

---

и *послѣдними отношеніями; Даламбертъ — способомъ предѣловъ; Ейлеръ количествами изчезающими; Лагранжъ — производными функціями;* наконецъ *Шубертъ* предпринималъ исправить Теорію Лагранжа. Сіи покушенія суть памятники высокихъ дарованій и глубочайшихъ соображеній великихъ Геометровъ; но превосходство навсегда останется на сторонѣ способа Лейбница, который можно назвать *способомъ вознагражденія погрѣшностей.* См. соч. Карно: *sur la Métaphysique du calcul infinitésimale.*

альныхъ отношеній между приращеніями функціи и перемѣннаго независимаго составляютъ *Дифференціальное Изчисленіе;* способы же обратные, т. е. способы для опредѣленія функцій по ихъ дифференціаламъ, или дифференціальнымъ отношеніямъ предлагаются въ *Интегральномъ Изчисленіи.* И такъ Теорія сихъ *Высшихъ Изчисленій* должна содержать два отдѣленія:

I. Теорія Дифференціальнаго Изчисленія.

II. Теорія Интегральнаго Изчисленія.