

Я.И. Перельман

**Практические занятия по
геометрии**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Я11

Я11 **Я.И. Перельман**
Практические занятия по геометрии / Я.И. Перельман – М.: Книга по Требованию, 2013. – 176 с.

ISBN 978-5-458-28260-4

Очень многие жители нашей страны полюбили математику именно благодаря книгам Я.А. Перельмана [Перельман Я.А.]. Его труды всегда отличаются занимательностью и четкостью изложения, глубиной знания предмета. Книги Перельмана [Книга Перельмана] пользуются неизменной популярностью. Издание «Практические занятия по геометрии» создавалось с целью добиться более глубокого усвоения фактического материала школьной геометрии [Материал школьной геометрии]. По мнению автора, для того, чтобы школьники глубже усваивали теорию, необходимо постоянно изыскивать новые способы и средства. В учебном пособии Я.А. Перельмана в качестве такого средства предлагаются упражнения в решении задач с реальным содержанием. Естественно, что для глубокого знания геометрии [Геометрия] необходимо решать большое количество задач, и содержание задач тоже играет свою роль. Автор дает подробные практические указания относительно того, из каких областей может быть почерпнут материал для геометрических задач, как его следует обрабатывать. Учебник Перельмана [Книга Перельмана], можно сказать, представляет собой ответ на вопрос, поставленный в 1-й главе книги: как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? Знание свойств геометрических фигур [Свойство геометрических фигур] с успехом применимо к разрешению многочисленных и разнообразных задач, возникающих в повседневной жизни. Когда учащиеся убедятся в этом, тогда изучение геометрии приобретет живой интерес для всех, а не только для особо одаренных, учеников, и тогда дети не будут считать изучение геометрии абстрактным, не имеющим смысла занятием. В учебнике предложены геометрические задачи из обиходной жизни, из техники и сельского хозяйства, из географии и земледелия [Земледелие], из мироздания, живой природы, физики и особые задачи. Все задачи систематизированы по соответствующим разделам, приводятся необходимые справочные сведения.

ISBN 978-5-458-28260-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Метрическая система мер.

Метр (= 40-миллионной доле окружности земного шара) = 10 дециметрам = 100 сантиметрам = 1000 миллиметрам.

Километр = 1000 метров = 0,94 версты.

Грамм = весу 1 кубического сантиметра чистой воды.

Килограмм = 1000 граммов = 2,44 фунта. Тона = 1000 килограммов.

Литр = 1 кубич. дециметру (= 0,081 ведра = 0,038 гарнца).

Таблица перевода мер.

метры	дюймы	футы	сажени	аршины	вершки
1	39,4	3,28	0,49	1,41	22,5
0,025	1	0,083	0,012	0,036	0,57
0,304	12	1	0,143	0,429	6,86
2,13	84	7	1	3	48
0,71	28	2,333	0,333	1	16
0,044	1,75	0,146	0,0208	0,0625	1

Сокращенные обозначения.

метр	— <i>м</i>	миллиметр	— <i>мм</i>	миллиграмм	— <i>мг</i>
километр	— <i>км</i>	грамм	— <i>г</i>	тонна	— <i>т</i>
сантиметр	— <i>см</i>	килограмм	— <i>кг</i>	литр	— <i>л</i>

(точка после сокращенного обозначения не ставится).

I.

Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным?

Если проследить за тем, какие геометрические навыки выносятся из школы большинством людей, то всего чаще результаты получатся весьма плачевные.

Подведите к дереву ученика, недавно с успехом выдержавшего экзамен из геометрии, и предложите ему измерить его высоту. Почти наверное можно сказать, что он не найдет, как это сделать, хотя у него в десять раз больше геометрических познаний, чем требуется, чтобы решить эту задачу чуть не десятью различными способами. Он без затруднения решает замысловатые задачи „на построение“ и „на вычисление“, — но только тогда, когда все данные заботливо указаны и самый род задачи известен заранее („на подобие треугольников“). Если же данные приходится избирать самому и никто не сообщает, к какому отделу геометрии задача относится, — наш геометр беспомощен.

Спросите человека, проходившего геометрию, какое бревно будет тяжеле, — то, которое втрое

длиннее данного, или то, которое втрое толще данного? В лучшем случае вы услышите, что оба бревна должны весить одинаково. Большинство же уверено, что длинное тонкое бревно тяжелее короткого толстого¹⁾. Правильный ответ, что толстое втрое тяжелее, — вы услышите очень редко, даже если опрашиваемые помнят формулу объема цилиндра.

Предложите вопрос: сколько весит вода в игрушечном ведерке, которое вдесятеро ниже настоящего, вмещающего 30 фунтов воды? Ответы будут в десять и в сто раз больше истинного; а ваше утверждение, что вода в ведерке должна весить всего около 1 лота, будет выслушано с недоверием.

Спросите, какой ширины радуга, и вы узнаете, что она представляется большинству „в одну, в полторы сажени“...

Вопрос, сколько могло весить одно яблоко из тех, что сшибли с ног Гулливера в стране великанов, где линейные протяжения всех предметов в 12 раз больше нормальных, — останется без ответа, а ваше утверждение, что каждое яблоко могло весить пудов 6—8, будет горячо оспорено (см. № 132).

¹⁾ При покупке дров бревнами и продавцы, и покупатели склонны до курьеза переоценивать объем длинных бревен; продавцы запрашивают за них несоответственно высокие цены, а покупатели предпочитают именно такие бревна, хотя толстые короткие бревна большего объема охотно уступаются по дешевой цене. Такое же неумение правильно сравнивать объемы тел можно заметить и в расценке яиц, арбузов и т. п.: крупные яйца и арбузы всегда расцениваются — и продавцом, и покупателями — относительно дешевле мелких. Изучение геометрии в школе обычно не изменяет этих курьезных геометрических заблуждений. (См. зад. №№ 13 и 15).

Спросите, какой стакан с кипятком должен остыть раньше, большой или маленький — и вы убедитесь, что редко кто догадывается подойти к этой задаче геометрически (см. зад. № 72).

Даже и в научных сочинениях приходится встречать грубые геометрические промахи. В одном руководстве для исследований по гигиене, составленном видным автором, читаем следующее наставление к пользованию мерной лентой: „Деления ленты начинаются не от самого начала ее, а отступя некоторый промежуток для того, чтобы можно было удобнее и крепче взять ленту рукой. Так, на наших рулетках полевая точка находится на расстоянии 8 и более сантиметров от края ленты; следовательно, если это упустить из виду, то на это число и произойдет ошибка, которая при квадратном измерении составит 64 кв. сантиметра, а при кубическом — 512 кв. см“. Автор не подозревает, что ошибка будет гораздо больше и что он, — откинув те части площади и объема, которые надо было принять в расчет прежде всего, — учел именно то, чем можно было вовсе пренебречь. Если в академической среде возможны такие ошибки, то чего ожидать от прочих людей? ¹⁾).

Чем же объяснить такую печальную геометрическую беспомощность, неумение применить к делу приобретенные в школе геометрические познания? Почему школьная геометрия остается без заметного влияния на умственный обиход и практические навыки людей, ее изучавших?

¹⁾ О геометрических ошибках у Пушкина и Гоголя — см. далее, задачи №№ 130 и 131.

Объяснение, думается мне, следует искать в особенностях учебного материала математики и в психологии заучивания. Успешное усвоение всякого учебного предмета предполагает:

- 1) отчетливое понимание его содержания;
- 2) прочное закрепление его в памяти.

Первое, понимание, возможно лишь при сосредоточении внимания учащегося на предмете, т.е. при наличии живого к нему интереса. Второе, запоминание, обеспечивается ассоциациями учебного материала с возможно большим числом представлений из других областей знания и жизни.

Причина особой „трудности“ геометрии для большинства учащихся и быстрого ее забвения по оставлении школы кроется в том, что при обучении математике как раз отсутствуют оба указанные условия успешного усвоения: преподавание обычно ведется так, что у учащихся не поддерживается живой интерес к предмету и не создается прочных и разнородных ассоциаций изучаемого материала с остальными элементами их умственного инвентаря.

Какой, в самом деле, интерес может представлять для учащегося изучение геометрии? Прежде всего, ему непонятна цель изучения этого предмета. Перебирая возможные цели преподавания школьной геометрии, мы должны, конечно, исключить такие отвлеченные и непонятные ученику цели, как развитие пространственной интуиции и воспитание логического мышления: цели эти могут ставиться учителем, но для ученика являются лишь результатом изучения геометрии, а не ясно сознаваемой целью. Третья цель — познание свойств геометрических фигур — могла бы служить для уча-

щегося одушевляющим изучение стимулом только в том случае, если бы он ощущал надобность в знании этих свойств. Само же по себе изучение свойств воображаемых фигур, заведомо не существующих в реальной действительности, не может большинству учащихся казаться нужной и осмысленной работой. До тех пор пока в глазах ученика единственное применение свойств геометрических фигур состоит лишь в том, что помощью их выводятся другие геометрические свойства, которые в свою очередь служат для обоснования новых — нельзя ожидать, чтобы такая неуловимая, уходящая в бесконечность цель могла поддерживать интерес к изучению предмета.

Другое дело, когда учащиеся почти на каждом шагу убеждаются, что знание свойств геометрических фигур с успехом применимо к разрешению многочисленных и разнообразных задач, возникающих в действительной жизни — в обиходе, в технике, в естествознании. Тогда, и только тогда, изучение геометрии с первых же уроков приобретает живой интерес для учеников, — при том для всех, а не только для наиболее одаренных одинок. И если желательно, чтобы прохождение геометрии не было в глазах учащихся бесцельным занятием, лишенным смысла и интереса, необходимо поставить обучение так, чтобы ученик приучался широко и уверенно распоряжаться приобретаемыми геометрическими знаниями для решения разнообразных реальных задач. Он должен чувствовать, что геометрия снабжает его применимыми к жизни сведениями, вооружает могущественным орудием познания действительности.

Все признают, что только с решения задач, т.-е. с самостоятельных упражнений, начинается подлинное усвоение математической дисциплины; до этого момента изучение является лишь ознакомлением с учебным материалом. Но те геометрические задачи и упражнения, которым обычно уделяется в школе довольно много внимания, совершенно недостаточны, чтобы помочь ученикам овладеть учебным материалом до степени свободного распоряжения своими знаниями для практических целей, потому что в них почти нацело отсутствуют элементы, связывающие учебник с жизнью и создающие прочные ассоциации изучаемого материала с реальной действительностью. Ученик не упражняется прилагать формальные геометрические отношения к конкретным объектам. Мысль работает исключительно в мире абстрактных пространственных образов и утрачивает всякую связь с той реальной действительностью, от которой эти образы абстрагированы ¹⁾. Замыкая геометрический

¹⁾ До чего доходит пренебрежение элементом реальности даже в хороших учебниках геометрии, видно из следующего характерного примера. В числе полудюжины задач с реальным содержанием, включенных в „Элементы геометрии“ Филиппса и Фишера, находим три задачи такого рода:

„Некто имеет 323,25 кв. м земли в форме равностороннего треугольника. Каждому из своих трех сыновей он дал три наибольшие равные круга земли, которые можно получить в данном треугольнике; каждой из трех дочерей — угловые участки, отрезанные кругами; трем внукам — участки, заключенные между сторонами и двумя кругами; себе оставил центральный участок между тремя кругами. Найти долю каждого“.

Конечно, авторы хорошо знают, что участков такого затейливого фасона никто, находясь в здравом уме, не выкраивает. Но в геометрическом задачнике подобные нелепости считаются вполне допустимыми.

кругозор ученика пределами „чистой“ геометрии, школа приучает его решать только такие задачи, которые искусственно очищены от реального содержания и препарированы в виде обнаженной геометрической схемы. Производить же самостоятельно подобные умственные операции, уметь нащупывать геометрический скелет реальной проблемы — школа ученика не приучает. Естественно, что он не приобретает навыка усматривать геометрические отношения в реальной жизненной обстановке, переводить конкретные задачи на геометрический язык. Давно известно, что правильно формулировать задачу — значит наполовину решить ее, но этой-то первой половины решения всякой конкретной задачи никак не сможет найти учащийся, не подготовленный к тому систематическим упражнением. Благодаря такому направлению в обучении, получается то, что геометрические сведения учащегося ассоциируются не с реальными объектами, а лишь с определенными страницами учебной книги. Такое знание, сохраняющее свежесть только в стенах школы, быстро утрачивается, едва их обладатель вступает в действительный мир, столь мало похожий на искусственную классную обстановку ¹⁾).

¹⁾ В связи с этим надо поставить и то не случайное обстоятельство, что арифметические навыки давно успели проникнуть из школы в жизнь, а геометрические, гораздо более древние, не идут далее школьных стен. Современный средний человек, прошедший элементарную школу, выполняет счетные операции несравненно толковее и проворнее, чем его предок эпохи средних веков и начала нового времени; он уже не откладывает производства деления многозначных чисел до праздничного дня, когда на ярмарке в ближайшем городе можно будет обратиться к услугам странствующего „магистра деления“. Между тем, в геометрии современный обыватель мало ушел

Нередко высказывается мнение, что преподавание одного только теоретического курса геометрии при строгой постановке должно дать такое развитие уму учащегося, при котором решение реальных геометрических задач не может составить для него никаких затруднений. Но это убеждение совершенно иллюзорно. Как недостаточно знать устройство велосипеда, чтобы уметь на нем кататься, а надо еще особо учиться ездить, так одно знание геометрических отношений не дает умения ими пользоваться в реальной обстановке, если не было упражнения в их применении. И мы наблюдаем на каждом шагу, что поразительное отсутствие реального геометрического чутья, продолжительной геометрической изобретательности прекрасно уживается с наличием достаточно отчетливых теоретических познаний. Все, кто давал себе труд испытать, умеют ли ученики, сильные в школьной геометрии, разрешать задачи практического характера, единодушно подтверждают их полную беспомощность в этом отношении. Характерен отзыв об этом проф. П. А. Некрасова (кажется, бывшего попечителя Московского учебного округа) в докладе на съезде преподавателей Московского округа в 1899 г.:

вперед по сравнению с глубокой древностью; сельские жители еще и теперь определяют площади прямоугольных участков буквально с теми же ошибками, какие были обычны в древнем Египте и в средневековой Европе. Причина большей популярности арифметических навыков по сравнению с геометрическими лежит, думается, в том, что школьная арифметика не так строго замыкалась в мир формальных отношений, как геометрия. Сборники арифметических задач всегда упражняли силы учащегося не только на абстрактном, но также и на конкретном — пусть не всегда удачно подобранном — материале.