М.Я. Выгодский

Основы исчисления бесконечно-малых

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М.Я. Выгодский
М11 Основы исчисления бесконечно-малых / М.Я. Выгодский – М.: Книга по Требованию, 2024. – 464 с.

ISBN 978-5-458-26018-3

Издание 3-е дополненное и исправленное.

ISBN 978-5-458-26018-3

которые, не изгоняя теории, стремятся учесть потребности практики. Основным их недостатком является отсутствие органической связи между теорией и практикой. Учащийся знакомится с тем, как применяется теория к решению практических задач, но он не видит, как эта теория возникает из практики. Приложимость математических методов к конкретной действительности получает в глазах учащегося случайный характер, и это затрудняет ему возможность сформулировать конкретную задачу на математическом языке.

Происходит это потому, что основные понятия высшей математики раскрываются перед учащимся сразу в их наиболее развитой форме, в той форме, которая явилась продуктом длительного исторического и логического развития. Понятно, чем вызывается стремление преподнести учащемуся основные понятия в этой их форме: она является более совершенной, имеет бо́льшее поле применения и логически безупречнее.

Классическая форма этих понятий не имеет этих преимуществ, но она имеет другие; она, хотя и в грубой форме, вскрывает те реальные отношения, из которых заимствованы основные понятия высшей математики; и именно поэтому, знакомясь с ней, учащийся сразу видит, *почему математика приложима к действительности.*

Пример, который я приведу, пояснит эти общие положения. Спросите инженера или физика, пользуется ли он на практике тем диференциалом, который он изучал в курсе математики. Вы получите, вероятно, ответ, что его диференциал — это не главная часть приращения функции, а практически ничтожное изменение исследуемой величины. Почему он применяет к „своему" диференциалу те операции, которые были установлены для „математического" диференциала, — на этот вопрос лишь немногие дадут ответ, и тогда они скажут вам, какие усилия они затратили, чтобы понять эту связь; для большинства же этот вопрос так и остался неясным: теория — сама по себе, практика — сама по себе. И кто знает, сколько есть у нас инженеров, питающих к высшей математике чувство почтения и... страха.

Не вина инженера, если автор учебника, по которому учился инженер математике, не счел возможным показать, что в математике диференциал появился впервые именно в той форме, в которой он служит инженеру в повседневной его практике. А это нужно показать, не смущаясь тем, что при этом не достигается строгость изложения. Но строгость придет позднее, на последующем концентре обучения. И, скажу больше, только тогда и будет понятно, зачем нужна эта строгость и почему основные понятия на более высокой ступени развития выступают в форме, по внешности не похожей на первоначальную. Таким образом органическая связь теории с практикой может быть достигнута лишь тогда, когда основные понятия теории даются не в их готовом виде, не в их застывшем бытии, а в их развитии.

В этом и состоит основная мысль, из которой я исходил при построении книги и которая отличает эту книгу от всех других курсов анализа: я стараюсь раскрыть перед учащимся основные понятия высшей математики в той грубой форме, в которой сразу обнаруживается живая их связь с конкретными процессами природы.

В дальнейшем учащийся должен знакомиться с более абстрактными определениями. С этой высшей точки зрения он взглянет на пройденный ранее путь и осмыслит, почему, несмотря на грубость прежних методов, они дают строгие результаты. Он увидит, каковы границы применимости этих старых методов, и, что особенно важно, он сознательно отнесется к применению новых методов, потому что он поймет, зачем они нужны, чему служит тяжеловесная артиллерия „эпсилонов и дельт", из которой учащегося заставляют стрелять по воробьям.

Я думаю, что изложенная выше установка, определяющая лицо этой книги, является правильной с точки зрения методологии марксизма-ленинизма.

С первого взгляда может, однако, показаться, что эта точка зрения не согласуется с одним из принципиальных высказываний Маркса. Я имею в виду известное место третьей главы „Введения к критике политической экономии". Маркс в ней говорит так о методе политической экономии:

„Казалось бы наиболее правильным начинать с реального и конкретного, с действительных предпосылок, следовательно, например, в политической экономии с населения, которое является основой и субъектом всего общественного производства. Но при ближайшем рассмотрении это оказывается ошибочным. Население — это абстракция, если я упускаю из вида классы, из которых оно состоит. Эти классы опять-таки — пустой звук, если я не знаю элементов, на которых они покоятся, например наемный труд, капитал и т. д.... Если бы я таким образом начал с населения, то я дал бы хаотическое представление о целом, и только путем более частичных определений я аналитически подошел бы к все более и более простым понятиям: от конкретного, данного в представлении, к все более и более тощим абстракциям, пока не достиг бы простейших определений. И тогда я должен был бы пуститься в обратный путь, пока снова не подошел бы к населению, но уже не как к хаотическому представлению о целом, а как к богатой совокупности, с многочисленными определениями и отношениями. Экономисты XVII столетия, например, всегда начинают с живого целого, с населения, государства, нескольких государств и т. д., но они всегда заканчивают тем, что путем анализа выделяют некоторые определяющие общие отношения, как разделение труда, деньги, стоимость и т. д.

Как только эти отдельные моменты были более или менее абстрагированы и зафиксированы, экономические системы стали восходить от простейшего, как труд, разделение труда, потребность, меновая стоимость, — к государству, международному обмену и мировому рынку. Последний метод, очевидно, является правильным в научном отношении".

Легко видеть, что лишь в кажущемся противоречии находится здесь приведенная мысль Маркса с изложенной выше моей точкой зрения на метод преподавания анализа. В самом деле, Маркс оговаривает, что последний из двух методов изложения является правильным в научном отношении. Исторически люди шли обратным путем, и только поэтому, как это показывает Маркс, оказалось возможным абстрагировать и зафиксировать общие отношения науки.

Но будет ли правильным строить начальный учебник так, как строится научный труд? И не будет ли тогда казаться учащемуся, что общие понятия и отношения науки свалились с неба? Вопрос этот нужно решать для каждой отдельной дисциплины. В отношении высшей математики к отрицательному ответу на первый вопрос я пришел впервые после многолетних неудачных попыток популяризировать основные ее понятия на современной научной базе. Затем мне стала ясна и причина этих неудач: вследствие специфического характера математики от ее „наиболее тощих абстракций" до ее конкретизации „с многочисленными определениями и отношениями" ведет длинный путь, на котором легко теряется перспектива движения; по этому пути гораздо легче пойти после того, как вскрыты те реальные отношения, из которых заимствованы основные понятия высшей математики. А эти реальные отношения вскрываются как раз в той классической форме, в которой диференциал рассматривается как ничтожно малое изменение величины (а не как главная часть приращения функции). Из рассмотрения этих реальных отношений становится понятным, почему над диференциалом производят определенные математические операции (в частности пренебрегают высшими степенями диференциала), почему, несмотря на противоречия с правилами арифметики, этот метод применяется к естествознанию и технике.

Интересно, что как раз по вопросу о диференциале мы имеем очень подробно развитое рассуждение Энгельса, который подчеркивает, что математические свойства бесконечно-малых (в частности диференциала) могут быть поняты только из действительности, а не из самой математики. Этому вопросу посвящено большое примечание к „Анти-Дюрингу", — „О прообразах математического бесконечного в действительном мире" (Маркс и Энгельс, т. XIV, стр. 343—348).

„Согласно господствующим теперь в физике и химии взглядам, — говорит Энгельс, — земные массы, тела, служащие объектом механики, состоят из молекул, из мельчайших частиц, которые нельзя делить дальше, не уничтожая физического и химического тожества рассматриваемого тела. Согласно вычислениям В. Томсона диаметр наименьшей из молекул не может быть менее одной пятидесятимиллионной доли миллиметра. Допустим также, что наибольшая молекула имеет диаметр в одну двадцатипятимиллионную долю миллиметра. В таком случае это все еще ничтожномалая величина по сравнению с теми массами, которыми оперируют механика, физика и даже химия. Между тем она обладает всеми присущими данной массе свойствами; она может замещать в физическом и химическом отношении эту массу и действительно замещает ее во всех химических уравнениях. Короче говоря, она обладает по отношению к соответствующей массе теми же свойствами, какими обладает математический диференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае диференциала в математической абстракции кажется нам таинственным и непонятным[1]), здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным.

Природа оперирует этими диференциалами-молекулами точно так же и по точно таким законам, как математика оперирует своими абстрактными диференциалами. Так, например, диференциал от x^3 будет $3x^2\,dx$, причем мы пренебрегаем $3x\,dx^2$ и dx^3".

Дальше Энгельс конкретизирует процесс диференцирования функции x^3 на примере возрастания объема куба. Я могу не цитировать этого места, ограничившись указанием, что на стр. 146 моей книги читатель найдет аналогичное рассуждение, проведенное на примере роста квадрата.

В конце цитируемого примечания Энгельс обращает внимание на то, что, лишь исходя из конкретных прообразов бесконечности, могут быть поняты операции математики бесконечного:

---

[1]) Энгельс имеет в виду, как ясно из последующего, операцию пренебрежения бесконечно-малыми высшего порядка.

„Математическая бесконечность заимствована из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому она может быть объяснена только из действительности, а не из самой себя, не из математической абстракции“.

Этим стремлением объяснить из действительности „таинственные и непонятные“ операции исчисления бесконечно-малых и проникнута моя книга.

Это стремление отнюдь не отрицает, а, напротив, чрезвычайно облегчает обратный путь, которым, по Марксу, должна строиться всякая наука: путь, правильный в научном отношении.

Как известно, сам Маркс пошел по этому пути, предприняв работу по научному обоснованию анализа. К сожалению, эта работа еще не опубликована. О содержании математических рукописей Маркса мы пока знаем сравнительно немного: это то, что содержится в двух письмах Энгельса к Марксу (от 18/VIII 1881 г. и от 21/XI 1882 г.), опубликованных недавно в XXIV томе сочинений Маркса и Энгельса (стр. 531—532 и 589—590). Из них, однако, видно, что Маркс предлагает новый метод построения анализа, начиная от его простейших понятий. Энгельс восторженно отзывается о методе Маркса и особенным преимуществом этого метода считает то, „что здесь доказано, что обычный метод с опущением dx, dy и т. д. положительно неправилен“.

Может показаться, что Энгельс здесь противоречит самому себе, но после всего вышесказанного ясно, что противоречия здесь нет никакого: в предисловии к „Анти-Дюрингу“ Энгельс говорит о том, как понятие диференциала выкристаллизовывается из его „действительных предпосылок“; здесь же, очевидно, речь идет о том, каким является диференциал в научной системе, восходящей от простейших абстракций к богатой конкретной совокупности.

Рассмотрим один простой пример, разъясняющий дело и одновременно способствующий выяснению точки зрения, положенной в основу этой книги. С точки зрения современной физики обычное представление о прямолинейном распространении света „положительно неправильно“. Мы знаем, что пучок света огибает экран, размеры которого имеют порядок малости длины световой волны. Тем не менее мы знакомимся со световыми явлениями, начиная с представления о прямолинейном распространении света. На нем основаны, например, элементарное учение о тенях и вся геометрическая оптика. Правильно ли было бы с самого начала изучения физики предлагать учащемуся стать на высшую точку зрения? Далеко ли он мог бы пойти с ней на этой первой стадии обучения? И не следовало ли бы тогда начинать с электромагнитной теории света, а может быть и с квантовой механики?

Мы видим, что подчас нужно, прежде чем итти по правильному в научном отношении пути, проделать педагогически известные исторические этапы, являющиеся с высшей точки зрения „положительно неправильными“: „Познание, притязающее на безусловную истину, осуществляется в ряде относительных заблуждений“, — говорит Энгельс в „Анти-Дюринге“.

Всякую мысль можно довести до абсурда; можно, как делают некоторые, заключить, что с изложенной точки зрения следовало бы начинать изучение химии с теории флогистона. Эта демагогическая аргументация упускает из виду, что теории флогистона нет места в современной науке и что ни в одной химической лаборатории с теорией флогистона нечего делать. Геометрическая оптика, напротив, остается относительно истинной в очень широких пределах, и на ней основывается ряд научных и технических построений.

Так же дело обстоит и с классической концепцией диференциала. В свете современного научного обоснования она „положительно неправильна". Но в очень широких пределах (можно указать, в каких именно) она остается относительно истинной. Опираясь на многочисленные факты окружающей действительности, она, как и геометрическая оптика, не обладает полной достоверностью, но зато свойства диференциала становятся „сами собою разумеющимися и, так сказать, очевидными".

Из изложенной выше установки вытекают следующие особенности этой книги:

1) Конкретные задачи составляют органическую часть курса. Они служат не только приложением теории, но и источником постановки теоретических вопросов.

2) Основные понятия анализа выступают в их развитии. Это значит, что на первом этапе изучения я ввожу основные понятия анализа в их грубой форме, в которой они заимствуются из изучения простейших фактов естествознания и техники. Таким образом я отказываюсь от традиции основывать изложение на теории пределов. Теории пределов должно быть уделено должное место там, где она действительно необходима не только как формализующий аппарат, но и как база для развития новых — более сильных — методов. Эта книга охватывает лишь небольшой концентр сведений, и для большинства втузов материал, в ней содержащийся, недостаточен. Я надеюсь продолжить эту работу. При развертывании фактического материала, естественно, встает задача углубления теоретической базы.

3) Я отказываюсь от резкого разграничения анализа на диференциальное и интегральное исчисление. Обе операции анализа рассматриваются сначала как самостоятельные проблемы, затем устанавливается связь между ними, и в дальнейшем изучаются обе эти операции слитно.

4) Отправной точкой является не задача диференцирования, а задача интегрирования, так как при этом раскрывается сразу гораздо более широкое поле исследования конкретных вопросов. Именно поэтому задача интегрирования и исторически возникла прежде задачи диференцирования.

5) Я не избегаю постановки принципиальных вопросов, неразрывно связанных с излагаемым материалом. Центральным вопросом является конечно вопрос об отношении математических абстракций к действительности.

Это второе издание книги печатается стереотипно. Поэтому я не имел возможности внести в нее ряд существенных изменений, несмотря на то, что уже теперь я вижу ряд недочетов, которые я надеюсь исправить в следующем издании.

Важнейшим из них я считаю нечеткость и недостаточность ряда формулировок. В книге, например, не подчеркнута мысль, что высшая математика, математика переменных величин, имеет своим главным предметом количественную сторону движения, что она, говоря словами Энгельса, „относится к математике постоянных величин, как диалектическое мышление к метафизическому". Эту мысль легко иллюстрировать на многочисленных примерах, рассматриваемых в этой книге, но в явной форме это мною не сделано.

Точно так же недостаточно четко говорится о роли теории пределов. В предисловии к первому изданию я писал, что на первых этапах развития анализа она не порождает новых методов, а лишь оправдывает их. Однако читатель мог и не обратить внимания на выражение „на первых этапах", которое не было подчеркнуто, и истолковать это место, а также ряд других мест в тексте (стр. 5, 39, 156, 158 старого издания) как отрицание за теорией пределов действенной роли в математике. Этого я не хотел утверждать, но читатель, по моей вине, мог составить такое представление о моей точке зрения.

Можно было бы указать еще ряд примеров неточных формулировок, но я ограничусь этими двумя. По поводу второго из них я считаю, однако, необходимым еще раз подчеркнуть, что на первом этапе изучения анализа необходимо ознакомить учащегося с классической концепцией исчисления бесконечно-малых, менее строгой, но более простой. Я повторяю, что даже на высших ступенях математического исследования зачастую первая разведка проблемы делается методом бесконечно-малых, и лишь позднее, при уточненной разработке, вступает в силу метод пределов. Тем более необходимо дать учащемуся в руки этот мощный аппарат для овладения техническими проблемами, стоящими в центре его внимания. В процессе применения этого аппарата учащийся его оценит, поймет необходимость его усовершенствования и изучит с высшей точки зрения.

М. Выгодский.

Москва, 25 февраля 1932 г.

Глава I.

Основные понятия интегрального исчисления.

§ 1. Основной задачей элементарной геометрии, задачей, которой она обязана своим возникновением, является вычисление площадей, поверхностей и объемов. Но в рамках элементарной геометрии эта задача получает лишь ограниченное разрешение. Лишь для простейших тел и фигур объемы и площади могут быть получены средствами элементарной геометрии. Так, зная некоторые линейные величины (например, основание и высоту), мы можем найти площадь прямоугольника, параллелограма, треугольника, трапеции, многоугольника, круга.

Вообще, если площадь ограничена ломаной линией или отрезками прямой и дугами окружности, тогда, и только тогда, мы можем методами элементарной геометрии выразить ее через линейные размеры „абсолютно точно“ или по крайней мере с любой степенью точности (площадь s круга через его радиус r выражается формулой $s = \pi r^2$, где π есть число, которое можно найти с любой степенью точности).

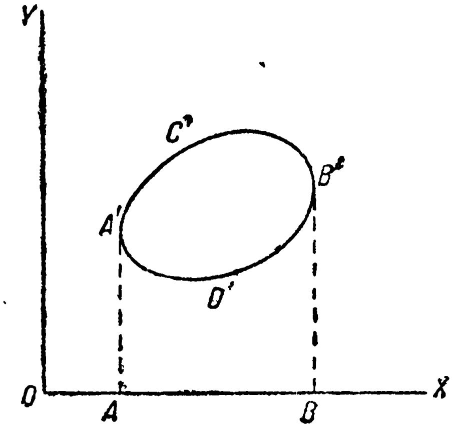
Интегральное исчисление возникло из потребности вычислять площади, поверхности и объемы произвольных тел и фигур. Его метод дает возможность, по крайней мере принципиальную, единообразными приемами разрешить задачу вычисления площади (или объема), как только задана линия, ее ограничивающая. К частным вопросам этот метод применялся еще древнегреческими математиками. Архимед (III в. до нашей эры) оставил нам ряд блестящих приложений его к ряду проблем геометрии и механики. Но лишь сравнительно недавно, в XVII—XVIII вв., метод интегрального исчисления (метод бесконечно-малых) был разработан систематически и был применен не только к сравнительно простой и частной задаче — определению площадей и объемов, но и к ряду других проблем. Этот метод стал основным методом всего математического естествознания и техники, и именно потребности техники и связанных с ней тесно теоретических дисциплин вызвали его к жизни.

Мы не можем излагать здесь историю развития метода интегрального исчисления, но в самом изложении считаем целесообразным начать с той проблемы, из которой возникло интегральное исчисление, и по мере возможности следовать, по крайней мере в общих чертах, историческому ходу развития его идей. Мы начнем с проблемы измерения площадей.

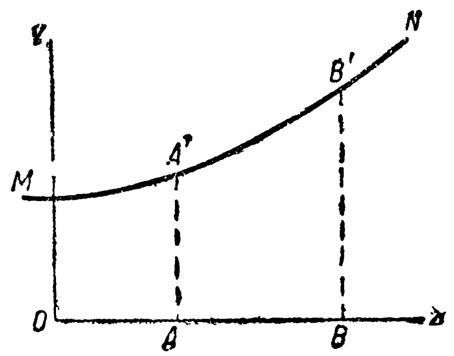
§ 2. Чтобы определить площадь какой-либо фигуры, нам прежде всего нужно знать, какой линией она ограничена. Эту линию — границу площади — можно задать чисто геометрически, указав геометрическое свойство, принадлежащее всем ее точкам. Но можно задать линию и „аналитически“, выбрав некоторую систему координат (скажем, прямоугольную) и задав уравнение, связывающее абсциссу и ординату любой точки линии.

Оба способа задания линии для каждой отдельной линии вполне эквивалентны, т. е. по данному геометрическому свойству линии мы всегда можем составить ее уравнение относительно некоторой системы координат и, обратно, из данного уравнения линии можно вывести все ее геометрические свойства.

Но аналитический способ задания линии вносит единообразие в решение всех геометрических задач. Вот почему, стремясь к возможно более общей постановке вопроса об измерении площади фигуры, мы будем считать, что площадь, которую мы хотим вычислить, ограничена такой линией или такими линиями, которые заданы нам своими *уравнениями в прямоугольной системе координат*.



Черт. 1.



Черт. 2.

§ 3. Если мы взглянем на черт. 1, то увидим, что для определения площади, ограниченной линией $A'C'B'D'$, отнесенной к произвольно выбранной системе координат XOY, мы можем воспользоваться таким простым приемом: из „крайних“ точек A' и B' нашей линии (т. е. из точек, имеющих наибольшую и наименьшую абсциссы) мы проведем ординаты $A'A$ и $B'B$. Тогда искомая площадь будет разностью площадей $A'C'B'BA$ и $A'D'B'BA$, и — значит — достаточно научиться вычислять площадь такого типа, как эти последние.

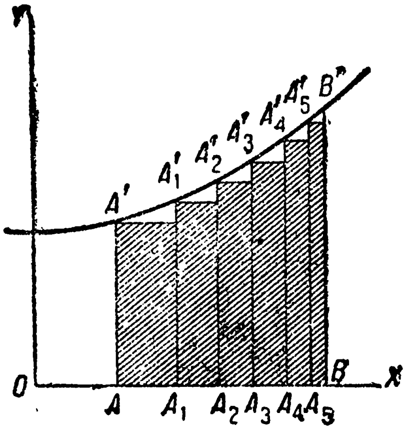
Таким образом задача вычисления произвольной площади будет решена, если мы научимся решать такую задачу: *дана линия* MN (своим уравнением); *на ней выбраны две точки* (т. е. заданы их координаты) A' и B'. *Определить площадь* $A'B'BA$, *ограниченную дугой нашей линии, двумя ординатами* $A'A$ и $B'B$ *и отрезком оси абсцисс* AB, *заключенным между этими ординатами* (черт. 2).

Эту задачу мы и рассмотрим теперь более подробно.

§ 4. К общему решению сформулированной нами задачи мы подойдем таким образом. Разобьем отрезок AB оси абсцисс на некоторое число n частей ($n = 6$, черт. 3). Эти части не должны быть непременно равны друг другу. Мы получим таким образом $n - 1$ точек деления: $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$. Через них проведем ординаты $A_1A'_1$, $A_2A'_2$ и т. д.

Наша фигура разбилась на n полосок, и площадь ее равна сумме площадей этих полосок.

Теперь проведем через точки A', A'_1, $A'_2 \dots A'_{n-1}$ прямые, параллельные оси абсцисс. Тогда из каждой полоски выделится прямоугольник, площадь которого несколько отличается от площади полоски[1]).



Черт. 3.

Сумма площадей этих прямоугольников дает площадь „ступенчатой фигуры", заштрихованной на чертеже. Площадь ступенчатой фигуры несколько отличается от площади фигуры $A'B'BA$, но это отличие, как легко видеть из чертежа, сглаживается по мере того, как число полосок возрастает, а каждая из них становится все тоньше и тоньше. Поэтому мы можем для **приближенного** вычисления площади $A'B'BA$ заменить ее площадью ступенчатой фигуры. Эту последнюю очень легко вычислить.

Обозначим через x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$ абсциссы точек A'_1, $A'_2 \dots A'_{n-1}$ а через y_1, $y_2 \dots y_{n-1}$ их ординаты. Абсциссы точек A' и B' мы будем обозначать через a и b. Кроме того для единообразия мы будем вместо a и b пользоваться также обозначениями x_0 и x_n. Через y_0 и y_n будем обозначать ординаты точек A' и B'.

Таким образом

$$\left.\begin{array}{ll} OA = x_0 = a, & AA' = y_0, \\ OA_1 = x_1, & A_1A'_1 = y_1, \\ OA_2 = x_2, & A_2A'_2 = y_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ OA_{n-1} = x_{n-1}, & A_{n-1}A'_{n-1} = y_{n-1}, \\ OB = x_n = b, & BB' = y_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Чтобы вычислить площадь ступенчатой фигуры, нужно сложить площади всех ее ступенек, каждая из которых имеет форму прямоугольника. Площадь первой ступеньки равна:

$$AA' \cdot AA_1 = AA'(OA_1 - OA) = y_0(x_1 - x_0).$$

Площадь второй ступеньки равна:

$$A_1A'_1 \cdot A_1A_2 = A_1A'_1(OA_2 - OA_1) = y_1(x_2 - x_1).$$

---

1) На нашем чертеже все прямоугольники имеют меньшую площадь, чем соответствующие полоски. Если бы кривая $A'B'$ шла книзу, то меньшую площадь имели бы полоски. В целях краткости изложения мы будем рассматривать в дальнейшем лишь первый случай; от этого рассуждения нисколько не теряют своей общности. Они могут быть буквально повторены (с соответствующими изменениями) и для второго случая.

Аналогично вычисляются площади остальных ступенек, и для площади ступенчатой фигуры с n ступеньками (мы будем ее обозначать через s_n) мы получим выражение:.

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_3 - x_2) + \ldots + \\ + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \qquad (2)$$

Эта формула является основной для всех дальнейших рассуждений.

§ 5. Выведенная нами формула (2) не дает возможности непосредственно ответить на вопрос о величине площади $A'B'BA$. Она дает лишь приближенную ее величину. Но с увеличением числа n. степень приближения увеличивается, и — что особенно важно — **увеличивается неограниченно**. Любая требуемая степень точности может быть достигнута. Для этого нужно только взять число n достаточно большим. Так, если требуется, чтобы ошибка, получаемая от вычисления площади $A'B'BA$ по формуле (2), не превышала 0,001 *мм*², то можно будет взять столь большое число n, чтобы этому требованию удовлетворить. Какое именно число n придется взять — это зависит, конечно, от размеров фигуры $A'B'BA$ и формы линии $A'B'$.

Эти простые соображения привели математиков XVII в. и — еще раньше — мыслителей античного мира к смелой идее, оказавшейся чрезвычайно плодотворной. Идея эта может быть выражена следующим образом: если с увеличением числа n точность формулы (2) неограниченно возрастает, то теоретически точную величину площади $A'B'BA$ формула

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

даст в том случае, когда число n будет взято **бесконечно-большим**. Мы назвали эту идею смелой потому, что она немедленно порождает ряд возражений против существования бесконечно-больших чисел. Но все эти возражения исходят из логической, формальной постановки вопроса. **Практически** всегда можно взять число n настолько большим, чтобы ступенчатая площадь и площадь $A'B'BA$ стали практически равными.

Но математика издавна заслужила себе славу точной науки; ее не может удовлетворить ссылка на „грубую" практику. И против идеи введения бесконечно-больших величин в математику раздались резкие возражения с самого появления этой идеи на свет. Однако долгое время эта критика оставалась непродуктивной. Лишь в XIX в. удалось блестящие открытия, сделанные в течение двух предшествующих веков, изложить так, что бесконечно-большие и бесконечно-малые величины оказались фактически изгнанными (в терминологии они сохранились и до настоящего времени).

Столь позднее положительное оформление критики не было исторической случайностью. Наука должна была пройти через предшествующую стадию накопления материала, а накопить этот материал возможно было лишь теми методами, которыми пользовались математики XVII и XVIII вв. Их рассуждения были конечно несовершенны с формальной стороны, но они обладали, несмотря на это (лучше сказать — именно поэтому), большой наглядностью и простотой.