

Грэнвиль В., Лузин Н.

**Курс дифференциального и
интегрального исчислений.**

**Часть 2. Интегральное
исчисление**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Г91

Г91 **Грэнвиль В.**
Курс дифференциального и интегрального исчислений.: Часть 2. Интегральное
исчисление / Грэнвиль В., Лузин Н. – М.: Книга по Требованию, 2021. –
302 с.

ISBN 978-5-519-70920-0

Курс дифференциального и интегрального исчислений. Часть 2

ISBN 978-5-519-70920-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА I.

СУММИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ.

(К сведению читателей. Читатель может отложить чтение этой главы, начав прямо с главы II и переходя к следующим по порядку главам, сделанным независимыми от главы I.)

§ 1. О суммах ограниченного числа бесконечно малых. Понятие суммы кажется столь простым, что сначала не возникает и подозрения, что здесь могут быть вообще какие-нибудь разговоры: составить сумму нескольких чисел — это значит сложить их вместе, т. е. соединить их в одно число; вот и все.

Однако когда дело идет не о сумме *постоянных чисел*, а о сумме *переменных величин*, тогда дело коренным образом изменяется, и здесь требуется большое внимание, потому что здесь говорить о полном слиянии слагаемых величин в одну на первых порах представляется весьма затруднительным. И в частности это относится к *суммам бесконечно малых*.

Напомним читателю, что *бесконечно малым* называется всякая *переменная* величина α , имеющая *нуль* своим пределом:

$$\lim \alpha = 0.$$

Это значит, что величина α ведет себя так, что какое бы заранее мы ни выбрали положительное число ε , обязательно наступит такой момент времени, начиная с которого абсолютная величина $|\alpha|$ делается и впредь будет оставаться меньше, чем ε , т. е. $|\alpha| < \varepsilon$.

Напомним, наконец, читателю основное предложение о сумме бесконечно малых:

Сумма *ограниченного* числа бесконечно малых есть опять бесконечно малое.

Например, чтобы убедиться в том, что сумма *о пяти* бесконечно малых $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$:

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta$$

есть бесконечно малое, нам следует, взяв какое-нибудь положительное число ε , просто *подождать* того момента времени, когда все пять абсолютных величин $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|, |\eta|$ станут одновременно меньше $\frac{\varepsilon}{5}$ и будут впредь все время оставаться такими же. Ясно, что с этого момента сама сумма $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta$ будет в свою очередь

все дальнейшее время оставаться по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon, \text{ т. е. } |\sigma| < \varepsilon.$$

А так как такое рассуждение можно применить для любого ε , то это значит, что сумма σ пяти бесконечно малых есть бесконечно малое.

§ 2. О том, что надо понимать под суммой возрастающего числа бесконечно малых. Мы только что указали, что сумма ограниченного числа бесконечно малых непременно есть бесконечно малое. Ничего подобного не будет, если мы станем брать „суммы неограниченного числа бесконечно малых“, которые иногда называют еще менее удачным термином, говоря о „суммах бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых“.

Ведь на деле совсем нет никакого „неограниченного числа“ или, еще хуже, „бесконечно большого числа“: всякое целое число, например число 5, по самой своей сути всегда и во всех случаях есть неизменное и конечное. А раз оно, будучи постоянным, остается всегда самим собою¹⁾, то оно тем самым является и ограниченным.

Спрашивается, в каком же тогда смысле отваживаются говорить о „неограниченном числе бесконечно малых“, или, еще хуже, о „бесконечно большом числе бесконечно малых“? Читатель должен быть заранее предупрежден, что эти слова являются лишь очень кратким, но совершенно неправильным способом выражения и что самый выигрыш краткости получается здесь за счет и в ущерб ясности и правильности мышления.

На самом деле под указанными смутными, хотя и краткими, словами подразумевается очень сложное явление. Вот в чем оно состоит.

Представим себе, что в определенный момент времени у нас имеется m количеств $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, сумму величин которых мы обозначим через σ :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu.$$

В рассматриваемый момент времени m есть целое вполне определенное число; что же касается $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, то в этот момент времени они имеют также строго определенные числовые значения.

Пусть теперь время станет течь, и пусть с течением времени все количества $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ будут стремиться к нулю как к пределу, в то время как их число m будет неограниченно возрастать. Это значит, что теперь с течением времени все числовые величины рассмотренных раньше количеств $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ придут в движение и начнут все по абсолютной величине безгранично умалаться, но одновременно с этим в сумме $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$ будут безгранично возникать все новые и новые слагаемые, которых раньше в ней не было

¹⁾ Читатель не должен смешивать числа и величины. Всякое число, если оно есть истинное число, а не замаскированная переменная величина, всегда неизменно и конечно. Например, число 5, относительно которого даже нелепо спрашивать, конечно ли и постоянно ли оно. Иное дело — величина, которая может изменяться каждое мгновение.

и которые, едва появившись, будут уже все дальнейшее время в ней оставаться и начнут в свою очередь сами стремиться к нулю.

Вот только в этих условиях про сумму σ и говорят, что σ есть „сумма неограниченного числа бесконечно малых“. Мы же будем помнить, что лишь ради краткости речи мы будем допускать — теперь уже совершенно сознательно — этот весьма неправильный способ выражения, потому что про сумму σ в сущности следовало бы говорить так:

σ есть сумма безгранично увеличивающегося числа безгранично у малывающихся слагаемых.

Из всего сказанного читатель должен заключить, что сумма σ возрастающего числа бесконечно малых есть математическое понятие, собственно, очень сложное, и что поэтому нет никаких оснований дожидаться от этой суммы σ всех тех свойств, которые раньше были установлены для сумм *двух, трех, пяти* и вообще *невозрастающего* числа бесконечно малых.

В частности, нет ничего удивительного, что сумма *возрастающего* числа бесконечно малых вообще не есть величина бесконечно малая.

Чтобы убедиться в этом, достаточно просто рассмотреть следующий пример.

Пусть m есть какое-нибудь целое положительное число. Формула $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ нам говорит о том, что если мы возьмем за слагаемое $\frac{1}{m}$ и повторим его в точности m раз, то в сумме σ мы получим единицу, т. е.

$$\sigma = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} = 1.$$

Обозначим первое слагаемое через α , второе слагаемое — через β , третье — через γ , ..., и, наконец, последнее слагаемое — через μ , т. е. положим

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{1}{m}, \quad \gamma = \frac{1}{m}, \dots, \quad \mu = \frac{1}{m}.$$

Ясно, что мы получим равенство.

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu = 1.$$

Пусть теперь целое число m начнет безгранично возрастать. Ясно что каждое из m слагаемых $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ явится тогда бесконечно малым, потому что дробь $\frac{1}{m}$ становится в этих условиях *переменной величиной*, имеющей своим пределом *нуль*, а число слагаемых суммы будет неограниченно увеличиваться. И однако сумма $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$ вовсе не есть бесконечно малое, потому что $\sigma = 1$.

Читатель не должен считать все эти вещи бесполезными тонкостями, а должен прямо иметь в виду, что все *интегральное исчисление* посвящено, в сущности, рассмотрению сумм *возрастающего* числа бесконечно малых.

Поэтому является крайне важным, чтобы читатель не торопился с изучением основ и как можно яснее представил себе свойства таких сумм.

Всякий шаг вперед в смысле приобретения ясности в основах есть крупнейший выигрыш в отношении даже и приложений, которые предстанут для ума читателя не как нечто совершенно новое и неожиданное, а лишь как простые упражнения, в уже известном ему материале.

В частности, пусть читатель попробует для проверки ясности своего понимания выяснить себе, почему данное выше доказательство бесконечной малости суммы $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$, составленной из m бесконечно малых слагаемых $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, верно, когда m есть неизменное число, становится ложным, когда m безгранично возрастает.

Отв. Когда число слагаемых $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ не изменяется, мы можем, взяв какое-нибудь положительное число ϵ , разделить его на m . Полученная дробь $\frac{\epsilon}{m}$ есть положительное неизменяющееся количество. И так как слагаемые $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ суть величины бесконечно малые, то для первой из них, α , наступит такое время t_1 , начиная с которого мы будем иметь $|\alpha| < \frac{\epsilon}{m}$; для второй из них, β , тоже наступит такое время t_2 , начиная с которого мы будем иметь $|\beta| < \frac{\epsilon}{m}$; ...; и для последней из них, μ , также в свою очередь наступит такое время t_m , начиная с которого мы будем иметь $|\mu| < \frac{\epsilon}{m}$. Ясно, что когда время перейдет за все эти моменты $t_1, t_2, \dots, t_m$, мы будем уже одновременно иметь сразу все m неравенств:

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{m}, |\beta| < \frac{\epsilon}{m}, \dots, |\mu| < \frac{\epsilon}{m},$$

откуда и следует окончательное неравенство:

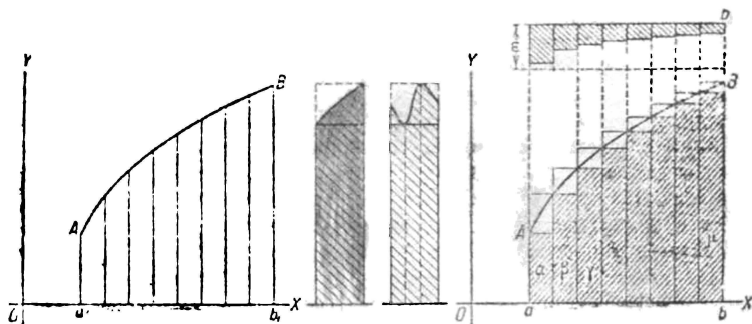
$$|\sigma| < \frac{\epsilon}{m} + \frac{\epsilon}{m} + \dots + \frac{\epsilon}{m} = m \cdot \frac{\epsilon}{m} = \epsilon,$$

т. е. $|\sigma| < \epsilon$, что и обнаруживает бесконечную малость суммы σ .

Если же $\sigma = \alpha + \beta + \dots + \mu$ есть сумма *возрастающего* числа бесконечно малых, то, разумеется, мы можем рассмотреть ее в *определенный момент* времени, когда число ее слагаемых равно еще m , и, разумеется, можем взять дробь $\frac{\epsilon}{m}$. Но когда время начнет течь, то m начнет безгранично расти, и, значит, взятая нами дробь $\frac{\epsilon}{m}$ начнет сама в свою очередь бесконечно умалаться. А тогда просто может никогда не наступить такой момент времени t_1 , когда первое слагаемое, α , станет по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\epsilon}{m}$, потому что и α и $\frac{\epsilon}{m}$ обе теперь бесконечно малые, и еще неизвестно, какое из них будет обгонять другое в своем стремлении к нулю.

Это как раз и происходит в вышеприведенном примере, где $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \mu = \frac{1}{m}$ и где, таким образом, никогда не может случиться, чтобы мы имели неравенство $|\alpha| < \frac{\epsilon}{m}$ уже для $\epsilon < 1$, например для $\epsilon = \frac{1}{2}$.

§ 3. О важности сумм бесконечно малых. Для ясного понимания этой важности надо иметь в виду, что только благодаря суммам бесконечно малых было получено, наконец, полное решение множества математических и физических задач, перед которыми в бессилии останавливались предшественники Ньютона и Лейбница. Только благодаря суммам бесконечно малых стало возможным изучение *движения т.с.т.*, а вместе с ним осуществилось развитие механики и астрономии. Только благодаря суммам бесконечно малых физики и естествоиспытатели получили в свои руки могущественнейшее средство для изучения законов природы. Только благодаря суммам бесконечно малых геометрия получила беспрепятственную возможность дальнейшего развития, так как благодаря им впервые были полностью решены труднейшие задачи о площадях, длинах дуг, объемах и поверхностях. И только благодаря суммам бесконечно малых сама *математика*



Черт. 1.

тика была поднята на высшую ступень, завоевав новую область, называемую „высшей математикой“.

Полное понимание существенной важности сумм бесконечно малых придет к читателю само собою, по мере изучения им интегрального исчисления. Но уже и сейчас читатель может почувствовать эту важность, ознакомившись со следующими задачами и способом их решения интегральным исчислением.

1. Площадь кривой в прямоугольных координатах.

Речь идет о точном определении площади так называемой „криволинейной трапеции“, т. е. фигуры $AabB$, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и кривой дугой AB (черт. 1). За образец подражания берем *элементарную геометрию*.

Читатель знает, что элементарная геометрия рассматривает *площадь круга* как промежуточную между площадями двух правильных многоугольников: одного — вписанного в этот круг, а другого — описанного. И так как разность площадей двух этих правильных многоугольников безгранично уменьшается, когда число сторон обоих правильных многоугольников неограниченно увеличивается, то элементарная геометрия

отсюда заключает, что площадь круга есть предел площади правильного многоугольника (вписанного или описанного — безразлично), когда число его сторон безгранично возрастает.

Точно так же и здесь. Площадь криволинейной трапеции $AabB$ прямым образом — т. е. непосредственно и с абсолютной точностью — мы измерить, разумеется, не можем. Поэтому мы употребим обходный путь. Для этого разделим сначала всю данную нам криволинейную трапецию $AabB$ на весьма большое число чрезвычайно узких криволинейных трапеций, как указано на левом рисунке черт. 1, прямыми, параллельными оси OY . Назовем для простоты каждую из этих узких криволинейных трапеций „элементарной трапецией“.

Истинную величину площади элементарной трапеции найти столь же трудно, как и величину площади всей криволинейной трапеции $AabB$. Но мы можем вписать в элементарную трапецию и описать около нее два прямоугольника, имеющих то же самое основание, как рассматриваемая элементарная трапеция, и имеющих высоты минимальную и максимальную ординату того кусочка данной непрерывной кривой AB , который ограничивает сверху нашу элементарную трапецию. На среднем рисунке черт. 1 изображены две элементарные трапеции с вписанными и описанными прямоугольниками, причем для левой трапеции максимальная и минимальная ординаты соответствующего кусочка кривой являются просто боковыми ее сторонами, а для правой трапеции эти ординаты суть некоторые внутренние.

Если мы это построение вписанного и описанного прямоугольников проделаем для всех наших элементарных трапеций, то получим две ступенчатые фигуры, изображенные на правом рисунке того же чертежа, одна из которых вписана в данную криволинейную трапецию $AabB$, а другая описана около нее. Естественно поэтому рассматривать истинную площадь данной криволинейной трапеции $AabB$ как величину *промежуточную* между площадями вписанной и описанной ступенчатой фигуры.

Разность этих двух площадей представлена, очевидно, суммой тех прямоугольников, которые содержат кусочки нашей кривой; эти прямоугольнички изображены белыми на правом рисунке. Если мы переместим их все, двигая параллельно оси OY так, чтобы их верхние основания поместились на одной прямой, то видим, что вся их сумма помещается в узкой горизонтальной ленте, основанием которой служит данный отрезок $[a, b]$, а высотой ϵ . Здесь ϵ можно рассматривать как величину *сколь угодно малую*. Действительно, функция $y=f(x)$, соответствующая заданной кривой AB , предполагается *непрерывной* на отрезке $[a, b]$. А это означает, что разность двух каких-нибудь ее ординат делается бесконечно умалюющей, когда разность двух соответствующих абсцисс бесконечно умалюется. Поэтому, если мы сделаем наши элементарные трапеции достаточно узкими, разность между максимальной и минимальной ординатами у каждой из них будет меньше ϵ , где ϵ есть *сколь угодно малая* величина. Поэтому все прямоугольнички, составляющие разность обеих ступенчатых фигур, имеют высоты меньше, чем ϵ .

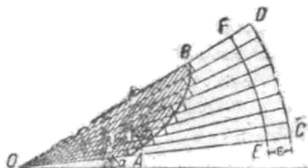
Таким образом разность площадей вписанной и описанной ступенчатой фигуры становится меньше площади указанной узкой горизонтальной ленты, следовательно, меньше чем $\varepsilon \cdot (b - a)$. Так как ε можно взять сколь угодно малым, то отсюда и следует, что когда все элементарные трапеции бесконечно утончаются, разность площадей вписанной и описанной ступенчатой фигуры безгранично уменьшается. Отсюда, как и в случае площади круга, естественно заключить, что площадь криволинейной трапеции $AabB$ есть предел площади ступенчатой фигуры (вписанной или описанной — безразлично), когда все элементарные трапеции бесконечно утончаются.

Так как площадь σ ступенчатой фигуры (например вписанной) равна сумме площадей составляющих ее прямоугольников, то, обозначая их площади (вычисляющиеся, понятно, без всякого труда) соответственно через $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, мы получим для площади σ рассматриваемой ступенчатой (приближенной) фигуры равенство:

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu.$$

Когда все элементарные трапеции бесконечно утончаются, причем число их, понятно, безгранично возрастает, тогда площади прямоугольников $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ бесконечно уменьшаются, а их сумма σ становится переменной величиной, имеющей своим *пределом*¹⁾ истинную площадь заданной криволинейной трапеции $AabB$, т. е.

$$\text{площадь } AabB = \lim(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu)$$



Черт. 2.

Мы видим, что искомая криволинейная площадь есть *предел* суммы возрастающего числа бесконечно малых.

II. Площадь кривой в полярных координатах.

Для читателя, который со вниманием прочел разъяснения к предыдущей задаче, здесь не нужны длинные объяснения.

Криволинейный сектор AOB (черт. 2), площадь которого ищется, мы делим на весьма большое число чрезвычайно тонких криволинейных секторов, которые называем *элементарными секторами*.

Площадь элементарного сектора определить, разумеется, столь же трудно, как и площадь самого данного криволинейного сектора AOB . Поэтому мы заключаем всякий элементарный сектор между двумя *кривовыми секторами*, один из которых вписан, а другой описан.

Вследствие этого искомая площадь криволинейного сектора AOB

¹⁾ С геометрической точки зрения нам нет ни малейшей надобности доказывать, что переменная величина σ в действительности *имеет* предел (и, стало быть, не будет безгранично колебаться), потому что криволинейная трапеция $AabB$ в действительности имеет площадь, к которой σ безгранично приближается. Однако в дальнейшем мы, исходя уже из аналитических соображений, попутно увидим, что переменная величина σ в самом деле имеет предел, так как мы его тут же и вычислим с абсолютной точностью. Это замечание относится и ко всем остальным задачам.

окажется заключенной между площадями двух ступенчатых фигур, одна из которых составлена из вписанных круговых секторов, другая же — из описанных.

Разность площадей обеих ступенчатых фигур представлена, очевидно, суммой криволинейных прямоугольников (на рисунке: белых), которые содержат кусочки дуги AB , ограничивающие элементарные секторы. „Высотами“ этих криволинейных прямоугольников мы будем считать разности радиусов их круговых „оснований“.

Так как данная дуга AB непрерывна, то можно предложенный криволинейный сектор AOB разделить на столь тонкие элементарные секторы, что „высоты“ указанных прямоугольников окажутся все меньше, чем ε ; здесь ε есть положительное число, сколь угодно малое.

Чтобы оценить сумму площадей этих прямоугольников, проведем дугу CD круга, радиус которого OC есть постоянный и больше всякого радиуса-вектора данной кривой дуги AB . Отложим на радиусах этой дуги CD , внутрь, отрезок ε . Мы получим таким образом тонкую полоску $CDFE$, „основанием“ которой служит дуга CD , а „высотой“ — отрезок ε . Когда ε безгранично умалется, площадь полоски $CDFE$ также, очевидно, безгранично умалется. Ясно, что радиусы, служащие сторонами элементарных секторов, будучи продолжены, разделят полоску $CDFE$ на криволинейные прямоугольники, соответственно большие указанных прямоугольников. Отсюда следует, что сумма площадей этих прямоугольников бесконечно умалется вместе с числом ε .

Таким образом разность площадей вписанной и описанной ступенчатой фигуры бесконечно умалется, когда все элементарные секторы бесконечно утончаются. Отсюда, как и для площади круга, естественно заключить, что площадь криволинейного сектора AOB есть *предел* площади ступенчатой фигуры (вписанной или описанной — безразлично), когда все элементарные секторы бесконечно утончаются.

Так как площадь σ ступенчатой фигуры (например вписанной) равна сумме площадей составляющих ее круговых секторов, то, обозначив площади их (вычисляющиеся, понятно, без всякого труда) соответственно через $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, мы получим для площади σ рассматриваемой (приближенной) фигуры равенство:

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu.$$

Когда все элементарные секторы бесконечно утончаются, причем число m их, понятно, безгранично возрастает, тогда $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ бесконечно умалются, а их сумма σ становится переменной величиной, имеющей своим *пределом* истинную площадь заданного криволинейного сектора AOB , т. е.

$$\text{площадь } AOB = \lim (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu).$$

Мы видим, что искомая криволинейная площадь есть *предел* суммы возрастающего числа бесконечно малых.

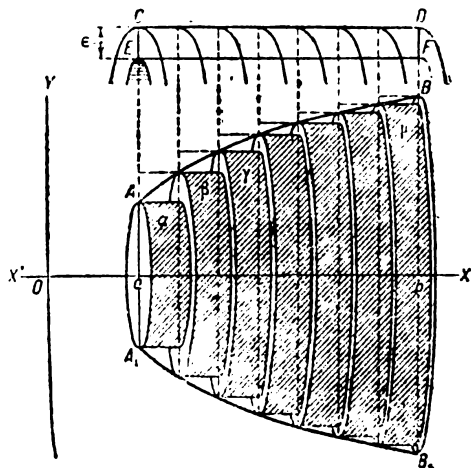
III. Объем тела вращения.

Требуется найти точную величину объема тела вращения A_1ABB_1 , образованного вращением дуги AB пло-

ской непрерывной кривой около некоторой оси вращения (черт. 3).

За образец для подражания берем элементарную геометрию и вспоминаем, что объем круглого цилиндра рассматривается там как величина промежуточная между объемами двух правильных призм: одной — вписанной в этот цилиндр, а другой — описанной. И так как разность объемов двух этих призм безгранично уменьшается, когда число граней обеих правильных призм неограниченно увеличивается, то элементарная геометрия отсюда заключает, что объем круглого цилиндра есть предел объема правильной призмы (вписанной или описанной — безразлично), когда число ее граней безгранично возрастает.

Точно так же поступаем и мы: рассекаем данное тело вращения на *тонкие диски*, которые назовем *элементарными дисками*, плоскостями, перпендикулярными оси вращения, вписывая и описывая около каждого из них круглый цилиндр, как показано на чертеже. Таким образом мы получаем два зубчатых тела, составленных из вписанных и описанных цилиндров, и естественно рассматривать объем данного тела вращения A_1ABB_1 как промежуточный между



Черт. 3.

обоими объемами вписанного и описанного зубчатого тела.

Разность объемов этих двух зубчатых тел, очевидно, состоит из суммы объемов *тонких колец*, получающихся от вращения прямоугольников, содержащих дужки кривой AB . Когда элементарные диски, на которые рассечено данное тело вращения A_1ABB_1 , становятся достаточно тонкими, высоты наших вращающихся прямоугольников в силу непрерывности кривой AB делаются меньше, чем ϵ , где ϵ — сколько угодно малое положительное число. А отсюда следует, что сумма объемов указанных колец будет меньше объема только *одного* кольца, которое мы получаем, вращая узкий прямоугольник $CDEF$, имеющий ϵ своею высотой и основание которого CD , параллельное и равное отрезку ab , удалено от оси вращения $X'X$ на *постоянное* расстояние aC , большее всякой ординаты данной дуги AB . Ясно, что когда ϵ бесконечно уменьшается, рассматриваемое кольцо делается все более и более тонким, и, значит, его объем также бесконечно уменьшается.

Таким образом разность объемов вписанного и описанного зубчатого тела бесконечно уменьшается, когда все элементарные диски бесконечно

утончаются. Отсюда, как и в случае объема круглого цилиндра, естественно заключить, что объем тела вращения A_1ABB_1 есть *предел* объема ступенчатого тела (вписанного или описанного — безразлично), когда все элементарные диски бесконечно утончаются.

Так как объем σ ступенчатого тела (например вписанного) равен сумме объемов составляющих его цилиндров, то, обозначая объемы их (вычисляющиеся, понятно, без всякого труда) соответственно через $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, мы получим для объема σ рассматриваемого (приближенного) зубчатого тела равенство:

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu.$$

Когда *все* диски бесконечно утончаются, причем число m их, понятно, безгранично возрастает, тогда $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ бесконечно умалются, а их сумма σ становится переменной величиной, имеющей своим *пределом* истинный объем заданного тела вращения A_1ABB_1 , т. е.

$$\text{объем } A_1ABB_1 = \lim (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu).$$

Мы видим, что искомый объем тела вращения есть *предел* суммы возрастающего числа бесконечно малых.

IV. Длина дуги плоской кривой.

Требуется найти точную длину дуги AB плоской кривой, имеющей непрерывно изменяющуюся касательную.

Здесь также мы за образец для подражания берем элементарную геометрию.

Вспомнив, что в элементарной геометрии длина окружности рассматривается как *предел* периметра правильного вписанного многоугольника, когда число его сторон безгранично возрастает, мы разделим данную нам кривую дугу AB на весьма большое число чрезвычайно маленьких дужек и соединим оба конца каждой из них хордой. Назовем ради ясности каждую из этих хорд *элементарной хордой*. Таким образом мы получим некоторую ломаную, вписанную в нашу кривую дугу AB и имеющую своими звеньями элементарные хорды (черт. 4).

Обозначим длины элементарных хорд через $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$. Тогда длина σ построенной вписанной (приближенной) ломаной будет составлена из длин наших элементарных хорд, т. е.

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$$

Когда все элементарные хорды бесконечно умалются, причем число m их, понятно, безгранично возрастает, тогда $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ бесконечно умалются, а их сумма σ становится переменной величиной, *предел*

