П.Ф. Фильчаков, Г.П. Бевз, К.И. Швецов, Ф.П. Яремчук

Справочник по элементарной математике

Для поступающих в ВУЗы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П.Ф. Фильчаков

П11 Справочник по элементарной математике: Для поступающих в ВУЗы / П.Ф. Фильчаков, Г.П. Бевз, К.И. Швецов, Ф.П. Яремчук – М.: Книга по Требованию, 2024. – 528 с.

ISBN 978-5-458-35543-8

Справочник содержит сведения по арифметике, алгебре и элементарным функциям, в том числе тригонометрическим, планиметрии и стереометрии с указаниями о способах решения примеров и задач различных типов и степеней трудности; приведены исторические справки, список литературы и подробный предметный указатель.Рассчитан на поступающих в высшие и средние учебные заведения; представляет интерес для преподавателей средних школ и учащихся старших классов.

ISBN 978-5-458-35543-8

I. АРИФМЕТИКА

ПРЕДМЕТ АРИФМЕТИКИ

Арифметика — наука о числах. Название «арифметика» произошло от греческого слова αριθμητικη, состоящего из двух частей: αριθμος — число и τεχνη — искусство. Арифметика, как и многие другие науки, возникла из потребностей практической деятельности людей. Еще задолго до нашей эры возникла необходимость подсчитывать количество добычи, вести счет времени и т. п. Несомненно, что сначала люди оперировали только конкретными именованными числами, и только позже начали употреблять абстрактные.

Сначала были известны только натуральные числа, но позже жизнь заставила расширить это понятие, рассматривать и дробные числа. Когда впервые появилось понятие дроби, не известно. Но исследования показывают, что древние египтяне, китайцы, хорезмийцы за много веков до нашей эры были знакомы с дробными числами и умели выполнять простейшие арифметические действия над ними.

В арифметике как науке рассматриваются все виды чисел от натуральных до комплексных. Однако в школьной арифметике изучают только положительные рациональные числа, а остальные виды чисел рассматриваются в алгебре. Авторы данного справочника придерживаются школьных традиций. Отрицательные, иррациональные и мнимые числа изложены в главе «Алгебра» а в главе «Арифметика» рассматриваются только натуральные и дробные.

Первые книги, содержащие учение о счете и вычислениях, появились еще за несколько веков до нашей эры. Много арифметических сведений есть в «Началах» Евклида (III в. до н. э.), в «Арифметике» Диофанта (III в. н. э.) и других книгах древнегреческих математиков.

Известный хорезмский математик Мухаммед ибн Муса (около 780—850 гг.), использовав известные ему работы греческих и индийских математиков, написал книгу по арифметике, которая в латинском переводе попала в Европу в XII в. и содействовала распространению десятичной позиционной нумерации.

В Киевской Руси были широко распространены элементарные сведения из области арифметики, включая действия с обыкновенными дробями, что доказывается наличием косвенных источников. От XVII в. сохранились рукописи математического содержания, из анализа которых явствует, что познания в арифметике на Руси того времени соответствовали уровню, достигнутому в Западной Европе. В начале XVIII в. появляются и печатные учебники по арифметике. Так, в 1703 г.

была издана «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, самая популярная книга на протяжении первой половины XVIII в., которую М. В. Ломоносов называл «вратами своей учености». Этот учебник энциклопедического содержания, кроме арифметики, включал элементы геометрии и технических наук. В 1740 г. было напечатано «Руководство к арифметике» Л. Эйлера. Во второй половине XVIII в. вышли из печати учебники арифметики, написанные академиками С. К. Котельниковым, С. Я. Румовским и другими авторами. Широко распространены были в то время «Универсальная арифметика» Н. Г. Курганова, а также «Теоретическая и практическая арифметика» профессора Московского университета Д. С. Аничкова.

В 1866 были изданы «Руководство арифметики» и «Собрание арифметических задач» А. Ф. Малинина и К. П. Буренина, по которым учились в русских средних школах на протяжении полустолетия. Во второй половине XIX в. вышли в свет учебники по арифметике Ф. И. Симашко, В. А. Латышева, В. А. Евтушевского и других авторов. В 1884 г. издана «Арифметика» А. П. Киселева, на которой воспиталось несколько поколений русских, а затем и советских специалистов и которую только недавно заменил учебник «Арифметика» И. Н. Шевченко.

Целые неотрицательные числа

§ 1. Нумерация

Натуральный ряд чисел. Когда пересчитывают какие-нибудь предметы, называют в строго определенном порядке числа: *один*, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть* и т. д. Изображают их символами

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Эти числа называют *натуральными*. Множество натуральных чисел, упорядоченных в строго определенной указанной выше последовательности, называют натуральным рядом чисел, или короче *натуральным рядом*.

То из двух натуральных чисел, которое в натуральном ряде ближе стоит к 1, т. е. которое при счете появляется раньше, называется *меньшим*, второе число — *большим**. Следовательно, в натуральном ряде каждое число, кроме 1, больше предыдущего. 1 — наименьшее натуральное число, но наибольшего натурального числа нет. Как бы велико ни было натуральное число, существует еще большее число, следующее за ним. Натуральный ряд бесконечен. Это показал еще в III в. до н. э. древнегреческий математик Архимед.

Устная нумерация. При помощи слов «один», «два», «три», «четыре», «пять», «шесть», «семь», «восемь», «девять», «десять», «сорок», «сто», «тысяча», «миллион», «миллиард», определенным способом комбинируя их, можно назвать очень большие числа, встречающиеся в практике.

Устная нумерация у большинства народов появилась очень давно.

* Приведенные выше описания нельзя считать строгими определениями. Строгие определения этих понятий очень сложны (см. «Энциклопедия элементарной математики», I, Гостехиздат, М., 1951, стр. 130, 142 и др.).

Письменная нумерация. Для записи натуральных чисел используют символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их называют *цифрами*. С помощью этих десяти цифр можно записать любое натуральное число.

Пример. 327 — триста двадцать семь, 1002 — тысяча два.

Такая экономная запись чисел достигается благодаря применению *принципа поместного значения цифр*. В зависимости от занимаемого цифрой места она может обозначать то одно, то другое число. Так, в приведенном выше примере цифра 2 в первом случае обозначает двадцать, а во втором — два.

Первая, вторая, третья и т. д. цифры числа, если считать справа налево, называются соответственно цифрами единиц, десятков, сотен и т. д. Их называют еще единицами первого, второго, третьего и т. д. *разрядов*. Например, в числе 7194 имеется 4 единицы первого, 9 единиц второго, 1 единица третьего и 7 единиц четвертого разрядов. Цифрой «0» — нуль обозначают отсутствие единиц того или иного разряда. Десять единиц какого-нибудь разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Поэтому говорят, что мы пользуемся *десятичной системой счисления*.

Десятичная система счисления возникла в глубокой древности. Люди стали пользоваться ею потому, что привыкли считать десятками, имея на руках десять пальцев. Однако некоторые народы в свое время создали и недесятичные системы счисления (см. стр. 30).

Принцип поместного значения цифр и их начертания (правда, несколько отличные от современных) возникли в Индии только в начале н. э. В Европе они стали известны благодаря книге «Арифметика Индорум», которую написал хорезмский математик Мухаммед ибн Муса. Она была написана на арабском языке и поэтому стали называть эти цифры *арабскими*. Позже, узнав, что Мухаммед в основу имеющейся в книге нумерации положил практику вычислителей Индии, стали называть эти цифры *индийскими*.

В России с индийской нумерацией познакомились только в XIII в. До этого числа обозначали старославянскими буквами, только сверху писали специальные значки ҃ (титло):

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	о҃	п҃	ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	у҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ҃	ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Тысячи обозначали теми же буквами, но впереди ставили значок ҂
Например, числа 7205, 1963 записывали соответственно так:

҂зс҃є, ҂ацѯ҃г.

В некоторых случаях и сейчас пользуются *римскими цифрами*. Римская система нумерации состоит из семи знаков:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

При этом, если меньший знак пишется после большего, то его прибавляют к большему числу; если же перед большим — вычитают, например: 8 — VIII, 24 — XXIV, 26 — XXVI, 46 — XLVI, 176 — CLXXVI, 1963 — MCMLXIII.

Целые числа. О нуле мы уже упоминали, но рассматривали его только как цифру (знак), а не число. Однако в математике принято рассматривать *нуль* не только как цифру, но и *как число*.

0 — число не натуральное. Нуль меньше 1 и любого натурального числа. Если разместить нуль и все натуральные числа в порядке возрастания, получим:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots .$$

Эту последовательность чисел называют *расширенным натуральным рядом*.

Все натуральные числа и нуль называются вместе *целыми неотрицательными числами*. *Целыми числами* называют все натуральные числа, нуль и все целые отрицательные числа: -1, -2 и т. д.

Названия больших чисел. Для удобства чтения и запоминания больших чисел их цифры разбивают на классы: справа отделяют три цифры — первый класс, следующие три — второй класс и т. д. Последний класс может иметь три, две или одну цифру. Между классами обычно оставляют небольшие промежутки. Например, в числе 2 365 423 первый класс дает число единиц, второй — число тысяч и третий — число миллионов. Сообразно с этим записанное число читают так: два миллиона триста шестьдесят пять тысяч четыреста двадцать три.

Единицы четвертого, пятого, шестого и т. д. классов называют соответственно

миллиард или биллион	—	1 000 000 000,
триллион	—	1 000 000 000 000,
квадриллион	—	1 000 000 000 000 000,
квинтиллион	—	1 000 000 000 000 000 000,
секстиллион	—	1 000 000 000 000 000 000 000,
септиллион	—	1 000 000 000 000 000 000 000 000.

Эти названия возникли сравнительно недавно. Существующее сейчас в большинстве европейских языков выражение «миллион» — 10^6 возникло в Италии в XIII в.* Термины «биллион», «миллиард» и т. п. возникли в XVI—XVII вв., но до сих пор имеют различное (в разных языках) значение. Миллиард обычно означает 10^9, но то же значение имеет в США и во Франции биллион, тогда как в Германии биллион означает 10^{12}. Триллион в США и во Франции означает 10^{12}, а в Англии и Германии — 10^{18}. В русских математических рукописях встречаются наименования больших чисел, возникших, по-видимому, не раньше XII в.: тьма — 10^6, легион — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, колода — 10^{49}.

* $10^6 = 1\,000\,000$. Вообще 10^n обозначает число, записанное единицей с n последующими нулями.

§ 2. Арифметические действия

Если по двум данным числам определяют третье число, удовлетворяющее некоторым условиям, то этот процесс в математике вообще называют *действием*.

В арифметике рассматривают следующие действия: *сложение, вычитание, умножение и деление*. Их называют *арифметическими действиями*.

Сложение. *Сложением натуральных чисел называют арифметическое действие, при помощи которого узнают число, содержащее столько единиц, сколько их есть в данных числах вместе.*

Числа, которые нужно сложить, называют *слагаемыми*, а результат сложения называют *суммой*.

Например: $11 + 9 = 20$. Здесь 11 и 9 — слагаемые, 20— сумма. Знак сложения + (плюс) ставится между слагаемыми.

Однозначные* числа складывают, пользуясь *таблицей сложения*:

$$1 + 1 = 2,$$

$$2 + 1 = 3 \text{ и т. д.}$$

Эту таблицу дети запоминают еще в первом классе.

Сложение многозначных чисел удобней выполнять «в столбик», записывая слагаемые так: единицы против единиц, десятки против десятков и т. д., например

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 29327 \\ 4398186 \end{array} \\ \hline 4427513. \end{array}$$

Вычитание. *Вычитанием называется действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из них отыскивается другое слагаемое*. Таким образом, число, которое при сложении является искомым, при вычитании оказывается данным, и наоборот. Поэтому вычитание называют действием, обратным сложению.

Число, из которого вычитают, называется *уменьшаемым*. Число, которое вычитают,— *вычитаемым*. Число, которое получается в результате вычитания, называется *разностью*.

Пример. $30 - 12 = 18$. Здесь 30 — уменьшаемое, 12 — вычитаемое, а 18 — разность. Знак вычитания минус (—) ставится между уменьшаемым и вычитаемым.

Вычитание в множестве натуральных чисел выполнимо лишь при условии, когда уменьшаемое больше вычитаемого. При этом разность выражается всегда определенным единственным натуральным числом.

Примечание: а) вычитание нуля из числа не изменяет этого числа, например, $8 - 0 = 8$;

б) если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю. Например, $9 - 9 = 0$.

Умножение. *Умножением натуральных чисел называется действие нахождения суммы одинаковых слагаемых.* Например, если число 5 нужно повторить слагаемым 7 раз, то пишут $5 \times 7 = 35$ и говорят, что нужно 5 умножить на 7:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 7.$$

---

* *Однозначными, двузначными* и т. д. называют числа, записанные одной, двумя и т. д. цифрами. Число записанное несколькими цифрами, называют также *многозначным*.

Можно сказать иначе: умножить одно натуральное число на другое — значит взять первое число слагаемым столько раз, сколько единиц во втором числе. При этом то число, которое повторяется как слагаемое, называется *множимым*; число, показывающее, сколько берется таких одинаковых слагаемых,— *множителем*; число, полученное в результате умножения,— *произведением*. Так, в нашем примере, 5 — множимое, 7 — множитель, 35 — произведение. Множимое и множитель называются также *сомножителями*.

Знак умножения (×) ставится между множимым и множителем. В качестве знака умножения часто употребляется точка (·), например $3 \cdot 5 = 15$. (Перед буквенными сомножителями знак умножения не ставят.)

Примечание: а) если один из двух сомножителей равен единице, то произведение равно второму сомножителю, например

$$1 \cdot 5 = 5; \quad 10 \cdot 1 = 10;$$

б) если хоть один сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю:

$$0 \cdot 342 = 0; \quad 37 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

Деление. *Делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.*

Число, которое делят, называется *делимым*; число на которое делят,— *делителем*; число, получаемое в результате деления, называется *частным*, или отношением.

Деление записывается так: $40 : 8 = 5$. Здесь 40 — делимое, 8 — делитель, а 5 — частное. Знак деления : (двоеточие) ставится между делимым и делителем.

Число, являющееся при умножении искомым, при делении оказывается данным, и наоборот. Поэтому деление называется действием, обратным умножению.

Примечание: а) если делимое равно делителю, то частное равно единице, например $14 : 14 = 1$;

б) если делитель равен единице, то частное — делимому, например $14 : 1 = 14$;

в) частное от деления нуля на какое-либо отличное от нуля число равно нулю, например $0 : 12 = 0$;

г) деление на нуль невозможно.

Деление натуральных чисел не всегда выполнимо. Например, нельзя разделить 30 на 7, ибо нет такого натурального числа, которое при умножении на 7 давало бы 30.

Деление с остатком. Как видим, разделить 30 на 7 в указанном выше смысле невозможно. Но в жизни встречаются ситуации, которые требуют распространить деление натуральных чисел и на такие случаи, например, разделить 30 тетрадей между 7 учениками поровну.

Поэтому рассматривают также *деление с остатком*.

Примечание. Чтобы не смешивать деление с остатком и рассмотренное выше арифметическое действие деления, последнее называют еще делением без остатка или делением нацело.

Деление с остатком есть отыскание наибольшего целого числа, которое в произведении с делителем дает число, не превышающее делимого. Искомое число называется *неполным частным*. Разность между делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком;* он всегда меньше делителя.

Пример. 19 не делится нацело на 5. Числа 1, 2, 3 при умножении на 5 дают 5, 10, 15, не превосходящие делимого 19, но уже 4 дает в произведении с 5 число 20, большее 19. Поэтому неполным частным является 3, а остатком — 4 (разность между 19 и произведением $3 \cdot 5 = 15$); $19 = 5 \cdot 3 + 4$.

Для натуральных чисел точному делению (делению без остатка) и делению с остатком можно дать следующее общее определение: разделить число a (делимое) на число b (делитель) — значит найти такие два числа q (частное) и r (остаток), которые удовлетворяли бы соотношениям

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

Если делитель b не равен нулю, то деление всегда возможно и дает единственный результат.

Остатком при делении на число b может быть любое из чисел 0, 1, 2, ..., $b - 1$.

Примечание. Название действия, общепринятое в западноевропейских языках и применявшееся в России вплоть до первой половины XVIII в., «дивизио» заимствовано из латинского языка. Знак деления (:) был принят в XVII в.

Возведение в степень. Частный случай умножения, а именно умножение одинаковых чисел, называют *возведением в степень*. Если, например, надо перемножить 5 одинаковых чисел, каждое из которых равно 2, говорят: надо число возвести в пятую степень. И вместо $2 \cdot 2 \cdot 2 \times \times 2 \cdot 2$ пишут 2^5.

Возвести число во вторую, третью, четвертую и т. д. степень значит взять его сомножителем соответственно два, три, четыре и т. д. раза*. Число, повторяющееся сомножителем, называется *основанием степени;* число, указывающее сколько раз берется одинаковый множитель, называется *показателем степени*, а результат — *степенью*.

Запись: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; здесь 5 — основание степени, 3 — показатель степени, 125 — степень.

Вторая степень называется иначе *квадратом*, третья степень — *кубом*. Первой степенью числа называют само это число, например $7^1 = 7$.

§ 3. Свойства арифметических действий

Законы сложения: 1. Переместительный: *сумма не изменяется от перемены мест слагаемых*. Переместительный закон в общем виде записывается равенством

$$a + b = b + a.$$

2. Сочетательный: *сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой*. В общем виде это свойство для трех слагаемых записывается как

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Переместительный и сочетательный законы называют также соответственно *коммутативным* и *ассоциативным* законами.

* О возведении в отрицательную, нулевую и дробную степени см. стр. 116.

Правило прибавления суммы к числу и числа к сумме. Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел (или наоборот), достаточно прибавить к этому числу одно слагаемое, к полученной сумме прибавить второе слагаемое и т. д.

Правила вычитания: 1. Вычитание суммы из числа. Чтобы вычесть сумму из числа, можно вычесть из этого числа одно слагаемое, из полученной разности — второе слагаемое и т. д.

Обозначим уменьшаемое буквой a, отдельные слагаемые вычитаемой суммы буквами b и c, тогда свойство можно записать так:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Пример. $25 - (13 + 5) = 25 - 5 - 13 = 20 - 13 = 7.$

2. Вычитание числа из суммы: Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого (предполагается, что слагаемое больше вычитаемого) и полученную разность прибавить к сумме остальных слагаемых, т. е.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Примеры: $(36 + 27) - 16 = (36 - 16) + 27 = 47,$

$(36 + 27) - 17 = 36 + (27 - 17) = 46.$

3. Прибавление разности. Чтобы прибавить разность к числу, достаточно прибавить к нему уменьшаемое и из полученной суммы вычесть вычитаемое, т. е.

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Пример. $50 + (36 - 16) = 50 + 20 = 70$, или $50 + 36 = 86$, $86 - 16 = 70$.

4. Вычитание разности. Чтобы вычесть разность из числа, достаточно вычесть из него уменьшаемое (если это возможно) и к полученной разности прибавить вычитаемое.

Это свойство в общем виде записывается так:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Пример. $65 - (35 - 18) = (65 - 35) + 18 = 48.$

Законы умножения: 1. Переместительный: *произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.*

Если обозначим первый сомножитель буквой a, а второй — буквой b, то переместительный закон можно записать в виде равенства

$$ab = ba.$$

2. Сочетательный: *произведение не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.*

В общем виде этот закон можно записать так:

$$abc = a(bc).$$

3. Распределительный (относительно суммы): *произведение суммы нескольких чисел на какое-нибудь число равно сумме произведений каждого слагаемого на это число.* В общем виде для случая трех слагаемых этот закон можно записать так:

$$(a + b + c)d = ad + bd + cd.$$

Переместительный, сочетательный и распределительный законы называют также соответственно *коммутативным*, *ассоциативным* и *дистрибутивным*.

Правила умножения: 1. Умножение произведения на число и числа на произведение. Чтобы умножить произведение нескольких чисел на какое-нибудь число (или наоборот), достаточно один из сомножителей произведения умножить на это число, оставив другие сомножители без изменения.

Примеры. $(35 \cdot 12) \cdot 4 = (35 \cdot 4) \cdot 12 = 140 \cdot 12 = 1680$, $20 \cdot (7 \cdot 18 \cdot 5) = (20 \cdot 5) \cdot 7 \cdot 18 = 100 \cdot 7 \cdot 18 = 12600$.

2. Умножение разности на число. Чтобы умножить разность на число, достаточно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое, а затем из первого произведения вычесть второе, т. е.

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Пример. $(35 - 15) \cdot 4 = 35 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = 140 - 60 = 80$.

Правила деления: 1. Деление суммы на число. Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные частные сложить, т. е.

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Пример. $(8 + 12) : 4 = 8 : 4 + 12 : 4 = 2 + 3 = 5$.

2. Деление разности на число. Чтобы разделить разность на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое, а потом из первого частного вычесть второе, т. е.

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

Пример. $(18 - 6) : 3 = 18 : 3 - 6 : 3 = 6 - 2 = 4$.

Однако в примере $(17 - 7) : 5$ надо сперва найти разность $17 - 7$.

3. Деление числа на произведение. Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на один сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, вновь полученное частное разделить на третий сомножитель и т. д.

Пример. 960 разделить на произведение $4 \cdot 6 \cdot 8$ можно так: $960 : 4 = 240$; $240 : 6 = 40$; $40 : 8 = 5$.

4. Деление произведения на число. Частное от деления произведения двух сомножителей на число равно произведению одного из сомножителей на частное от деления другого сомножителя на это число (если такое деление выполнимо).

В общем виде

$$(ab) : c = (a : c)b.$$

Это свойство остается справедливым и в случае произведения нескольких сомножителей, т. е.

$$(abc) : d = (a : d)bc.$$

Пример. Разделить произведение $24 \cdot 18 \cdot 10$ (равное 4320) на 8 можно так:

$$24 : 8 = 3; \quad 3 \cdot (18 \cdot 10) = 3 \cdot 180 = 540.$$

Однако в примере $(6 \cdot 8) : 16$ надо сперва вычислить произведение $6 \cdot 8$.

Зависимость между данными числами и результатами действий над ними. Сложение. *Если известна сумма двух слагаемых, а одно слагаемое неизвестно, то, чтобы найти его, достаточно из суммы вычесть известное слагаемое*, т. е., если

$$a + b = c, \text{ то } a = c - b \text{ и } b = c - a.$$

Пример. $x + 30 = 42$; $x = 42 - 30$; $x = 12$.

Вычитание. *Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, достаточно к вычитаемому прибавить разность*, т. е., если $a - b = c$, то $a = b + c$.

Пример. $x - 8 = 5$; $x = 8 + 5$; $x = 13$.

Чтобы найти неизвестное вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть разность, т. е.,

$$\text{если } a - b = c, \text{ то } b = a - c.$$

Пример. $45 - x = 15$; $x = 45 - 15$; $x = 30$.

Умножение. *Чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение на известный сомножитель* (или на произведение известных сомножителей):

$$\text{если } ab = c, \text{ то } a = c : b, \ b = c : a.$$

Примеры: 1. $25x = 200$; $x = 200 : 25$; $x = 8$.
2. $3 \cdot 5x \cdot 2 = 210$; $x = 210 : (3 \cdot 5 \cdot 2)$; $x = 7$.

Деление. *Чтобы найти неизвестное, делимое, достаточно делитель умножить на частное*, т. е.

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } a = bc.$$

Пример. $x : 25 = 3$; $x = 25 \cdot 3$; $x = 75$.

Чтобы найти неизвестный делитель, достаточно делимое разделить на частное, т. е.

$$\text{если } a : b = c, \text{ то } b = a : c.$$

Пример: $400 : x = 16$; $x = 400 : 16$; $x = 25$.

Чтобы найти делимое при делении с остатком, достаточно делитель умножить на частное и прибавить остаток.

В общем виде, если при делении a на b получили частное q и остаток r, то

$$a = bq + r.$$

Пример: Если $30 : 4 = 7$ (ост. 2), то $30 = 4 \cdot 7 + 2$;
$x : 5 = 4$ (ост. 3), то $x = 5 \cdot 4 + 3 = 23$.

Чтобы найти делитель при делении с остатком, достаточно из делимого вычесть остаток и разность разделить на частное, т. е.

$$b = (a - r) : q.$$

Пример. $40 : x = 6$ (ост. 4), $x = (40 - 4) : 6 = 6$.

§ 4. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных

Изменение суммы и разности. *Если одно из слагаемых увеличить (уменьшить) на какое-нибудь число, то на это же число увеличится (уменьшится) и сумма*, т. е.

если $a + b = c$, то $(a + m) + b = c + m$ и $(a - m) + b = c - m$.