П. Чебышев

Полное собрание сочинений

Том 2. Математический анализ

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П. Чебышев
П11 Полное собрание сочинений: Том 2. Математический анализ / П. Чебышев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 94 с.

ISBN 978-5-458-49978-1

ISBN 978-5-458-49978-1

и т. д. невозможны в конечном виде, потому что при помощи циркуля и линейки нельзя вписать в круг правильный семиугольник, что необходимо для построения корней уравнения $x^4+2x^2-8x+9=0$*.

Есть и другие вопросы трансцендентного анализа, где тот же метод приведения может быть употребляем с пользою, именно когда желательно выразить сумму интегралов

$$\int^{x'} \frac{f_0 x}{\alpha x+\beta} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \int^{x''} \frac{f_0 x}{\alpha x+\beta} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \dots$$

при помощи суммы определенного числа подобных же интегралов с прибавлением к ней некоторой алгебраической или логарифмической функции.

Наконец, этот метод, приложенный к числам, дает нам прием, при помощи которого находится представление данного числа формою x^2-ny^2 во всех случаях, когда это число может быть представлено такою формою и когда известно значение x, при котором форма x^2-n делится на это число. В случае $n=-1$ это сводится к остроумному способу, употребленному Эрмитом для доказательства, что все простые числа вида $4k+1$ всегда разложимы на сумму двух квадратов и для выполнения вместе с тем такого разложения**.

§ II

Если в формулах нашего мемуара, упомянутого выше, сделаем

$$m=2, \qquad \Delta=\sqrt[m]{\theta x}=\sqrt{\theta x},$$

то найдем, что уравнение

$$x^m-1=0,$$

один из первообразных корней которого послужил нам для составления комплексных чисел, обращается в $x^2-1=0$; а так как первообразный корень этого уравнения равен -1, то комплексные числа, обозначенные нами через

$$M_i^0, \quad M_i', \quad M_i'', \quad \dots,$$

становятся вещественными и рациональными. Сверх того, общий вид логарифмических членов

$$A\log[\varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\cdots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)]$$

---

* Уравнение $x^4+2x^2-8x+9=0$ имеет резольвенту третьей степени

$$\theta^3+16\theta^2-64\cdot 8\cdot\theta-64^2=0, \tag{1}$$

где $\theta=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$. (См., например, I. Serret, Cours d'algèbre supérieur, II, 1879, стр. 478). Полагая $\theta=16\,y$, приведем уравнение (1) к виду

$$y^3+y^2-2y-1=0. \tag{2}$$

С другой стороны, уравнение деления окружности на семь частей

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

подстановкою $y=z+\frac{1}{z}$ также приводится к уравнению (2). — *Ред.*

** Ch. Hermite, Note sur un théorème rélatif aux nombres entiers (Journ. de math. pures et appl., I série, III (1848)); см. также Oeuvres de Ch. Hermite, I, 1905, стр. 264. — *Ред.*

по причине того, что $m=2$, $\Delta=\sqrt{\theta x}$, становится

$$A\log[(\varphi\sqrt{\theta x})\,\varphi^{-1}(-\sqrt{\theta x})]=A\log\frac{\varphi(\sqrt{\theta x})}{\varphi(-\sqrt{\theta x})};$$

а так как φ — целая функция, то получим

$$\varphi(\sqrt{\theta x})=X_0+X\sqrt{\theta x}, \qquad \varphi(-\sqrt{\theta x})=X_0-X\sqrt{\theta x}.$$

где X_0, X суть целые функции.

Итак, логарифмические члены в выражении интеграла $\int\frac{Fx}{fx}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ напишутся так:

$$A\log\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}.$$

Стараясь определить эти члены, мы нашли, что коэффициент A будет равен известной величине, деленной на неизвестное целое число, и если обозначить это число через n_i, то степень функции $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ выразится произведением $n_iM_i^0$, где M_i^0 — величина известная. Сверх того, эта функция для всех конечных значений x будет в конечном отношении с n_i-й степенью функции

$$(X-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}(x-x''')^{M_i'''}\cdots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)}),$$

где

$$M_i',\quad M_i'',\quad M_i''',\quad \ldots,\quad M_i^{(\lambda-1)}$$

в рассматриваемом нами случае вещественны и рациональны. Переходя к определению неизвестных n_i, X_0, X, мы замечаем, что n_i должно приводить произведения

$$n_iM_i^0,\quad n_iM_i',\quad n_iM_i'',\quad n_iM_i''',\quad n_iM_i^{(\lambda-1)}$$

к целым числам, ибо $n_iM_i^0$ означает степень $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, которая не может быть дробной, так как X_0, X — целые функции; то же самое имеет место относительно произведений

$$n_iM_i',\quad n_iM_i'',\quad n_iM_i''',\quad \ldots,\quad n_iM_i^{(\lambda-1)},$$

которые равны показателям $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, ..., $x-x^{(\lambda-1)}$ в первых членах разложения $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ по возрастающим степеням $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, ..., $x-x^{(\lambda-1)}$. Следовательно, n_i должно делиться на наименьший знаменатель, к которому могут быть приведены количества

$$M_i^0,\quad M_i',\quad M_i'',\quad \ldots,\quad M_i^{(\lambda-1)},$$

а потому, если обозначить этот знаменатель через σ и частное $\frac{n_i}{\sigma}$ через $+\rho$ или $-\rho$, будем иметь

$$n_i=\pm\rho\sigma,$$

где мы возьмем тот из двух знаков, который принадлежит M_i^0. Поэтому $n_i M_i^0$, степень $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, выразится через $\pm\sigma M_i^0\rho$, где $\pm\sigma M_i^0$ приводится к целому положительному числу. Обозначая это число через π и применяя для степени $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ обозначение Абеля* $\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, будем иметь относительно ρ такое уравнение:

$$\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho.$$

Что касается функции, которая при всех конечных значениях x остается в конечном отношении с функцией $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, то, в силу $n_i=\pm\rho\sigma$, она приводится к

$$\left[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}(x-x''')^{M_i'''}\cdots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})\right]^{\pm\rho\sigma},$$

а так как произведения $\sigma M_i'$, $\sigma M_i''$, ..., $\sigma M_i^{(\lambda-1)}$, по свойству числа σ, приводятся к целым числам, то функция

$$\left[(x-x')^{M_i'}\cdot(x-x'')^{M_i''}\cdot(x-x''')^{M_i'''}\cdots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})\right]^{\pm\sigma}$$

может быть только рациональной. Итак, если положим для сокращения

$$\left[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}(x-x''')^{M_i'''}\cdots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})\right]^{\pm\sigma}=\frac{u}{v},$$

где u, v суть целые функции, и если условимся обозначать через T все функции, которые остаются конечными, пока x не бесконечно, свойство рассматриваемой нами функции $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ выразится таким уравнением:

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}.$$

По этому-то уравнению, в соединении со следующим:

$$\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho,$$

мы должны отыскивать число ρ и функции X_0 и X.

Эти уравнения будут чаще всего очень сложны по причине высоких степеней функций u и v и значительной величины π. Но мы покажем, что их можно привести к такому виду, что сумма степени uv и числа π будет ниже степени $\sqrt{\theta x}$.

---

* См. N. H. Abel. Sur l'ntégration de la formule différentielle $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entières. Oeuvres, 1, 1881, стр. 108. — *Ред.*

§ III

Нетрудно убедиться, что если θ_1, θ_2 — целые функции, произведение которых равно θx, а p и q какие-нибудь целые функции, то искомую функцию $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ можно представить в виде

$$\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

выбирая подходящим образом целые функции P_0 и Q_0. В самом деле, частное

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}:\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho$$

приводится к выражению

$$\frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})\,(p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2})^\rho}{(X_0-X\sqrt{\theta x})\,(p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2})^\rho}=\frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})\,(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^\rho}{(X_0-X\sqrt{\theta x})\,(p\theta_1+q\sqrt{\theta x})^\rho},$$

которое можно представить в виде $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$, обозначая через P_0 рациональную часть произведения $(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^\rho$ и через $Q_0\sqrt{\theta x}$ ту часть, которая имеет множителем $\sqrt{\theta x}$.

Но если подставить в уравнения

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho \tag{1}$$

произведение $\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho\cdot\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ на место $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, они приведутся к таким:

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\cdot\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho,$$

$$\delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=\left(\pi-\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)\rho;$$

а если функции p и q выбраны так, что они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}=\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'}; \qquad \delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}=\pi_1,$$

то уравнения, которые определяют новые неизвестные P_0 и Q_0, становятся

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\,\rho. \tag{2}$$

Эти уравнения будут более или менее простыми, смотря по величинам p и q, употребленным в приведении, о котором мы только что сказали. Но мы покажем сейчас, что в приведенных уравнениях (2) сумма степени $u'v'$ и численного значения $\pi-\pi_1$ будет ниже степени $\sqrt{\theta x}$, если взять для p и q функции, находимые следующим образом:

1) Отыскиваем целую функцию S, для которой дроби $\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$ не становятся бесконечными, пока x остается конечным.

2) Разлагаем $\dfrac{S-\dfrac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta_1}}}{uv}$ в непрерывную дробь и среди подходящих дробей находим такую, степень знаменателя которой ниже $\sqrt{\frac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$, но за которой следует дробь со знаменателем степени высшей $\sqrt{\frac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$.

3) Обозначая эту дробь через $\frac{M}{N}$, принимаем

$$q=N, \qquad p=SN-Muv. \tag{3}$$

В самом деле, из уравнений (3) и из свойства функции S видно, что оба выражения

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

остаются конечными при всех конечных значениях x. Поэтому, если обозначить через

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\dots$$

значения x, обращающие эти выражения в 0, а через

$$f,\ f_1,\ f_2,\dots,\ g,\ g_1,\ g_2,\dots$$

показатели

$$x-\alpha,\quad x-\alpha_1,\quad x-\alpha_2,\dots,$$
$$x-\beta,\quad x-\beta_1,\quad x-\beta_2,\dots.$$

в их разложении по возрастающим степеням этих разностей, то будем иметь

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=T_1(x-\alpha)^f(x-\alpha_1)^{f_1}(x-\alpha_2)^{f_2}\cdots,$$
$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=T_2(x-\beta)^g(x-\beta_1)^{g_1}(x-\beta_2)^{g_2}\cdots,$$

где T_1, T_2 означают функции, остающиеся конечными при всех конечных значениях x.

Но так как показатели $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2,\dots$, $x-\beta$, $x-\beta_1$, $x-\beta_2,\dots$ в разложениях $\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$ не могут содержать других дробей, кроме $\frac{1}{2}$, то эти уравнения приведутся к такому виду:

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=T_1v'\sqrt{w}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=T_2u'\sqrt{w'}, \tag{4}$$

где u', v', w, w' суть целые функции, из которых две последние содержат только простые множители. Через перемножение этих уравнений находим

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = T_1T_2u'v'\sqrt{ww'},$$

а следовательно,

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv\,u'v'\sqrt{ww'}} = T_1T_2.$$

Это уравнение доказывает, очевидно, что T_1T_2 — величина постоянная; ибо, по свойству функций T_1T_2, их произведение не становится нулем или бесконечным при x конечном, между тем как это уравнение показывает, что квадрат T_1T_2 — дробь рациональная $\frac{(p^2\theta_1 - q^2\theta_2)^2}{(uv\,u'v')^2\,ww'}$, которая не может оставаться конечной для всех конечных значений x, если не приводится к постоянной величине. Итак

$$T_1T_2 = C,$$

а, следовательно, предыдущее уравнение становится

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv\,u'v'\sqrt{ww'}} = C. \tag{5}$$

Но это равенство предполагает, что ww' — полный квадрат, а так как w, w' состоят только из простых множителей, то это может иметь место только при

$$w = w'. \tag{6}$$

Поэтому, разделяя уравнения (4) одно на другое, находим

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}} = T\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'},$$

подставляя для сокращения T на место $\frac{T_1}{T_2}$.

Теперь нам остается доказать, что если сделать

$$\pi_1 = \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}},$$

то сумма $\delta(u'v')$ и численного значения $\pi - \pi_1$ будет ниже $\delta\sqrt{\theta x}$. А смотря по тому, будет ли $\pi - \pi_1$ положительным или отрицательным, эта сумма будет равна $\delta(u'v') + \pi - \pi_1$ или $\delta(u'v') - \pi + \pi_1$. Мы покажем, что эти два количества действительно меньше $\delta\sqrt{\theta x}$, если p и q определены так, как мы указали.

Чтобы в этом удостовериться, заметим, что после подстановки δx^π и $\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}$ на место π и π_1, эти количества становятся

$$\delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}x^\pi, \qquad \delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}.$$

Но, по уравнению (5), находим

$$\delta(u'v') \leqslant \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}.$$

Поэтому предыдущие количества равны или меньше таких.

$$\delta\,\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}\,x^{\pi}=2\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\delta\,\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\,x^{-\pi}=2\delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Но первое из этих количеств через подстановку значений p и q, по (3), становится

$$2\delta\,\frac{(SN-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{\frac{\pi}{2}}=\delta\sqrt{\theta x}+2\delta\left(\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}-\frac{M}{N}\right)N\sqrt{\frac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}},$$

количеством меньшим $\delta\sqrt{\theta x}$, если в ряде подходящих дробей $\dfrac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ за $\dfrac{M}{N}$ следует дробь со знаменателем степени высшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$. Относительно второго количества замечаем, что оно может быть представлено в таком виде:

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{q_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{2q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}\right],$$

и, следовательно, не превышает по крайней мере одной из двух величин

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}\right]=2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{\frac{\pi}{2}}\right]-2\pi,$$

$$2\delta\,\frac{q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}\,x^{-\frac{\pi}{2}}=\delta\sqrt{\theta x}-2\delta\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}.$$

Но так как мы нашли, что $2\delta\,\dfrac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta x}}\,x^{\frac{\pi}{2}}$ меньше $\delta\sqrt{\theta x}$, и так как мы взяли $q=N$, степени ниже $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$, то отсюда следует, что эти два количества ниже $\delta\sqrt{\theta x}$. Таким образом убеждаемся, что величины p и q, определенные по изложенному способу, действительно способны через подстановку

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho}\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$$

приводить уравнения

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho},\qquad \delta\,\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho$$

к таким:

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho},\qquad \delta\,\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho,$$

где сумма степени $u'v'$ и численного значения $\pi-\pi_1$ ниже степени $\sqrt{\theta x}$.

Мы покажем теперь, что это приведение будет всегда возможно, если первоначальные уравнения сами не удовлетворяют условию

$$\delta(uv)+\pi<\delta\sqrt{\theta x}.$$

Легко заметить, что определение p и q, о котором мы говорили, предполагает существование только двух подходящих дробей $\dfrac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ таких, что одна имеет знаменателем функцию степени низшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, между тем как у следующей знаменатель степени высшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

Но мы увидим, что это всегда будет иметь место, если условие $\delta(uv)+\pi<\delta\sqrt{\theta x}$ не выполнено и если разложить подходящим образом функцию θx на два множителя $\theta_1\cdot\theta_2$, именно так, чтобы $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ было дробной степени. В самом деле, при этих предположениях степень $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ выше 0, а, следовательно, если начать ряд подходящих дробей $\dfrac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ с $\dfrac{0}{1}$, где знаменатель нулевой степени, то, наверное, найдется между ними по крайней мере одна дробь со знаменателем степени высшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

Но тогда в бесконечном ряде подходящих дробей выражения $\dfrac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{\sqrt{uv}}$ найдутся непременно две последовательные дроби такие, что одна будет иметь знаменателем функцию степени низшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, между тем как знаменатель другой будет степени высшей $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, если только ни одна из подходящих дробей $\dfrac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ не будет иметь знаменателя той же степени, как $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$. Но этого не будет, если эта функция дробной степени, ибо при θx четной степени все подходящие дроби $\dfrac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}=\dfrac{s-\frac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$ содержат только целые степени x, а при θx нечетной степени степень $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1\cdot x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ имеет вид $k\pm\dfrac{1}{4}$, между тем как дробные степени x в функции $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ имеют вид $k+\frac{1}{2}$.

Заметим еще, что в ряде подходящих дробей $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}=\frac{S-\frac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$ дробные степени x встретятся только после дроби $\frac{M}{N}$, служащей для нахождения функций p и q. В самом деле, дробные степени x могут входить только, если θx степени нечетной. Но тогда все функции вида $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, очевидно, нулевой степени, а следовательно $\pi=0$. Но если π равно нулю, то на основании сказанного нами об определении p и q знаменатель N будет степени низшей $\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}$, и при таком знаменателе подходящая дробь дает, вообще, функцию, из которой она получается через разложение в непрерывную дробь, только с точностью до количества порядка высшего $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}\right)^2}=\frac{\sqrt{\theta x}}{\theta_1}\frac{1}{uv}=\frac{1}{uv}\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$. Но иррациональная часть $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ именно точно такого порядка.

Итак, в этом случае эта часть не имеет никакого влияния на дробь $\frac{M}{N}$, так что можно ее выпустить в формуле $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ и отыскивать $\frac{M}{N}$, разлагая только $\frac{S}{uv}$ в непрерывную дробь.

§ IV

Теперь мы покажем, что можно извлечь из только что изложенного приведения для решения уравнений

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho,$$

когда θx третьей или четвертой степени. По нахождении функций p и q, как мы сказали, полагая

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

приходим к таким уравнениям:

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho, \qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho.$$

Чтобы найти функцию $\frac{u'}{v'}$, разделим $p^2\theta_1 - q^2\theta_2$ на uv. Из способа, служившего нам для нахождения функций p и q. ясно, что частное от этого деления будет степени низшей $\sqrt{\theta x}$, а, следовательно, когда θx третьей или четвертой степени, это частное представится вообще через $ax+b$. Но, по уравнениям (5), (6), это частное равно $u'v'w$ с постоянным множителем. Поэтому одна из трех функций

$$u', \quad v', \quad w$$

будет равна $ax+b$, а другие обратятся в постоянные величины, и, следовательно, придем к одному из трех случаев

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{ax+b}, \qquad \frac{u'}{v'} = ax+b, \qquad \frac{u'}{v'} = \textit{пост. величине.}$$

Но полагая $x = -\frac{b}{a}$ в уравнениях (4), где, по (6), $w' = w$, увидим, что первый случай имеет место, если это значение x делает

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

второй, если

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0$$

и, наконец, третий, если при $\frac{b}{a}$ находим в одно и то же время

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0.$$

Итак, если условиться обозначать через ε величину, которая обращается в

$$+1, \quad -1, \quad 0,$$

смотря по тому, получается ли при $x = -\frac{b}{a}$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

или

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

или одновременно

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

то величина $\frac{v'}{u'}$ будет дана уравнением

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}.$$

Поэтому уравнения, определяющие P_0, Q_0 и ρ, становятся

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{T}{(ax+b)^{\varepsilon\rho}}, \qquad \delta\,\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho. \tag{7}$$