

Ф.А. Орехов

**Решение задач методом
составления уравнений**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ф11

Ф.А. Орехов
Ф11 Решение задач методом составления уравнений / Ф.А. Орехов – М.: Книга по Требованию, 2013. – 158 с.

ISBN 978-5-458-35542-1

Цель настоящего пособия - помочь начинающим учителям в выборе методов обучения по решению задач. Пособие написано на основе многолетней работы автора в школах, изучения опыта лучших учителей города Магнитогорска и анализа методической литературы по этому вопросу. Естественно, что рекомендации автора следует рассматривать как один из возможных вариантов обучения детей решению задач. Каждый учитель, используя эти рекомендации, может сам внести в методику решения задач много нового и полезного, сочетая приведённые рекомендации с другими приёмами. Особое значение имеет выработка общих и специальных методов решения задач, формирование умений и навыков математической обработки различных фактов из реальной жизни.

ISBN 978-5-458-35542-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

... Составление уравнения данной задачи есть основной прием, посредством которого математика применяется к естествознанию и технике. Без уравнения нет математики как средства познания природы.

П. С. Александров

В методической литературе, в официальных указаниях Министерства просвещения, в практике лучших учителей большое внимание уделяется воспитательной задаче обучения математике, формированию и развитию мышления детей, выработке рациональных качеств мышления (порядка, точности, сжатости, схематизации).

Особое значение при этом приобретает выработка общих и специальных методов решения задач, формирование умений и навыков математической обработки различных фактов из реальной жизни.

Наука и жизнь требуют от школы не только сообщения определенных познавательных фактов своим воспитанникам, но и систематического ознакомления их с идеями и методами науки, передачи им интеллектуального опыта человечества.

В книге «Алгоритмизация в обучении» Л. Н. Ланда справедливо замечает, что ученики «при изучении математики имеют знания о содержании учебного материала — знают теоремы и правила, но не знают общих методов решения задач, не владеют необходимыми в данном случае приемами рассуждений...

Учителя специально этим приемом часто не обучают учащихся. Это и неудивительно, поскольку многие из этих приемов не выявлены и не сформулированы в самой науке» ([32], стр. 27).

Важно не только сообщить учащимся сведения об этих приемах и методах, но и добиться того, чтобы приобретенные знания о методах ученики фиксировали. Это диктуется еще и тем, что в существующих учебниках и сборниках для учащихся недостаточно указаний, касающихся общелогических и специальных методов познания, применяемых при изучении математики в школе. Мало таких указаний и по решению задач методом составления уравнений.

Разрозненные указания учителей, как правило, учащимися не записываются и не систематизируются. Поэтому все эти указания, рассчитанные только на память, быстро забываются учениками, и решение каждой новой задачи они начинают как бы «без руля и без ветрил».

Хотя в учебниках по алгебре имеются образцы решения задач и некоторые указания к составлению уравнений, эти разъяснения не дают ученику достаточно прочной основы к овладению решением задач.

Есть и другие причины неудовлетворительного решения учащимися задач методом уравнений.

Учителя мало внимания уделяют конструированию составных задач из основных, а также анализу задач. В школьных учебниках мало внимания уделяется системе конструктивных упражнений по составлению задач.

Необходимо отметить еще и то, что в практике многих учителей преобладает прием длинного словесного объяснения решения задачи методом составления уравнений.

К причинам неудовлетворительного решения задач следует отнести слабые навыки учащихся в схематической и символической запи-

си условия, способствующей анализу и синтезу задачи, более яркому выражению зависимостей между величинами, входящими в задачу.

Многие учащиеся слабо представляют себе функциональную зависимость между величинами, входящими в задачу, не умеют выражать эту зависимость в символах и потому плохо переводят словесные тексты на абстрактный язык математики.

Некоторые учащиеся не понимают, что значит решить задачу, и потому дают неполное решение задачи, пишут в ответе корень уравнения, не являющийся решением задачи.

1. Идеи и принципы содержания и методики решения задач.

Понятие функциональной зависимости должно стать не только одним из важнейших понятий школьного курса математики, но и основным стержнем, проходящим от элементарной арифметики до высших разделов алгебры, геометрии и тригонометрии, вокруг которого группируется все математическое преподавание.

А. Я. Хинчин

Обучение учащихся решению задач содержит в себе две важные составные части: выполнение подготовительных упражнений и решение текстовых задач.

В процессе обучения решению задач ученики должны в известной мере овладевать основными идеями школьной математики, а именно:

функциональной зависимости;
равенства, неравенства;
тождественных преобразований;
соответствия, порядка, расположения;
непрерывности;
доказуемости заключений относительно свойств пространственных форм и количественных соотношений в них;
применимости числа и меры к явлениям окружающего мира.

Система работ по формированию у школьников умений и навыков выполнения подготовительных упражнений и решения задач должна строиться на определенных принципах. В данной работе к таким общим и методико-математическим принципам относятся:

1. Гносеологический принцип познания — единство анализа и синтеза.

2. Методико-математические принципы:

Идейно-теоретическая направленность в обучении, особенно использование идей функциональной зависимости.

Овладение общелогическими и специальными методами познания, применяемыми при изучении математики в школе, особенно методами исследования различных процессов на основе учета всех возможных разновидностей данной ситуации, всех возможных соотношений между величинами, входящими в задачу.

Конструктивный подход к решению задач.

Ретроспективный и перспективный подход к решению задач, принцип обратной связи.

Повторяемость упражнений по спирали с постепенным усложнением, включением новых знаний в систему ранее приобретенных.

Самостоятельность выполнения упражнений каждым учеником, внедрение элементов индивидуализации обучения детей в коллективе.

Самообучение и взаимное обучение.

Все задачи школьной математики сводятся к небольшому числу зависимостей, которые приводят к нескольким типам уравнений. Ряд авторов, в том числе Н. Островский и А. Н. Барсуков, указывают следующие виды уравнений, к которым сводится решение задач методом составления уравнений первой степени.

1-й тип задач. Задачи, приводящие к уравнениям вида $f(x) = c$. Например, $ax + b = c$.

Задачи этого типа тесно связаны с арифметическими задачами на зависимость между компонентами и результатами действий. Сюда относятся и задачи на деление с остатком.

2-й тип задач. Задачи, приводящие к уравнению вида: $f(x) = \varphi(x)$. Например, $ax + b = cx + d$.

Эти задачи алгебраического характера.

3-й тип задач. Задачи, приводящие к разностному или краткому сравнению величин путем сопоставления значений двух алгебраических выражений однородных величин. Решение таких задач приводит к уравнениям вида:

а) $f(x) = \varphi(x + m)$. Например, $ax + b = (cx + d) + m$;

б) $f(x) = k\varphi(x)$. Например, $ax + c = k(cx + d)$.

В некоторых пособиях третий тип задач рассматривают как варианты второго типа.

Задачи школьной математики, приводящие к квадратным уравнениям, в своей основе содержат комбинации двух линейных функций и их произведений, а также соотношения между функциями второй степени, аналогичные соотношениям, приведенным в трех типах задач для уравнений первой степени.

Функциональный подход к решению задач будет действовать формированию у учащихся умений и навыков в исследовании процессов реальной жизни, развитию их функционального мышления, способностей в анализе и синтезе, в индукции и дедукции. Без функционального подхода мы волей-неволей будем учить лишь решению отдельных задач, в итоге учащиеся из-за этих задач не увидят математики, ее идей и методов.

Особое значение в развитии функционального мышления имеет составление таблиц, схем, графиков, диаграмм и формул.

2. Организация процесса учения детей при решении задач

Я готов думать, что если учение математике, столь свойственное уму человеческому, остается для многих безуспешным, то это по справедливости должно приписать недостатком в искусстве и способе преподавания.

Н. И. Лобачевский [14]

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Рассматривая содержание и методику подготовительных упражнений, мы должны ответить на следующие вопросы:

1. Какие упражнения следует выполнять?
2. Зачем их выполнять?
3. Когда их выполнять?
4. Как при этом будут работать дети, какие качества при этом у них будут воспитываться?

Что и зачем выполнять? Подготовительные упражнения можно разбить на две группы:

1. Система упражнений, не связанных с изучением текущего материала. Цель таких упражнений — систематическое повторение основных фактов и теоретических положений, уяснение логики и структуры изучаемой дисциплины.

2. Система упражнений, преследующих подготовку учащихся к решению составных задач, с которыми ученики ранее не встречались.

Эти два положения отвечают на первые два вопроса: что выполнять и зачем выполнять.

Важное значение для составления уравнений по условию задач имеют навыки в записи алгебраических выражений, равенств, неравенств с целью уяснения основных понятий и соотношений: равно, больше на столько-то, больше во столько-то раз, процент, отношение и др.

Для отработки этих понятий и соотношений между ними необходимы систематические упражнения в записи алгебраических выражений во всех классах восьмилетней школы. Существенно важно, чтобы упражнения носили не только абстрактный характер, но и характер практически целесообразных задач.

Полезно, чтобы каждый ученик приобрел умения и навыки в записи под диктовку учителя алгебраических выражений, соответствующих сущности основных понятий, зависимостей и соотношений. Большое значение имеет запись формул, выражающих функциональную зависимость между величинами. Упражнения такого рода важны для уяснения учащимися сущности функциональной зависимости, аналитического выражения этой зависимости, развития функционального мышления.

Приведем упражнения, которые целесообразно давать систематически, повторяя их время от времени.

1. Скорость равномерного движения тела v , время движения t , путь s . Запишите формулы для определения s , v и t .

2. Цена товара K , количество товара m , стоимость c . Запишите формулы зависимости между c , K и m .

3. Производительность труда n , время работы t , объем выполненной работы A . Выразите зависимость формулами для A , n и t .

4. Приняв объем работы за 1, запишите формулу зависимости между производительностью n , временем, необходимым для выполнения этой работы, t и объемом работы 1.

5. Мощность двигателя w , время работы t , работа A . Выразите зависимость формулами для A , w и t .

6. Расход горючего на 1 км пути составляет $n \frac{\text{л}}{\text{км}}$, пробег машины s км, объем израсходованного горючего v л. Выразите зависимость формулами для v , s и n .

7. Длина окружности колеса C , число оборотов, сделанных колесом n , пройденный путь s . Выразите зависимость формулами для C , s и n .

8. Два шкива соединены ременной передачей. Выразить формулой зависимость между длинами их окружностей C_1 и C_2 и числом оборотов n_1 и n_2 , которые делают шкивы в единицу времени. Выразите каждую из четырех величин через остальные три.

9. Выразите формулой количественное состояние величины, если ее начальное состояние H , происшедшее изменение M , конечное состояние K . (Возможны случаи: $H \pm M = K$; $H \cdot M = K$; $H : M = K$.)

10. Резервуар объемом V наполняется трубой за t ч, производительность трубы n л в час. Выразите зависимость между величинами формулой V , n и t .

11. Приняв объем резервуара за 1, выразите зависимость между производительностью n трубы, наполняющей резервуар, временем наполнения t и объемом 1.

12. Вкладчик внес в кассу a руб. по 3% годовых. Выразите его капитал через год формулой, обозначив этот капитал буквой A .

13. Вкладчик внес в сберкассу a руб. по $p\%$ годовых. Выразите его капитал через год, обозначив этот капитал буквой K .

14. Выразите формулой зависимость между массой m , объемом v и плотностью d . Запишите выражения для каждой величины.

15. При делении 20 на 6 в частном получается 3 и в остатке 2. Свяжите все эти числа формулой. Выразите каждое число через другие.

16. Выразите формулой зависимость между делимым a , делителем b , частным q и остатком r . Выразите каждое число через остальные.

17. Составьте эскизы известных фигур и запишите формулы для вычисления их площадей, обозначив стороны основания буквами a и b , высоту буквой h , радиус r , площадь S с соответствующими индексами, например площадь треугольника S_3 .

18. Запишите формулы для вычисления объемов известных вам тел, составив предварительно эскизы и обозначив необходимые элементы.

19. Урожай с одного гектара $a \frac{ц}{га}$, площадь S га, вес урожая P ц. Выразить зависимость между a , S и P формулой.

20. Собственная скорость катера v_c , скорость течения воды v_b , скорость против течения v_n , скорость по течению v_t . Разность между скоростями по течению и скоростью против течения ($v_t - v_n$). Составьте различные формулы, содержащие эти величины.

В отдельных упражнениях целесообразно указывать размерность величин.

Подготовительные упражнения полезно выполнять во всех разделах школьной математики в сочетании с изучением текущего материала.

Перед решением сложных задач полезны постепенно усложняющиеся упражнения, приводящие в конечном итоге к рассматриваемому типу задач. Главным в этих упражнениях следует считать выявление закономерностей, установление функциональной зависимости, выражение этой зависимости формулой.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых выявление закономерностей приводит к необходимому уравнению.

Задача. При выпечке ржаного хлеба припек составляет 0,3 массы взятой муки. Сколько муки нужно взять, чтобы получить 26 кг печеного хлеба?

В задаче очень важно установить функциональную зависимость между весом муки, весом печеного хлеба и припеком.

В этих целях полезно составить следующую таблицу, отражающую своеобразный эксперимент по составлению задач.

Масса муки (P_m кг)	Припек (в частях)	Припек (в кг)	Масса хлеба (P_x кг)
1	0,3	$1 \cdot 0,3 = 0,3$	$1 + 0,3 = 1,3$
2			$1,3 \cdot 2$
3			$1,3 \cdot 3$
P_m			$P_x = 1,3 \cdot P_m$

Во втором и последующих случаях результаты записываются на основании пропорциональности веса хлеба и веса муки.

В итоге проведенного исследования получается общая формула для решения прямой и обратной задачи.

$$P_x = 1,3 \cdot P_m; \quad P_m = \frac{P_x}{1,3} \left. \begin{array}{l} \text{Она же дает возможность} \\ \text{определить коэффициент} \\ \text{пропорциональности и про-} \\ \text{цент припека } K \text{ из формулы} \\ P_x = K \cdot P_m. \end{array} \right\}$$

Сам процесс решения таких задач способствует тому, чтобы учащиеся овладевали идеей функциональной зависимости между величинами, входящими в задачу, методами и техникой расчетов.

Можно высказать одно общее пожелание учителям: прежде чем приступить с учениками к решению составной задачи, целесообразно на уроке составить вместе с ними аналогичную задачу из основных простых, комбинируя и усложняя последние. Тот, кто научился хорошо строить, будет хорошо разбирать построенное без лишних потерь времени и сил. Пример таких задач дан на странице 83—84.

Когда выполнять подготовительные упражнения? Упражнения, не связанные с изучением текущего материала, направленные на усвоение основных фактов, идей и методов, целесообразно выполнять систематически с определенной повторяемостью, по спирали, обогащая известное новыми фактами. В практике работы лучших учителей Магнитогорска установилось правило: каждый