

**Р. Курант**

**Курс дифференциального и  
интегрального исчисления**

**Том 1**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
P11

**Р. Курант**  
P11 Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 / Р. Курант – М.: Книга по Требованию, 2013. – 704 с.

**ISBN 978-5-458-33896-7**

Книга представляет собой мастерски написанный крупным математиком курс математического анализа, адресуемый автором «будущим учителям и научным работникам в области математики, физики и других естественных наук, а также инженерам». Первый том был впервые издан на русском языке в 1931 г. Настоящий перевод первого тома содержит: дифференциальное и интегральное исчисление функций одного переменного, очерк теории функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения простейших типов колебаний. В него включены многочисленные добавления автора, появившиеся в последующих изданиях на немецком и английском языках, в частности тщательно подобранные и систематизированные упражнения и задачи. Второй том посвящен главным образом дифференциальному и интегральному исчислению функций многих переменных. По сравнению с первым русским изданием, вышедшим в 1931 г., настоящий перевод содержит многочисленные добавления автора, появившиеся в последних изданиях на немецком и английском языках. Книга может служить учебным пособием по математическому анализу для студентов и преподавателей университетов, педагогических институтов и вузов.

**ISBN 978-5-458-33896-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



# ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчиков . . . . .	14
Из предисловия автора к первому немецкому изданию . . . . .	16
Из предисловия автора к первому английскому изданию . . . . .	17
Предисловие автора ко второму английскому изданию . . . . .	18
Из предисловия автора к третьему немецкому изданию . . . . .	18
Вводные замечания . . . . .	19
<b>Глава I. Подготовительный материал . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Числовой континуум . . . . .	21
1. Система рациональных чисел и необходимость ее расширения (21). 2. Континуум действительных чисел и бесконечные десятичные дроби (23). 3. Системы счисления, отличные от десятичной (26). 4. Неравенства (27). 5. Неравенство Шварца (27). Упражнения (28).	
§ 2. Понятие функции . . . . .	29
1. Примеры (29). 2. Интервалы или промежутки (30). 3. Определение понятия функции (31). 4. Графическое изображение. Однозначность и многозначность. Непрерывность. Монотонные функции (31). 5. Обратные функции (35).	
§ 3. Обзор элементарных функций . . . . .	37
1. Рациональные функции (37). 2. Алгебраические функции (38). 3. Тригонометрические функции (39). 4. Показательная функция и логарифм (40). Упражнения (41).	
§ 4. Функции целочисленной переменной. Числовые последовательности. Полная индукция . . . . .	42
1. Определение и примеры (42). 2. Принцип полной индукции (43). 3. Пример: сумма первых $n$ квадратов (45). Упражнения (46).	
§ 5. Понятие предела последовательности чисел. Примеры . . . . .	46
1. $a_n = 1/n$ (46). 2. $a_{2m} = 1/m$ ; $a_{2m-1} = 1/2m$ (47). 3. $a_n = n/(n+1)$ (48). 4. $a_n = \sqrt[n]{p}$ (48). 5. $a_n = \alpha^n$ (50). 6. Геометрическая иллюстрация пределов $\alpha^n$ и $\sqrt[n]{p}$ (51). 7. Геометрическая прогрессия (52). 8. $a_n = \sqrt[n]{n}$ (53). 9. $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ (54). 10. $a_n = n/\alpha^n$ (54). Упражнения (55).	
§ 6. Более точное рассмотрение понятия предела . . . . .	56
1. Первое определение сходимости (56). 2. Второе (внутреннее) определение сходимости (57). 3. Монотонные последовательности (60). 4. Действия над пределами (61). 5. Число $e$ (62). 6. Доказательство иррациональности числа $e$ (64). 7. Число $\pi$ как предел (64). 8. Арифметически-геометрическое среднее (65). 9. Мотивировка точного определения предела (66). Упражнения (67).	
§ 7. Понятие предела функции непрерывной переменной . . . . .	68
1. Определение и примеры (68). Упражнения (71). 2. Мотивировка определения предела функции непрерывной переменной (71).	

§ 8. Понятие непрерывности . . . . .	73
1. Определения (73). 2. Точки разрыва (75). 3. Теоремы о непрерывных функциях (78). Упражнения (78).	
Дополнение I к главе I . . . . .	79
Предварительные замечания . . . . .	79
§ 1. Принцип точки сгущения и его приложения . . . . .	80
1. Принцип точки сгущения (80). 2. Пределы числовых последовательностей (81). 3. Доказательство критерия сходимости Коши (84). 4. Существование предела у ограниченной монотонной последовательности (84). 5. Верхняя и нижняя точка сгущения, точная верхняя и точная нижняя граница числового множества (85).	
§ 2. Теоремы о непрерывных функциях . . . . .	86
1. Наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций (86). 2. Равномерность непрерывности (87). 3. Теорема о промежуточном значении (89). 4. Обращение непрерывной монотонной функции (90). 5. Дальнейшие теоремы о непрерывных функциях (91).	
§ 3. Некоторые замечания об элементарных функциях . . . . .	91
Упражнения (93).	
Дополнение II к главе I . . . . .	94
§ 1. Полярные координаты . . . . .	94
§ 2. Некоторые замечания о комплексных числах . . . . .	95
Упражнения (97)	
Смешанные упражнения к главе I . . . . .	97
Глава II. Основные понятия интегрального и дифференциального исчисления . . . . .	102
§ 1. Определенный интеграл . . . . .	102
1. Интеграл как площадь (103). 2. Аналитическое определение интеграла (104). 3. Дополнения, обозначения и основные свойства определенного интеграла (106).	
§ 2. Примеры . . . . .	108
1. Интегрирование линейной функции (108). 2. Интегрирование функций $x^2$ (109). 3. Интегрирование $x^\alpha$ при любом целом положительном значении $\alpha$ (110). 4. Интегрирование $x^\alpha$ при произвольном рациональном значении $\alpha \neq -1$ (111). 5. Интегрирование функций $\sin x$ и $\cos x$ (112). Упражнения (113).	
§ 3. Производная . . . . .	114
1. Производная и касательная к кривой (114). 2. Производная как скорость (119). 3. Примеры (120). 4. Некоторые основные правила дифференцирования (122). Упражнения (122). 5. Дифференцируемость и непрерывность функций (122). 6. Производные высших порядков и их значение (124). Упражнения (124). 7. Производные и отношения приращений; обозначения Лейбница (126). 8. Теорема Ролля (128). 9. Теорема о среднем значении (129). 10. Приближенное представление любой дифференцируемой функции с помощью линейной. Дифференциал (132). 11. Дифференциалы высших порядков (133). 12. Замечания относительно применения наших понятий в естествознании (134). Упражнения (135).	
§ 4. Неопределенный интеграл, первообразная функция и основные теоремы дифференциального и интегрального исчисления . . . . .	136
1. Определенный интеграл как функция верхнего предела (136). 2. Производная неопределенного интеграла (137). 3. Первообразная функция; общее определение неопределенного интеграла (140). 4. Применение первообразной функции к вычислению определенных интегралов (143). 5. Примеры (145). Упражнения (146).	
§ 5. Простейшие методы графического интегрирования . . . . .	146
Упражнения (149).	

§ 6. Дальнейшие замечания о связи между интегралом и производной . . . . .	149
1. Распределение массы и плотность; общее количество и удельное количество (149). 2. Точка зрения приложений (151).	
§ 7. Оценка интегралов и теорема о среднем значении интегрального исчисления . . . . .	153
1. Теорема о среднем значении в интегральном исчислении (153). 2. Непрерывная зависимость определенного интеграла от подынтегральной функции (155). 3. Приложение. Интегрирование и дифференцирование функции $x^a$ при любом иррациональном значении $a$ (157). Упражнения (158).	
Дополнение к главе II . . . . .	159
§ 1. Доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции . . . . .	159
§ 2. Связь между теоремами о среднем значении дифференциального и интегрального исчисления . . . . .	161
Упражнение (163).	
Смешанные упражнения к главе II . . . . .	163
Глава III. Дифференцирование и интегрирование элементарных функций . . . . .	166
§ 1. Простейшие правила дифференцирования и их применение . . . . .	166
1. Правила дифференцирования (166). 2. Дифференцирование рациональных функций (168). 3. Дифференцирование тригонометрических функций (170).	
§ 2. Соответствующие формулы интегрирования . . . . .	170
1. Общие правила интегрирования (170). 2. Интегрирование простейших функций (171). Упражнения (172)	
§ 3. Обратная функция и ее производная . . . . .	173
1. Общая формула дифференцирования (173). 2. Обратная функция от степенной функции (176). 3. Обратные тригонометрические функции (177). 4. Соответствующие формулы интегрирования (179). Упражнения (181).	
§ 4. Дифференцирование сложной функции . . . . .	181
1. Правило дифференцирования сложной функции — правило цепочки (181). 2. Примеры (183). 3. Дифференциал сложной функции. Инвариантность дифференциала (184). 4. Еще раз об интегрировании и дифференцировании $x^a$ при иррациональном значении $a$ (185). Упражнения (186).	
§ 5. Максимумы и минимумы . . . . .	187
1. Геометрическое значение второй производной. Выпуклость и вогнутость кривой (187). 2. Максимумы и минимумы (189). 3. Примеры максимумов и минимумов (192). Упражнения (196).	
§ 6. Логарифмическая и показательная функции . . . . .	197
1. Определение логарифмической функции. Формула дифференцирования (197). 2. Теорема сложения (199). 3. Монотонность логарифмической функции. Совокупность ее значений (200). 4. Обратная функция от логарифма (показательная функция) (201). 5. Общая показательная функция $a^x$ и общая степенная функция $x^a$ (203). 6. Представление показательной и логарифмической функций в виде пределов (204). 7. Заключительные замечания (206). Упражнения (206).	
§ 7. Некоторые приложения показательной функции . . . . .	207
1. Дифференциальное уравнение, характеризующее показательную функцию (207). 2. Непрерывное начисление процентов. Радиоактивный распад (208). 3. Охлаждение или нагревание тела в окружающей среде (209). 4. Зависимость атмосферного давления от высоты над поверхностью земли (210). 5. Ход химических реакций (211). 6. Замыкание и размыкание электрического тока (211). Упражнения (212).	
§ 8. Гиперболические функции . . . . .	212
1. Аналитическое определение (212). 2. Теоремы сложения и формулы дифференцирования (214). 3. Обратные гиперболические функции (215). 4. Дальнейшие аналогии (216). Упражнения (218).	

§ 9. Порядок роста и порядок малости функций . . . . .	218
1. Понятие о порядке роста. Простейшие случаи (218). 2. Порядок роста показательной и логарифмической функций (219). 3. Общие замечания (221). 4. Порядок роста функции в окрестности произвольной точки (221). 5. Порядок малости функции (222). Упражнения (223).	
Дополнения к главе III . . . . .	223
§ 1. Рассмотрение некоторых конкретных функций . . . . .	223
1. Функция $y = e^{-1/x^2}$ (223). 2. Функция $y = e^{-1/x}$ (224). 3. Функция $y = \operatorname{th} \frac{1}{x}$ (224). 4. Функция $y = x \operatorname{th} \frac{1}{x}$ (225). 5. Функция $y = x \sin \frac{1}{x}$ , $y(0) = 0$ (226).	
§ 2. Замечания относительно дифференцируемости функций . . . . .	226
§ 3. Различные частные вопросы . . . . .	228
1. Доказательство бинома Ньютона (228). 2. Последовательное дифференцирование. Правило Лейбница (228). 3. Дальнейшие примеры применения правила цепочки. Обобщенная теорема о среднем значении (229). Упражнения (230).	
Смешанные упражнения к главе III . . . . .	230
Глава IV. Дальнейшее построение интегрального исчисления . . . . .	234
§ 1. Таблица элементарных интегралов . . . . .	235
§ 2. Метод замены переменной (метод подстановки) . . . . .	237
1. Формула замены переменной (237). 2. Другое доказательство формулы преобразования переменной (240). 3. Примеры. Формулы интегрирования (242).	
§ 3. Дальнейшие примеры интегрирования методом замены переменной . . . . .	243
Упражнения (247).	
§ 4. Интегрирование произведения (интегрирование по частям) . . . . .	248
1. Общие соображения (248). 2. Другая запись формулы интегрирования произведения (250). 3. Примеры (252). Упражнения (253). 4. Своеобразный случай интегрирования произведения (253). Упражнения (255). 5. Обобщенная формула интегрирования произведения (интегрирования по частям) (255). Упражнения (260). 6. Рекуррентные формулы (261). 7. Формула Валляса (263). 8. Преобразование повторного ( $n$ -кратного) интеграла к виду обыкновенного (однократного) интеграла (265). Упражнения (266).	
§ 5. Интегрирование рациональных функций . . . . .	267
1. Основные типы (267). 2. Интегрирование основных типов (269). 3. Разложение дробной рациональной функции на элементарные дроби (270). 4. Пример. Химические бимолекулярные реакции (272). 5. Дальнейшие примеры разложения на простые дроби (метод неопределенных коэффициентов) (273). Упражнения (275).	
§ 6. Интегрирование некоторых других классов функций . . . . .	275
1. Предварительные замечания о рациональном представлении тригонометрических и гиперболических функций (275). 2. Интегрирование рациональной функции от $\cos x$ и $\sin x$ (277). 3. Интегрирование рациональной функции от $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ (278). 4. Интегрирование рациональной функции от $x$ и $\sqrt{1-x^2}$ (278). 5. Интегрирование $R(x, \sqrt{x^2-1})$ (278). 6. Интегрирование $R(x, \sqrt{x^2+1})$ (278). 7. Интегрирование $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ (279). 8. Дальнейшие примеры приведения к интегралам от рациональных функций (280). 9. Замечания по поводу примеров (280). Упражнения (281).	
§ 7. Замечания относительно функций, не интегрирующихся в элементарных функциях . . . . .	282
1. Определение функций с помощью интегралов. Эллиптические интегралы (282). 2. Замечания по существу относительно дифференцирования и интегрирования (284).	
§ 8. Обобщение понятия интеграла. Несобственные интегралы . . . . .	285
1. Функции с конечными разрывами (285). 2. Функции с бесконечными разрывами (285). 3. Бесконечный промежуток интегрирования (289). 4. Гамма-функция (291). 5. Интеграл Дирихле (292). 6. Замена переменной в несобственном интеграле (293). Упражнения (295).	

Дополнительные упражнения к главе IV . . . . .	296
Дополнение к главе IV. Вторая теорема о среднем значении в интегральном исчислении . . . . .	297
Смешанные упражнения к главе IV . . . . .	299
<b>Глава V. Приложения . . . . .</b>	<b>302</b>
§ 1. Аналитическое задание кривой . . . . .	302
1. Параметрическое задание кривой (302). 2. Физическое истолкование параметра. Преобразование параметра (304). 3. Производные от координат по параметру для кривой, заданной в параметрическом виде (306). 4. Переход к новым системам координат при параметрическом задании кривой (309). 5. Замечания общего характера (310). Упражнения (310).	
§ 2. Приложения к теории плоских кривых . . . . .	311
1. Ориентация области и знак ее площади (311). 2. Общее выражение для площади, ограниченной замкнутой кривой (в прямоугольных координатах) (313). 3. Пример: площадь эллипса (317). 4. Независимость от выбора системы координат и от выбора параметра (317). 5. Площадь в полярных координатах (318). 6. Длина дуги кривой (319). 7. Параметрическое выражение для длины дуги. Длина дуги в полярных координатах (322). 8. Кривизна кривой (324). 9. Статистический момент кривой и ее центр массы (центр тяжести) (327). 10. Площадь поверхности вращения и объем тела вращения (329). 11. Момент инерции (329).	
§ 3. Примеры . . . . .	331
1. Обыкновенная циклоида (331). 2. Цепная линия (332). 3. Эллипс и лемниската (332). Упражнения (333).	
§ 4. Простейшие задачи механики точки . . . . .	335
1. Основные допущения механики (335). 2. Свободное падение. Соппротивление воздуха (337). 3. Простейшее упругое колебание (338). 4. Общий случай движения по заданной кривой (339). Упражнения (341).	
§ 5. Дальнейшие приложения. Падение материальной точки по заданной кривой . . . . .	342
1. Общие соображения (342). 2. Исследование движения (344). 3. Обыкновенный маятник (345). 4. Циклоидальный маятник (346).	
§ 6. Работа и энергия . . . . .	347
1. Общие замечания (347). 2. Взаимное притяжение двух масс (350). 3. Растягивание пружины (350). 4. Заряженный конденсатора (351).	
Дополнения к главе V . . . . .	351
§ 1. Свойства эволюты . . . . .	351
Упражнения (357).	
§ 2. Площади фигур, ограниченных замкнутыми кривыми . . . . .	357
Смешанные упражнения к главе V . . . . .	360
<b>Глава VI. Формула Тэйлора и приближение функций многочленами . . . . .</b>	<b>362</b>
§ 1. Логарифм и арктангенс (362) . . . . .	
1. Логарифм (362). 2. Арктангенс (365). Упражнения (366).	
§ 2. Формула Тэйлора . . . . .	366
1. Формула Тэйлора для целых рациональных функций (366). 2. Формула Тэйлора для любой функции (367). 3. Другой вывод формулы Тэйлора с остаточным членом (370). 4. Оценка остаточного члена (371). Упражнения (372).	
§ 3. Приложения. Разложение элементарных функций в ряд Тэйлора 373	
1. Показательная функция. Иррациональность числа $e$ (373). 2. Разложение в ряд	

функций $\sin x$ , $\cos x$ , $\operatorname{sh} x$ , $\operatorname{ch} x$ (375). 3. Биномальный ряд (376). Упражнения (377).	
§ 4. Нули и бесконечности функций. «Неопределенные выражения» . . . . .	378
Упражнения (381).	
§ 5. Приложения к геометрии . . . . .	381
1. Касание кривых (381). 2. Окружность кривизны как соприкасающаяся окружность (383). 3. Применение к теории максимумов и минимумов (384). Упражнения (385).	
Дополнения к главе VI . . . . .	385
§ 1. Пример функции, не разлагающейся в ряд Тэйлора . . . . .	385
§ 2. Общая теорема о разложимости в ряд Тэйлора функции, имеющей неотрицательные производные любого порядка. Биномиальный ряд . . . . .	386
§ 3. Приближение произвольных непрерывных функций многочленами и тригонометрическими суммами . . . . .	389
1. Теорема Вейерштрасса (389). 2. Приближение функции $ x $ (390). 3. Доказательство теоремы Вейерштрасса (391). 4. Приложения. Тригонометрические приближения (392).	
§ 4. Задача интерполирования и ее связь с формулой Тэйлора . . . . .	394
1. Постановка задачи и предварительные замечания (394). 2. Построение решения. Интерполяционная формула Ньютона (395). 3. Оценка остаточного члена (397). 4. Интерполяционная формула Лагранжа (399).	
Смешанные упражнения к главе VI . . . . .	400
Глава VII. О методах приближенного вычисления . . . . .	403
Предварительные замечания . . . . .	403
§ 1. Численное интегрирование . . . . .	403
1. Формула прямоугольников (404). 2. Формула трапеций и формула касательных (404). 3. Формула Симпсона (405). 4. Примеры (406). 5. Оценка погрешности (407). Упражнения (408).	
§ 2. Применения теоремы о среднем значении и формулы Тэйлора . . . . .	409
1. Исчисление ошибок (409). 2. Вычисление $\pi$ (412). 3. Вычисление логарифмов (413). Упражнения (414).	
§ 3. Численное решение уравнений . . . . .	415
1. Метод Ньютона (метод касательных) (415). 2. Метод ложного положения (метод хорд) (416). 3. Метод итерации (417). 4. Примеры (421). Упражнения (422).	
Дополнение к главе VII. Формула Стирлинга . . . . .	422
Упражнение (425).	
Смешанные упражнения к главе VII . . . . .	425
Глава VIII. Бесконечные ряды и другие предельные процессы . . . . .	427
Предварительные замечания . . . . .	427
§ 1. Понятие сходимости и расходимости . . . . .	428
1. Основные понятия (428). 2. Сложение сходящихся рядов и умножение сходящегося ряда на число (430). 3. Абсолютная и условная сходимость (430). 4. Знакопередающиеся ряды и признак сходимости Лейбница (431). 5. Коренное различие между абсолютно и условно сходящимися рядами (432). 6. Об изменении порядка членов ряда (434). Упражнения (437).	
§ 2. Исследование сходимости и расходимости ряда . . . . .	438
1. Принцип сравнения рядов (438). 2. Сравнение с геометрическим рядом (439). 3. Сравнение с интегралом (442). Упражнения (444).	

§ 3. Последовательности функций и ряды функций . . . . .	445
1. Общие соображения (445). 2. Предельные переходы для функций и для кривых (446).	
§ 4. Равномерная и неравномерная сходимость . . . . .	448
1. Общие соображения и примеры (448). 2. Критерий равномерной сходимости (451). 3. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций (454). 4. Интегрирование равномерно сходящегося ряда (454). 5. Дифференцирование бесконечного ряда (457). Упражнения (458).	
§ 5. Степенные ряды . . . . .	459
1. Сходимость степенного ряда (460). 2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов (462). 3. Действия над степенными рядами (463). 4. Теорема об однозначности разложения в степенной ряд (464).	
§ 6. Разложение заданных функций в степенные ряды. Метод неопределенных коэффициентов. Примеры . . . . .	465
1. Показательная функция (466). 2. Биномиальный ряд (466). 3. Ряд для $\arcsin x$ (468). 4. Разложение в степенной ряд функции $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (468). 5. Пример умножения рядов (469). 6. Пример почленного интегрирования ряда. Эллиптический интеграл (469). Упражнения (470).	
§ 7. Степенные ряды с комплексными членами . . . . .	471
1. Введение комплексных членов в степенные ряды (471). 2. Краткие указания из области теории функций комплексной переменной (473).	
Дополнения к главе VIII . . . . .	474
§ 1. Умножение и деление рядов . . . . .	474
1. Умножение абсолютно сходящихся рядов (474). 2. Умножение и деление степенных рядов (477). 3. Числа Бернулли и их производящая функция (478). 4. Степенные ряды для гиперболического и тригонометрического тангенса (480).	
§ 2. Предельные переходы, связанные с показательной функцией . . . . .	481
1. Равномерность предельного перехода $(1+x/n)^n \rightarrow e^x$ (481). 2. Замечание по поводу интегрирования и дифференцирования показательной функции (482). 3. Доказательство формулы $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ (482).	
§ 3. Бесконечные ряды и несобственные интегралы . . . . .	484
§ 4. Бесконечные произведения . . . . .	486
§ 5. Дальнейшие примеры бесконечных рядов (различные разложения в степенной ряд) . . . . .	489
Упражнения (492).	
Смешанные упражнения к главе VIII . . . . .	493
Глава IX. Ряды Фурье . . . . .	498
§ 1. Периодические функции . . . . .	498
1. Общие замечания (498). 2. Наложение гармонических колебаний. Обертоны. Бвення (502).	
§ 2. Применение комплексной записи . . . . .	506
1. Общие замечания (506). 2. Применение к изучению переменного тока (507). 3. Комплексная запись суперпозиции гармонических колебаний (508). 4. Вывод одной тригонометрической формулы (509). Упражнения (510).	
§ 3. Ряд Фурье . . . . .	510
§ 4. Примеры разложения в ряд Фурье . . . . .	513
1. Предварительные замечания (513). 2. Ряды Фурье для функций $\psi(x) = x$ и $\varphi(x) = x^2$ в интервале $-\pi < x < \pi$ (514). 3. Ряд Фурье для функции $x \cos x$ , $-\pi < x < \pi$ (515). 4. Функция $f(x) =  x $ в интервале $-\pi < x < \pi$ (516). 5. Еще один пример (517).	

6. Функция $f(x) =  \sin x $ (517). 7. Ряд Фурье для функции $f(x) = \cos px$ . Разложение котангенса на элементарные дроби. Выражение синуса в виде бесконечного произведения (518). 8. Дальнейшие примеры (519). 9. Заключительные замечания. Разложение в ряд Фурье функции произвольного периода (519). Упражнения (521).	
§ 5. Доказательство разложимости функции в ряд Фурье . . . . .	522
1. Сходимость ряда Фурье для кусочно гладкой функции (522). 2. Неравенство Бесселя (527). 3. Более подробное исследование характера сходимости ряда Фурье (529).	
§ 6. Приближение в среднем с помощью тригонометрических многочленов . . . . .	533
Упражнения (537).	
Д о п о л н е н и я к г л а в е IX . . . . .	538
§ 1. Многочлены Бернулли и их приложения . . . . .	538
1. Определеие и разложение в ряды Фурье (538). 2. Производящая функция многочленов Бернулли (541). 3. Формула суммирования Эйлера (543). 4. Приложения (545).	
§ 2. Интегрирование ряда Фурье . . . . .	551
Г л а в а X. Очерк теории функций многих переменных . . . . .	553
§ 1. Понятие функции многих переменных . . . . .	553
1. Функция многих переменных и область ее определения (553). 2. Простейшие типы функций (555). 3. Геометрическое изображение функций (555). Упражнение (558).	
§ 2. Непрерывность . . . . .	558
1. Определеие (558). 2. Примеры разрывов непрерывности (560). Упражнения (561).	
§ 3. Производные от функции многих переменных . . . . .	561
1. Частные производные и их геометрическое истолкование (561). 2. Фактическое вычисление частных производных (564). 3. Некоторые факты (без доказательств) (566). Упражнения (567).	
§ 4. Сложные функции и их дифференцирование (правило цепочки). Преобразование независимых переменных. Дифференцирование обратных функций . . . . .	567
1. Сложные функции (567). 2. Правило дифференцирования сложной функций (правило цепочки) (568). 3. Примеры (571). 4. Введение новых независимых переменных (571). 5. Дифференцирование обратных функций (572). Упражнения (573).	
§ 5. неявные функции . . . . .	574
1. Геометрическое истолкование неявных функций (575). 2. Дифференцирование неявных функций (576). 3. Дифференцирование неявной функции многих переменных (578). Упражнения (579).	
§ 6. Двойные и повторные интегралы . . . . .	580
1. Двойные интегралы (580). 2. Приведение двойного интеграла к повторному простому интегралу (583). 3. Примеры и замечания (586). 4. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области (587). 5. Двойной интеграл в полярных координатах (590). 6. Вычисление несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (591). 7. Статические моменты и центр массы плоской фигуры. Моменты инерции (592). 8. Дальнейшие приложения (594). Упражнения (595).	
Г л а в а XI. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях. Простейшие колебания . . . . .	596
§ 1. Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка, решаемые с помощью квадратур . . . . .	597
1. Уравнения с отделяющимися переменными (598). Упражнения (599). 2. Одно- родное дифференциальное уравнение первого порядка (599). Упражнения (601).	

3. Общее линейное дифференциальное уравнение первого порядка (601). Упражнения (603). 4. Уравнение Бернулли (603). Упражнения (605).	
§ 2. Дифференциальное уравнение второго порядка; его общее решение и частные решения. Неполные уравнения второго порядка . . . . .	606
1. Общее решение и частные решения дифференциального уравнения второго порядка. Начальные условия (606). 2. Неполные дифференциальные уравнения второго порядка. Понижение порядка (607). Упражнения (610).	
§ 3. Дифференциальное уравнение колебаний в механике и физике . . . . .	610
1. Простейшие механические колебания (610). 2. Электрические колебания (611).	
§ 4. Решение линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части. Свободное движение . . . . .	613
1. Общая теорема о решениях л. л. у. без правой части (613). 2. Формальное решение (613). 3. Физическое истолкование решения (616). 4. Выделение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Единственность решения (617). Упражнения (618).	
§ 5. Линейное уравнение с правой частью. Вынужденное движение . . . . .	619
1. Общие замечания (619). 2. Решение уравнения с правой частью вида $ce^{i\omega t}$ (621). 3. Кривая резонанса (622). 4. Более подробное исследование процесса колебания (625). 5. Замечания по поводу регистрирующих приборов (626). Упражнения (628).	
Дополнительные упражнения к главе XI . . . . .	628
Приложение. Действительные числа и понятие предела . . . . .	630
1. Определение действительного числа с помощью гнезда интервалов (630). 2. Расположение действительных чисел по величине (632). 3. Принцип точки сгущения (633). 4. Верхняя и нижняя точки сгущения. Верхний и нижний пределы (634). 5. Сходящиеся числовые последовательности (635). 6. Ограниченные монотонные последовательности чисел (636). 7. Критерий сходимости Коши для последовательностей с рациональными членами (637). 8. Определение основных действий над действительными числами (638). 9. Общая формулировка критерия сходимости Коши (642).	
Сводка важнейших теорем и формул . . . . .	643
Ответы и указания . . . . .	660
Предметный указатель . . . . .	701

## ОТ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Первое издание немецкого оригинала этого курса вышло в издательстве Шпрингера в 1927—1928 гг. С него был сделан русский перевод, опубликованный первым изданием в 1931 г. Второе, исправленное и дополненное, немецкое издание не отразилось на советских изданиях.

Когда Германия оказалась под властью Гитлера, Курант эмигрировал в США, где в 1934 г. с его участием был издан английский перевод этой книги со значительными изменениями и дополнениями. В 1937 г. он вышел вторым изданием с новыми дополнениями. В 1955 г. Шпрингер выпустил третье, исправленное и дополненное, немецкое издание, содержащее и часть дополнений английского издания. В последующие годы оба варианта книги неоднократно перепечатывались уже без изменений.

Настоящий перевод первого тома сделан с немецкого издания 1961 г. и с английского издания 1945 г. В него включен как общий материал обоих указанных изданий, так и почти все содержащиеся в них добавления, словом — все, что можно было согласовать, имея в виду различный характер изложения. Фактически из двух во многом различных книг сделана одна книга.

Наибольшее по объему добавление взято из английского издания. Это — многочисленные задачи и упражнения, а также ответы и указания к ним. Оттуда же добавлена глава X, содержащая очерк дифференцирования и интегрирования функций многих переменных. Теперь первый том представляет собой законченный учебник дифференциального и интегрального исчисления для читателей, не нуждающихся в более полном курсе анализа. Те же читатели, которые будут изучать и второй том, могут просто опустить главу X первого тома. Однако они могут выбрать и другой путь — изучить также и главу X, и тогда весь курс станет для них концентрическим: том I — первый концентр, том II — второй концентр. Концентрический характер имеет (уже с первого издания) и изложение теории дифференциальных уравнений: первый концентр — последняя глава первого тома (ее содержание не повторяется во втором томе), второй концентр — шестая глава второго тома.

В интересах лучшего приспособления книги к потребностям советского читателя мы позволили себе сделать некоторые перестановки материала. Книга снабжена нами некоторыми добавлениями и поясни-