

К. Поссе

**Космография. Ф. Тиссеран и
А. Андуайе**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 62
ББК 30.6
К11

К11 **К. Поссе**
Космография. Ф. Тиссеран и А. Андуайе / К. Поссе – М.: Книга по Требованию,
2015. – 414 с.

ISBN 978-5-458-60549-6

ISBN 978-5-458-60549-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Предисловіе къ русскому переводу.

Руководство по космографіи Ф. Тиссерана и А. Андуайе составляетъ одну изъ частей „Полнаго курса элементарной математики“ („Cours complet de Mathématiques élémentaires“), издавнаго во Франціи подъ редакціей Г. Дарбу, декана Парижскаго факультета наукъ.

Выдающіеся ученые приняли участіе въ составленіи руководства по различнымъ отдѣламъ этого „Курса“; между этими учеными одно изъ первыхъ мѣстъ занимаетъ Ф. Тиссеранъ, известный астрономъ, бывшій директоръ парижской обсерваторіи и членъ французской академіи наукъ. Тиссеранъ скончался въ 1896-мъ году, вскоре послѣ выхода въ свѣтъ его классическаго трактата по небесной механикѣ и перваго изданія руководства по космографіи; слѣдующія три изданія вышли уже послѣ его смерти. Сотрудникъ его, профессоръ математики А. Андуайе, до настоящаго времени читаетъ лекціи въ Сорбоннѣ (парижскомъ университетѣ). Руководство Тиссерана и Андуайе представляетъ собою настоящее „Введеніе въ астрономію“. Отъ другихъ курсовъ оно отличается тѣмъ, что знакомитъ читателей не только съ вопросами, входящими въ обыкновенные курсы космографіи, но и съ тѣми, разработкою которыхъ занимаются астрономы и въ настоящее время.

Въ элементарномъ изложеніи многіе изъ этихъ вопросовъ могутъ быть только наѣбчены; но они представлены авторами въ такой формѣ, что не могутъ не заинтересовать любознательнаго читателя и не пробудятъ въ немъ желанія ознакомиться съ тѣми науками—математикою, механикою, физикою и астрономіею, при помощи которыхъ онъ можетъ

достигнуть всесторонняго пониманія этихъ вопросовъ. Въ этомъ отношеніи руководство Тиссерана и Андгайе имѣютъ, по нашему мнѣнію, большое педагогическое значеніе. Предназначая русскій переводъ этого руководства, главнымъ образомъ, для учащихъ въ старшихъ классахъ нашихъ среднихъ школъ и для студентовъ-математиковъ перваго курса нашихъ университетовъ, мы не могли ограничиться простымъ переводомъ французскаго оригинала и сдѣлали нѣкоторыя, болѣе для насъ значительныя, отъ него отступленія. При этомъ мы руководились нижеслѣдующими соображеніями.

1) Большинство читателей упомянутаго выше круга познакомо со свойствами кривыхъ линій, извѣстныхъ подъ именемъ коническихъ сѣченій, а французскій оригиналъ предполагаетъ извѣстными главнѣйшія изъ этихъ свойствъ. Въ виду этого мы предпосылаемъ изложенію космографіи „Введенію“, въ которомъ элементарно излагаемъ основныя свойства упомянутыхъ кривыхъ линій. Читатель, знакомый съ элементарной алгеброй и основаніями прямолинейной тригонометріи, не встрѣтитъ затрудненій въ усвоеніи изложеннаго во „Введеніи“.

2) Нѣкоторые вопросы, какъ, напр., измѣреніе массъ планетъ, имѣющихъ спутниковъ и т. п., входящіе въ программу курса космографіи въ русской средней школѣ, не нашли себѣ мѣста во французскомъ оригиналѣ. Правда, вопросу объ измѣреніи массъ въ астрономіи посвящена статья Тиссерана, добавленная къ руководству и сохраненная нами и въ переводѣ; но статья эта изложена въ популярной формѣ, безъ помощи математики, и формулы, на которыхъ основаны вычисленія, приводятся безъ доказательства. Въ виду важности этихъ вопросовъ и большого интереса, представляемаго ими, мы сочли полезнымъ посвятить имъ особое „Прибавленіе“, въ которомъ изложены главнѣйшія слѣдствія закона всемірнаго тяготѣнія и нѣкоторыя теоремы механики, необходимыя для вывода этихъ слѣдствій.

3) Къ французскому изданію руководства добавлены пять

статей Тассеража, перепечатанныхъ изъ „Annuaire du Bureau des longitudes“, относящихся къ нѣкоторымъ частнымъ вопросамъ. Изъ этихъ статей въ переводѣ мы сохранили только три: „Приливы и отливы“, „Возмущенія планетъ“ и упомянутую уже замѣтку объ „Измѣреніи массъ въ астрономіи“, какъ заключающія въ себѣ много различныхъ данныхъ, представляющихъ общій интересъ.

Другія двѣ, „О дунѣ и ея вѣковомъ ускореніи“ и „Объ интрамеркуріальныхъ планетахъ“, какъ слишкомъ спеціальныя, въ переводѣ не помѣщены. Кромѣ этого довольно значительнаго сокращенія, мы допустили еще лишь одно, опустивъ два небольшихъ §§, касающихся республиканскаго и нѣкоторыхъ изычесныхъ календарей, не представляющихъ интереса для русскаго читателя.

4) Въ текстѣ, въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ изложенію подлинника намъ казалось слишкомъ сжатымъ, мы сдѣлали нѣкоторые разъясненія и дополненія. Всѣ сколько-нибудь значительныя дополненія и измѣненія въ текстѣ мы отмѣтили примышми скобками []. Измѣненія, вызванныя различіемъ географическаго положенія Россіи и Франціи, мы не считали нужнымъ чѣмъ-либо отмѣчать.

Считаю своимъ долгомъ выразить мою глубокую благодарность нижеслѣдующимъ лицамъ: заслуженному профессору астрономіи Н. Я. Ципгеръ, за его разъясненія нѣкоторыхъ пунктовъ, вызывавшихъ мое сомнѣніе; профессору В. А. Фаусекъ, за его цѣнныя редакціонныя замѣчанія; Л. И. Терентьевой, помогавшей мнѣ въ чтеніи корректуръ первыхъ листовъ, и въ особенности В. Шпренгель, выполнившему тяжелый трудъ чтенія корректурныхъ листовъ съ необыкновеннымъ вниманіемъ и исправившему нѣкоторые существенные мои недосмотры.

К. П.

ВВЕДЕНИЕ.

Одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ космографіи состоитъ въ описаніи путей, совершаемыхъ планетами въ ихъ движеніи по-кругъ солнца. Для того, чтобы это описаніе было понятно, необходимо знать опредѣленіе и основныя свойства кривыхъ линий, извѣстныхъ въ геометріи подъ названіемъ коническихъ сѣченій: эллипса, параболы и гиперболы.

1. *Опредѣленіе эллипса.* Эллипсомъ называется такая плоская кривая, для которой сумма разстояній каждой ея точки

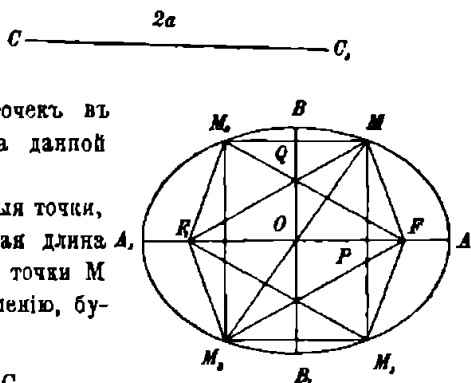
отъ двухъ данныхъ точекъ въ плоскости кривой равна данной постоянной длинѣ.

Если F и F_1 данныя точки, CC_1 — данная постоянная длина A , (фиг. 1), то для всякой точки M на эллипсѣ, по опредѣленію, будемъ имѣть

$$MF + MF_1 = CC_1.$$

Изъ этого опредѣленія вытекаеть слѣдующій способъ черченія эллипса, при помощи непрерывнаго движенія: укрѣпивъ въ точкахъ F и F_1 двѣ булавки, окружимъ ихъ перастяжимой нитью, два конца которой связаны въ одинъ, и вся длина которой равна $CC_1 + FF_1$; натянувъ нить при помощи карандаша, ведемъ затѣмъ карандашъ по бумагѣ, удерживая нить всегда натянутой. Конѣцъ карандаша M будетъ тогда чертить эллипсъ, потому-что во всякомъ положеніи M будемъ имѣть

$$FF_1 + MF + MF_1 = \text{длина нити} = FF_1 + CC_1,$$



Фиг. 1.

а слѣдовательно

$$MF + MF_1 = CC_1.$$

О любой точкѣ M на плоскости мы будемъ говорить, что она лежитъ на данномъ эллипсѣ, если для нея

$$MF + MF_1 = CC_1,$$

я не лежитъ на немъ, если

$$MF + MF_1 > \text{или} < CC_1.$$

Точки F и F_1 называются *фокусами* эллипса, длины MF и MF_1 — *радіусами векторами* точки M .

Обозначая разстояніе между фокусами FF_1 черезъ $2c$, полную длину CC_1 черезъ $2a$, радіусы векторы MF и MF_1 соответственно черезъ r и r_1 , будемъ имѣть

$$r + r_1 = 2a \quad \dots \quad (1)$$

и $c < a$, потому что въ треугольникѣ $MF F_1$ сумма сторонъ

$MF + MF_1$, равная $2a$, больше третьей стороны FF_1 , равной $2c$. Если точка O середина отрезка FF_1 , то $OF = OF_1 = c$.

Отношеніе $\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетомъ* эллипса: мы будемъ его обозначать буквою e , такъ что

$$e = \frac{c}{a}.$$

Эксцентриситетъ эллипса e всегда меньше 1; когда $e = 0$, тогда и $c = 0$, точки F и F_1 сливаются въ одну O , и эллипсъ обращается въ окружность круга радіуса a , съ центромъ въ точкѣ O , потому что тогда для всякой точки M на эллипсѣ имѣемъ

$$2MO = 2a, \quad MO = a.$$

Можно еще замѣтить, что когда $e = 1$, т.-е. $c = a$, то

$MF + MF_1 = FF_1$, точка M очевидно должна находиться на прямой FF_1 между F и F_1 , а, слѣдовательно, эллипсъ обращается въ прямолинейный отрезокъ FF_1 . Чѣмъ меньше эксцентриситетъ e , тѣмъ меньше эллипсъ отличается отъ окружности круга; чѣмъ ближе e къ 1, тѣмъ ближе эллипсъ подходит къ прямой линіи.

2. *Оси, вершины и центр эллипса.* Проведемъ прямую AA_1 черезъ фокусы эллипса F и F_1 , а черезъ точку O , середину отрезка FF_1 , прямую BB_1 , перпендикулярную къ AA_1 . Положимъ, что на фиг. I точки A и A_1 будутъ точки пересѣченія эллипса съ первою, а B и B_1 — со второю изъ упомянутыхъ прямыхъ. Найдемъ разстоянія этихъ точекъ отъ точки O .

Такъ какъ точка A лежитъ на данномъ эллипсѣ, то

$$AF + AF_1 = 2a,$$

или

$$(OA - OF) + OA + OF_1 = 2a,$$

по

$$OF = OF_1,$$

слѣдовательно, $OA = a$. Точно такъ же найдемъ $OA_1 = a$; слѣдовательно, точка O будетъ середина отрезка AA_1 .

Если точка B лежитъ на эллипсѣ и на перпендикулярѣ къ FF_1 , проведенномъ черезъ середину отрезка FF_1 , то

$$1) BF + BF_1 = 2a$$

$$2) BF = BF_1.$$

слѣдовательно,

$$BF = BF_1 = a;$$

изъ прямоугольнаго треугольника BFO (прямая BF не проведена на чертежѣ, чтобы его не усложнять), имѣемъ

$$OB = \sqrt{BF^2 - OF^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Такъ же нащли бы

$$OB_1 = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad OB_1 = OB.$$

Слѣдовательно, точка O есть середина отрезка BB_1 .

Введемъ еще обозначеніе, положивъ

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \text{откуда } a^2 = b^2 + c^2,$$

тогда будемъ имѣть

$$OB = OB_1 = b, \quad \text{и } b < a.$$

Легко убѣдиться, что прямая AA_1 и BB_1 будутъ *оси симметріи* эллипса, т.-е. что всякой точкѣ M на эллипсѣ соответствуетъ точка M_1 на томъ же эллипсѣ, въ такомъ же разстояніи

отъ AA_1 , какъ M , по другую сторону отъ этой прямой, и точка M_2 на томъ же эллипсѣ, въ томъ же разстояніи отъ BB_1 , какъ и M .

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ $MP \perp AA_1$ (P на прямой AA_1) и отложимъ на продолженіи этого перпендикуляра $PM_1 = PM$: надо показать, что M_1 лежитъ на эллипсѣ; для этого соединимъ M_1 съ F и F_1 прямыми и замѣтимъ, что

$$\begin{aligned}\triangle MFR &= \triangle M_1FR, \\ \triangle MFP &= \triangle M_1F_1P,\end{aligned}$$

откуда находимъ

$$\begin{aligned}MF &= M_1F, \quad MF_1 = M_1F_1, \\ M_1F + M_1F_1 &= MF + MF_1 = 2a,\end{aligned}$$

что и доказываетъ, что M_1 лежитъ на эллипсѣ.

Проведемъ теперь $MQ \perp BB_1$ (Q на BB_1) и на продолженіи этого перпендикуляра отложимъ $QM_2 = QM$. Надо доказать, что M_2 на эллипсѣ. Для этого соединимъ M_2 съ F и F_1 , перегнемъ чертежъ по линіи BB_1 и наложимъ правую его часть на лѣвую такъ, чтобы $F'O$ пошло по направленію OF_1 ; точка F_1 упадетъ въ F , точка M въ M_2 ; отсюда заключаемъ, что $MF = M_2F_1$, и уголъ $M_2F_1O =$ углу MFO , а тогда, изъ равенства треугольниковъ MF_1F и M_2F_1F , найдемъ, что $M_2F = MF_1$, следовательно,

$$M_2F + M_2F_1 = MF_1 + MF = 2a,$$

и точка M_2 лежитъ на эллипсѣ.

Оси симметріи эллипса называютъ обыкновенно просто *осми эллипса*. Отрѣзокъ $AA_1 = 2a$ называютъ длиною большой оси эллипса или просто *большою осью его*, отрѣзокъ $BB_1 = 2b$ — *малою его осью*; мы уже замѣтили, что $b < a$.

Точки A, A_1, B и B_1 , лежащія на эллипсѣ и на его осяхъ, называются *вершинами эллипса*.

При $e = 0$, $c = 0$, $b = a$, полуоси эллипса дѣлаются равными между собою, и эллипсъ обращается въ кругъ радіуса a , какъ было уже замѣчено.

Точка O , лежащая въ пересѣченіи осей эллипса, называется *центромъ эллипса*. Всякая *хорда* эллипса, т.-е. отрѣзокъ прямой между двумя его точками, проходящая черезъ центръ, дѣлится въ немъ пополамъ. Чтобы это доказать, проведемъ черезъ каждую изъ точекъ M на эллипсѣ прямую MO и на ея продолженіи отло-

жимъ $M_2O = MO$; надо показать, что M_3 лежитъ на эллипсѣ. Для этого соединимъ точки M и M_3 прямыми съ F и F_1 ; въ четырехугольникѣ $MF M_3 F_1$ діагонали MM_3 и FF_1 дѣлятся въ точкѣ O пополамъ, потому что $MO = M_3O$, $OF = OF_1$; слѣдовательно, этотъ четырехугольникъ параллелограммъ, и

$$\begin{aligned} M_3F_1 &= MF, \quad M_3F = MF_1 \\ M_3F_1 + M_3F &= MF + MF_1 = 2a, \end{aligned}$$

т.-е. точка M_3 лежитъ на эллипсѣ.

3. *Зависимость между радіусомъ векторомъ точки на эллипсѣ и угломъ, образуемымъ радіусомъ векторомъ съ направлениемъ большой оси эллипса (полярное уравненіе эллипса).*

Обозначимъ радіусъ векторъ MF черезъ r , а уголъ $MF A$ черезъ θ ; мы условимся подъ величиною θ , соответствующею данной точкѣ M , понимать уголъ, на который надо повернуть подвижную прямую около точки F въ сторону, противоположную движению часовой стрѣлки, чтобы эта прямая изъ положенія FA пришла въ положеніе FM . При движеніи точки M по эллипсу отъ A черезъ B къ A_1 , этотъ уголъ измѣняется отъ 0 до π , а при дальнѣйшемъ движеніи отъ A_1 черезъ B_1 къ A θ измѣняется отъ π до 2π . Между длиною радіуса вектора $MF = r$ и угломъ θ существуетъ простая зависимость, которую мы здѣсь и выведемъ. Обозначая другой радіусъ векторъ MF_1 черезъ r_1 , имѣемъ

$$r + r_1 = 2a, \quad r_1 = 2a - r \dots \dots \dots (1)$$

Изъ треугольника MF_1F имѣемъ

$$MF_1^2 = MF^2 + FF_1^2 - 2MF \cdot FF_1 \cos \angle MF F_1$$

но $\angle MF F_1 = \pi - \theta$, $FF_1 = 2c$; слѣдовательно,

$$r_1^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta, \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{а изъ (1),} \quad r_1^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar, \dots \dots \dots (3)$$

вычитая (3) изъ (2), получимъ

$$c^2 - a^2 + r(a + c \cos \theta) = 0$$

или

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta}.$$

Замѣчая еще, что $a^2 - c^2 = b^2$, раздѣляя числителя и знаменателя

на a и обозначая $\frac{b^2}{a} = p$, находимъ

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}. \quad (4)$$

$$\text{гдѣ } e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Это и есть искомая зависимость между r и ψ для любой точки M на эллипсѣ.

Значеніе p въ уравненіи (4) легко указать; изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что $r = p$ при $\psi = \frac{\pi}{2}$; слѣдовательно, p есть радіусъ векторъ той точки M на эллипсѣ, для которой $\psi = \frac{\pi}{2}$, и, слѣдовательно, $MF : AA_1$.

Поэтому, если черезъ фокусъ эллипса проведемъ хорду, перпендикулярную къ большой оси, то длина этой хорды будетъ равна $2p$. Эта длина называется *параметромъ* эллипса; слѣдовательно, p есть *полупараметръ* эллипса.

Замѣтимъ здѣсь, что если считать положеніе точки F и направленіе прямой AA_1 извѣстными, то положеніе любой точки M на плоскости вполне опредѣлится, если зададимъ длину $MF = r$, и уголъ $MFA_1 = \psi$, считаемый, какъ выше сказано. Уголъ ψ опредѣлитъ направленіе прямой FM относительно AA_1 , а длина r —положеніе точки M на этой прямой относительно F . Величины r и ψ , опредѣляющія положеніе точки M , называютъ *полярными координатами* этой точки. Точка F называется *полюсомъ* полярной системы координатъ, прямая FA (неопредѣленной длины)—*осью* этой системы. Направленіе *оси* и положеніе на ней *полюса* считаются данными, и по отношенію къ нимъ и опредѣляется положеніе всякой точки M на плоскости, съ помощью координатъ этой точки. Уравненіе (4) есть, слѣдовательно, уравненіе между полярными координатами любой точки M на данномъ эллипсѣ. Какова бы ни была точка M на данномъ эллипсѣ, соответствующія ей значенія r и ψ удовлетворяють уравненію (4). Его называютъ также для краткости *полярнымъ уравненіемъ* эллипса.