

А.М. Ляпунов

Избранные труды
Классики науки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.М. Ляпунов**
Избранные труды: Классики науки / А.М. Ляпунов – М.: Книга по Требованию, 2012. – 544 с.

ISBN 978-5-458-32338-3

Академическое издание избранных трудов А. М. Ляпунова в серии "Классики науки". Замечательные исследования Ляпунова по теории дифференциальных уравнений и по вопросам устойчивости до сих пор привлекают пристальное внимание учёных. Выход данного сборника был приурочен к тридцатилетию кончины Ляпунова, и в нем представлены почти все основные направления его творчества.

ISBN 978-5-458-32338-3

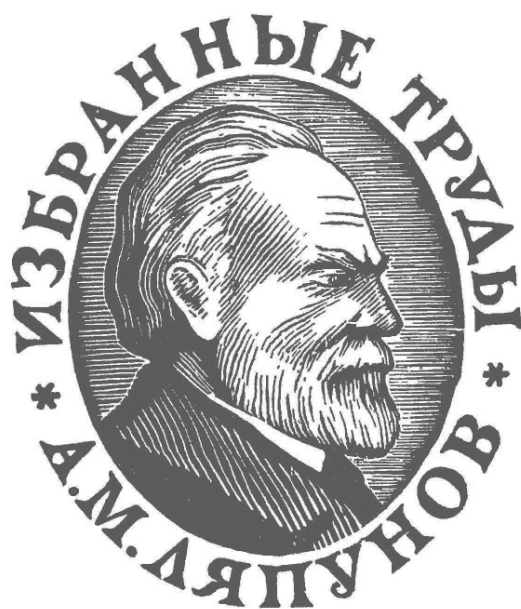
© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



**ОБЩАЯ ЗАДАЧА
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
ДВИЖЕНИЯ**



ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сочинении излагаются некоторые способы для решения вопросов о тех свойствах движения и, в частности, равновесия, которые известны под названием устойчивости и неустойчивости.

Обыкновенные вопросы такого рода, которым и посвящено это сочинение, приводят к исследованию дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

вторые части которых, зависящие от времени и неизвестных его функций $x_1, x_2, \dots, x_n$ при величинах x_s , численно достаточно малых, разлагаются в ряды по целым положительным степеням последних и уничтожаются, когда все эти величины делаются нулями.

Задача состоит при этом в том, чтобы узнать — можно ли начальные значения функций x_s , не делая их нулями, выбирать настолько численно малыми, чтобы во все время, следующее за начальным моментом, функции эти оставались численно меньшими некоторых заранее данных, отличных от нуля, но сколь угодно малых пределов.

Когда наши дифференциальные уравнения мы умеем интегрировать, задача эта, конечно, не представляет затруднений. Но важно иметь способы, которые позволяли бы решать ее независимо от выполнимости этого интегрирования.

Известно, что существуют случаи, когда рассматриваемая задача допускает приведение к некоторой задаче о *maxima*'х и *minima*'х.¹ Но область вопросов, которые таким путем могут быть разрешаемы, весьма ограничена, и в большинстве случаев необходимо прибегать к каким-либо иным методам.

Прием, которым пользуются обыкновенно, приводится к тому, что в исследуемых дифференциальных уравнениях отбрасывают все члены выше первого измерения относительно величин x , и вместо первоначальных рассматривают получаемые таким путем линейные уравнения.

Так трактуется вопрос в сочинении Томсона (Thomson) и Тэта (Tait) «*Treatise on Natural Philosophy*» (vol. I, part I, 1879), в сочинениях Рауза (Routh) «*A treatise on the Stability of a given State of motion*» (1877) и «*A treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies*» (part II, 4 edition, 1884), и, наконец, в сочинении Жуковского «О прочности движения» (Ученые записки Московского университета, Отдел физико-математический, вып. 4, 1882).

Конечно, указанный сейчас прием вносит весьма существенное упрощение, в особенности в тех случаях, когда коэффициенты в дифференциальных уравнениях суть постоянные величины. Но законность такого упрощения *a priori* ничем не оправдывается, ибо дело приводится к замене рассматриваемой задачи другою, с которою она может не находиться ни в какой зависимости. Во всяком случае очевидно, что если решение новой задачи и может давать ответ на первоначальную, то только при известных условиях, а последние обыкновенно не указываются.

¹ Мы разумеем здесь те случаи, к которым приложима известная теорема Лагранжа (Lagrange) о *maxima*'х силовой функции, касающаяся вопросов об устойчивости равновесия, или более общая теорема Рауза о *maxima*'х и *minima*'х известных интегралов дифференциальных уравнений движения, позволяющая решать некоторые вопросы об устойчивости движения (см.: *The advanced part of a treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies*. 4 edition, 1884, p. 52, 53).

Должно, впрочем, заметить, что, сознавая нестрогость приема, некоторые авторы (как, например, Рауз) не ограничиваются одним первым приближением, к которому приводит интегрирование названных выше линейных уравнений, а рассматривают также второе и некоторые из следующих, получаемых обычными в подобных случаях методами. Но этим дело мало подвигается вперед, ибо вообще таким путем достигается только более точное представление функций x , в пределах известного промежутка времени, что, конечно, не дает новых оснований для каких-либо заключений об устойчивости.

Единственная, сколько мне известно, попытка строгого решения вопроса принадлежит А. Пуанкаре (H. Poincaré), который в своем во многом отношении замечательном мемуаре «Sur les courbes définies par les équations différentielles» (Journal de mathématiques, 3-e série, tomes 7 et 8; 4-e série, tomes 1 et 2), и именно в двух последних его частях, рассматривает вопросы об устойчивости для случая систем дифференциальных уравнений второго порядка, а также останавливается на некоторых близких к ним вопросах, касающихся систем третьего порядка [1].

Хотя Пуанкаре и ограничивается очень частными случаями, но методы, которыми он пользуется, допускают значительно более общие приложения и способны привести еще ко многим новым результатам. Идеями, заключающимися в названном мемуаре, я руководствовался при большей части моих изысканий.

Задача, которую я себе поставил, предпринимая настоящее исследование, может быть формулирована так: указать те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и дать какие-либо способы, которые позволяли бы решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости.

Конечно, чтобы придти к каким-либо результатам, необходимо было сделать относительно рассматриваемых дифференциальных уравнений известные предположения.

Простейшее из них, и вместе с тем соответствующее наиболее важным и интересным приложениям, состояло бы в том, что коэффициенты в разложениях вторых частей этих уравнений суть постоянные величины. Весьма многим интересным вопросам соответствовало бы также более общее предположение, что коэффициенты эти суть периодические функции времени.

В этих двух предположениях вопрос и трактуется мною преимущественно.

Впрочем я касаюсь отчасти и более общего случая, когда названные коэффициенты суть какие-либо функции времени, числовые значения которых никогда не превосходят известных пределов.

В этом общем предположении трактуется вопрос в первой главе моего сочинения, где доказывается одно предположение, касающееся интегрирования рассматриваемых дифференциальных уравнений при помощи рядов известного типа,¹ и указываются некоторые вытекающие из него заключения об устойчивости. В том же предположении доказываются здесь и некоторые другие предложения, лежащие в основании дальнейших выводов.

Первая глава представляет только вступительную часть моего сочинения, в которой излагаются некоторые предложения принципиального характера. Главную же часть составляют вторая и третья, где и рассматриваются последовательно случаи постоянных и периодических коэффициентов.

¹ Ряды, о которых идет здесь речь, рассматривались мною в более частных предположениях в статье «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. I, 1888). Впоследствии я узнал, что в таких же предположениях ряды эти рассматривались А. Пуанкаре в его диссертации «Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles» (Thèse, 1879).

Каждую из этих двух глав я начинаю замечаниями, касающимися линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому приближению, причем в третьей главе, где трактуется случай периодических коэффициентов, вхожу в некоторые подробности относительно так называемого характеристического уравнения.

Переходя затем к главному вопросу и указав условия, при которых он разрешается в первом приближении, я обращаюсь к тем особенным случаям, когда для этой цели в дифференциальных уравнениях необходимо принимать в расчет члены выше первого измерения.

Но случаи этого рода весьма разнообразны, и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям.

Поэтому различные возможные случаи приходится рассматривать отдельно, и я ограничиваюсь только простейшими из них, которые представляют затруднения, наименее серьезные. Исследование их и изложение соответствующих им способов решения вопросов об устойчивости занимает большую часть двух последних глав.

Не входя в дальнейшие подробности относительно содержания этого сочинения, с которым читатель может до известной степени ознакомиться из прилагаемого оглавления, замечу еще, что во второй главе я касаюсь вопроса о периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений. Вопрос этот находится в тесной связи с методами, прилагаемыми мною для одного из особенных случаев. Притом рассмотрение его приводит к некоторым заключениям об условной устойчивости для тех наиболее интересных случаев, когда дифференциальные уравнения имеют каноническую форму. А этими заключениями исчерпывается почти все, что пока можно сказать общего о таких случаях.

В прилагаемом сочинении читатель не найдет решения каких-либо определенных механических задач. По первоначальному плану приложения такого рода должны были составить четвертую главу. Но потом я отказался от намерения прибавлять ее, имея в виду следующие соображения.

Все наиболее интересные и важные вопросы механики (как, например, те, которые приводят к каноническим уравнениям) таковы, что в особенных случаях, когда первое приближение недостаточно, задача делается для них в высшей степени трудною, и пока невозможно указать каких-либо приемов для ее решения. Поэтому, при рассмотрении таких вопросов, мне пришлось бы ограничиться только примерами двоякого рода: или теми, в которых вопрос решался бы приведением к задаче о $\max$ и $\min$ (т. е. на основании теоремы Рауза), или теми, в которых он решался бы в первом приближении. Но подобные примеры, хотя и представляли бы известный интерес, не относились бы к главной части моего исследования, которая, как уже было сказано, посвящена изложению методов, соответствующих особенным случаям известных категорий. Что же касается примеров, относящихся к этим методам, то их пришлось бы выбирать из области тех вопросов механики, в которых принимаются в расчет различного рода сопротивления среды. Таких примеров, конечно, можно было бы привести сколько угодно, но они сами по себе не представляли бы большого интереса и могли бы иметь значение только как поясняющие названные методы. Если же иметь в виду исключительно эту последнюю цель, то совершенно достаточно и тех примеров аналитического характера, которые приведены мною в надлежащих местах двух последних глав.

В заключение замечу, что сочинение мое не есть трактат об устойчивости, где было бы обязательно рассмотрение механических задач всякого рода. Подобный трактат должен